問題 1 ： 解答/採点基準 ― 力学 2 題 （10 点）

Part A. 隠された円盤 （3.5 点）

A1 （0.8 点） (1) で示した量と角度ϕと基盤の傾斜角Θの関数としてbを表せ。

A1 の解答: [0.8]

幾何学を用いた解答： 接点の周りのトルクが 0 であることを用いる。

$\Longrightarrow$ 重心は接点の真上でなければならない。

$$\sin\phi = \frac{D}{b}$$ **0.3**

$$\sin\Theta = \frac{D}{r_1}$$ **0.3**

ここでDは違う記号でもよい。これを解くと

$$\sin\phi = \frac{r_1}{b}\sin\Theta \Longrightarrow b = \frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$$ **0.2**

別解 1: 別の点の周りのトルクと力を考える [0.8]

トルクの正しい表式

$$(r_1\sin\Theta - b\sin\phi)Mg$$ **0.3**

力の正しい表式

$$(r_1\sin\Theta - b\sin\phi)Mg = 0$$ **0.3**

正しい答え

$$b = \frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$$ **0.2**

別解 2

重心を G, 接点を T とおくと、三角形 SGT について∠STG =Θ, ∠SGT の外角=ϕ

ST=r_1, SG=b. 正弦定理から

$$\frac{r_1}{\sin\phi} = \frac{b}{\sin\Theta}$$

よって,

$$b = \frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$$

A2 (0.5 点) φに対する運動方程式を求めよ。木製円柱の中心軸Sのまわりの慣性モーメントI_Sを、T, bと(1)に示された量を用いて表せ。つりあいの状態からのずれφは常に小さいものとする。

A2 の解答: **[0.5]**

次のような形の式を書くこと：$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$ **0.1**
$\varphi = A\cos\omega t$の形の式を書いてもよい。
二通りの解法がある：

1. 運動エネルギー$\frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2$と位置エネルギー$-bMg\cos\varphi$を用いる。全エネルギーは保存するのでその時間微分が運動方程式を与える。
2. トルクから回転運動方程式を立てる。 $\tau = I_S \ddot{\varphi} = -Mgb\sin\varphi$

正しい表式（エネルギー保存則でも回転運動方程式でもよい） **0.3**
最終的な解

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_S}{Mgb}} \Rightarrow I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$ **0.1**

（導出）

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgb}{I_S}\sin\varphi \approx -\frac{Mgb}{I_S}\varphi$$

だから

$$\omega^2 = \frac{Mgb}{I_S}$$

A3 (0.4 点) 中心軸の位置dを、bと(1)で示された量で表せ。この結果にr_2と h_2を変数として含んでいてもよい。（これらは**問題 A.5** で求める）

A3 の解答: **[0.4]**

次のような重心の表式

$$b = \frac{dM_2}{M_1 + M_2}$$ **0.2**

正しい答え：$M_1 + M_2 = M,\ M_2 = \pi h_2 r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)$ から

$$d = \frac{bM}{\pi h_2 r_2^2(\rho_2 - \rho_1)}$$ **0.2**

A4 (0.7 点) 慣性モーメント I_S を b および(1)の量で表せ。解答には、r_2 と h_2 を変数として含んでいてもよい。(これらは**問題 A.5** で求める)

A4 の解答： **[0.7]**

均質な円盤の慣性モーメントの正しい表式

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4$$ **0.2**

質量の誤り **−0.1**

円盤の慣性モーメントの表式中で係数 1/2 の誤り **−0.1**

‘余分な’円盤の慣性モーメントの正しい表式

$$I_2 = \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4$$ **0.2**

Steiner の定理(平行軸の定理)を用いて

$$I_S = I_1 + I_2 + \pi d^2 r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$ **0.1**

正しい答え：

$$I_S = \tfrac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \tfrac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \pi\left(\tfrac{bM}{\pi h_2 r_2^2(\rho_2-\rho_1)}\right)^2 r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \frac{b^2 M^2}{\pi r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)}$$ **0.2**

---

b ではなく d を用いて結果を書いた場合、最終的な答えに 0.2 点ではなく 0.1 点を与える。 **0.1**

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \pi d^2 r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$

(訳注)

解答中の I_1、I_2 とはそれぞれの円盤の中心軸周りの慣性モーメントのことである。

また、’余分な’円盤とは、問題文の図 1 の状況を、密度 ρ_1 の円柱と密度 $(\rho_2 - \rho_1)$ の円盤が組み合わさってできたものと考えたときの、後者である。

A5（1.1 点） これまでに求めたすべての結果を用いて、h_2とr_2をb, Tおよび(1)の量を用いて表せ。h_2をr_2の関数として表してもよい。

A5 の解答： [1.1]

生徒がこの一連の方程式をどれほど正しく解こうとしたかを測るのは難しい。次の式を用いることが考えられる。

$$M = \pi r_1^2 h_1 \rho_1 + \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1)$$ 0.3

I_Sの表式を解いてr_2^2を求める

$$r_2^2 = \frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\left(I_S - \frac{1}{2}Mr_1^2 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\right)$$ 0.4

I_SをTで書き換える

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$ 0.1

正しく解いてr_2を求める

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\left(\frac{MgbT^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2}Mr_1^2 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\right)}$$ 0.1

$M = \pi r_1^2 h_1 \rho_1 + \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1)$を用いて$h_2$を求める表式を書き下すと

$$h_2 = \frac{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}{\pi r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}$$ 0.2

Part B. 回転する宇宙ステーション（6.5 点）

B1（0.5 点） 宇宙飛行士が地球上の重力加速度g_Eと同じ加速度を感じるとき、宇宙ステーションの角速度ω_{ss}を求めよ。

B1 の解答： [0.5]

次のような中心力の表式

$$F_{ce} = m\omega^2 r$$ 0.1

力の釣り合いから、正しい表式は

$$g_E = \omega_{ss}^2 R$$ **0.2**

正しい答えは

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}$$ **0.2**

B2（0.2 点） 地球表面における重力は一定であるとして、その加速度をg_Eとするとき、地球上にいる人が測定する振動の角振動数ω_Eを求めよ。

B2 の解答： **[0.2]**

結果がg_Eによらないことに気づくこと **0.1**

正しい結果

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ **0.1**

B3（0.6 点） 宇宙ステーションの中で、アリスが測定した場合の振動の角振動数ωを求めよ。

B3 の解答： **[0.6]**

次のような力の正しい表式

$$F = -kx \pm m\omega_{ss}^2 x$$ **0.2**

正しい符号を取る

$$F = -kx + m\omega_{ss}^2 x$$ **0.2**

正しい微分方程式を立てる

$$m\ddot{x} + (k - m\omega_{ss}^2)x = 0$$ **0.1**

正しい結果を得る

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_{ss}^2}$$ **0.1**

ω_{ss}^2の代わりにg_E/Rを用いてもよい。

B4（0.8 点） 地球表面から小さな高さhにおける重力加速度$g_E(h)$の表式を求めて、振動する物体の角速度$\widetilde{\omega}_E$を求めよ（線形近似で十分である）。地球の半径をR_Eとする。地球の自転は無視せよ。

B4 の解答： **[0.8]**

$$g_E(h) = -\frac{GM}{(R_E+h)^2}$$ **0.1**

重力を線形近似すると

$$g_E(h) = -\frac{GM}{R_E^2} + 2h\frac{GM}{R_E^3} + \cdots$$ **0.2**

$g_E = GM/R_E$であることを用いると

$$g_E(h) = -g_E + \frac{2hg_E}{R_E} + \cdots$$ **0.1**

どちらの項も逆符号であるならば、逆符号でもよい。
このことが力に対して真に及ぼす影響、すなわち定数項は平衡点（基準点）をずらすことにより消去できることに気づくと

$$F = -kx + 2xmg_E/R_E$$ **0.2**

正しい微分方程式を立てる

$$m\ddot{x} + \left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)x = 0$$ **0.1**

正しい結果

$$\widetilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}$$ **0.1**

B5（0.3 点） 地球における角振動数$\widetilde{\omega}_E$と等しい角振動数ωでばね振り子が振動するときの、宇宙ステーションの半径Rを求めよ。地球の半径R_Eを用いて表せ。

B5 の解答： **[0.3]**

次の式を書き下す

$$\omega_{ss}{}^2 = 2g_E/R_E$$ **0.1**

解くと

$$R = \frac{R_E}{2}$$ **0.2**

g_EではなくGM/R_E^2が用いられていたら、0.1 点のみを与える。

B6（1.1 点） 物体が床にぶつかったときの、（塔の真下を基準として塔とは垂直な向きの）物体の水平方向の速さv_xと物体の水平方向の変位d_xを求めよ。ただし、塔の高さHは小さく、物体が落下している間は加速度は一定であるとみなしてよい。また、$d_x \ll H$であるとしてよい。

B6 の解答: **[1.1]**

可能な解法がいくつかある。

解法 1 ― コリオリ力を用いる

- 速度v_x

  正しい速度を用いてコリオリ力の式を書くと

  $$F_C(t) = 2m\omega_{ss}^2 Rt\omega_{ss} = 2m\omega_{ss}^3 Rt$$ **0.1**

  これを積分するか、速度について等加速度運動のようになることを用いると、

  $$v_x(t) = \omega_{ss}^3 Rt^2$$ **0.2**

  ここで

  $$t = \sqrt{2H/\omega_{ss}^2 R}$$ **0.2**

  を代入すると正しい結果が得られる。

  $$v_x = 2H\omega_{ss}$$ **0.1**

- 変位d_x

  $v_x(t)$を積分すると

  $$d_x = \frac{1}{3}R\omega_{ss}^3 t^3$$ **0.3**

  積分する代わりに単に最終速度の 1/2 をとって’平均’すると 1/3 のかわりに 1/2 という係数になる。*この場合 0.1 点を引く。* **−0.1**

  tに代入すると

$$d_x = \frac{1}{3}R\omega_{ss}^3\left(\frac{2H}{\omega_{ss}^2 R}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}2^{3/2}H^{3/2}R^{-1/2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8H^3}{R}}$$ **0.2**

解法 2 — 慣性系を用いる

この解法は B7 の解法に似ているが、解法 1 よりも複雑な近似が必要である。

- v_x

  ここでϕは物体の掃く角度で、αは物体が床に着くまでに宇宙飛行士（と塔）が回転した角度である。（図 1 を見よ。）

  慣性系において物体の初速度は$v_x = \omega_{ss}(R-H)$である。 **0.1**

  物体が着地するまでに、x方向（水平方向）は角度ϕだけ回転しているので、新しい水平に沿った速度は

  $$\omega_{ss}(R-H)\cos\phi$$ **0.1**

  （$d_x \ll H$であるから$\cos\phi$のかわりに$\cos\alpha$と書いてもよい）

  $$\cos\phi = \frac{R-H}{R} = 1-\frac{H}{R}$$ **0.1**

  回転座標系に変換するときは、$\omega_{ss}R$を引かなければならない。 **0.1**

  最終的に（物体が床に着地した時点で）飛行士の静止系から見ると

  $$v_x = \omega_{ss}R\left(1-\frac{H}{R}\right)^2 - \omega_{ss}R \approx \omega_{ss}R\left(1-\frac{2H}{R}\right) - \omega_{ss}R = -2H\omega_{ss}$$ **0.2**

  速度の正負は座標系の取り方に依存するので、正の符号でもよい。

- d_x

  v_xを計算したときの記号を用いて

  $$d_x = (\alpha-\phi)R$$ **0.1**

  $$\phi = \arccos\left(1-\frac{H}{R}\right)$$

  $$\alpha = \omega_{ss}t$$

  ここでtは物体が落下するのにかかる時間で、

  $$t = \frac{\sqrt{R^2-(R-H)^2}}{\omega_{ss}(R-H)}$$ **0.1**

  （B7 の解答を参照せよ）

  $\xi \equiv H/R$とすると

  $$d_x = \left[\frac{\sqrt{1-(1-\xi)^2}}{1-\xi} - \arccos(1-\xi)\right]R$$ **0.3**

  となり、これがこの問題に対する正確な解である。必要ではないが、小さなξに対して近似をすることが可能である。

$$\arccos(1-\xi) \approx \sqrt{2\xi}\left(1+\frac{\xi}{12}\right)$$

小さなξに対する近似を行い$\xi = H/R$を代入すると解法 1 と同じ解が出てくる。

$$d_x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

係数 2/3 が欠けていたら 0.1 点引く。 $-\mathbf{0.1}$

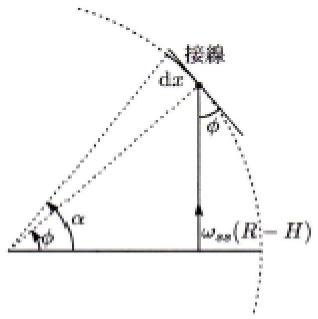


図 1: 解法 2 で用いる記号の定義

解法 3 — 慣性系で考え、幾何学の技法を用いる

これはd_xを得る別解である。

物体の移動距離はlで、落ちる間に宇宙ステーションは角度αだけ回転するとする。図 2 を参照せよ。方冪の定理により

$$l^2 = H(2R-H)$$ $\mathbf{0.1}$

回転角は $\alpha = \omega_{SS}t$で

$$t = \frac{l}{\omega_{SS}(R-H)}$$ $\mathbf{0.1}$

は落下するのにかかる時間である。ゆえに

$$\alpha = \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H}$$ $\mathbf{0.1}$

$$\frac{d_x}{R} = \alpha - \arcsin\frac{l}{R} = \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H} - \arcsin\sqrt{\xi(2-\xi)}$$ $\mathbf{0.1}$

$\xi \equiv \frac{H}{R}, y \equiv \sqrt{\xi(2-\xi)}$とすると

$$\arcsin y \approx y + \frac{y^3}{6}$$

であるから

$$\frac{d_x}{R} \approx y(1+\xi) - y - \frac{y^3}{6} = y\left(\xi - \frac{y^2}{6}\right) \approx \frac{2\xi y}{3} \approx \frac{2\xi\sqrt{2\xi}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R^3}}$$

より，最終的な解は，

$$d_x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$ **0.1**

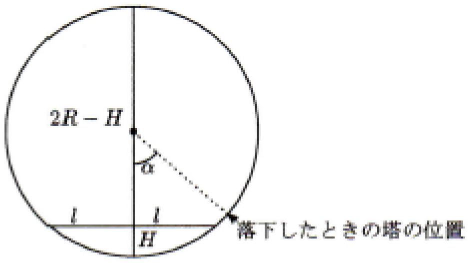


図 2：解法 3 で用いる記号の定義

(訳注) arcsin，arccos の近似式を用いなくても sin，cos の近似だけで正解を得る。

この d_x を ϕ で表すと

$$d_x = \left[\frac{\sin\phi}{\cos\phi} - \phi\right]R \approx [\frac{\phi - \frac{1}{6}\phi^3}{1 - \frac{1}{2}\phi^2}]R \approx \frac{\phi^3}{3}R$$

これから $\phi = \sqrt{2\xi}$ を代入すれば

$$d_x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

と正しい結論が導かれる

B7（1.3 点） $d_x = 0$となるような塔の高さの下限を求めよ。

B7 の解答： **[1.3]**

問題を解く鍵は回転しない座標系を用いることである。中心に十分近いところで物体が放されると，その速度は十分小さいので地面にぶつかる前に宇宙ステーションが2π以

上回転することができるだろう。

速度は次の式で与えられる。

$$v = \omega_{ss}(R - H)$$ **0.1**

宇宙ステーションにぶつかるまでに物体が移動する距離dは

$$d^2 = R^2 - (R - H)^2$$ **0.1**

回転しない座標系で考えて衝突までにかかる時間tを得る。

$$t = \frac{d}{v} = \frac{\sqrt{R^2 - (R - H)^2}}{\omega_{ss}(R - H)}$$ **0.1**

そしてHと宇宙ステーションの回転角ϕの関係式を導出する方法はいくつかある。

解法 1

$$t = \frac{R \sin \phi}{\omega_{ss} R \cos \phi}$$ **0.2**

この結果と$t = \phi / \omega_{ss}$という結果により次の式を得る。

$$\phi = \tan \phi$$ **0.2**

無限個の解が存在することに気付くこと **0.2**

この式は自明な解$\phi = 0$をもつ。次の解は$3\pi/2$より少しだけ小さく$H > R$となり、これは正しくない。3 番目の解がHの下限を与える。

$$\phi \approx 5\pi/2$$

$\phi = \tan \phi$という式はグラフ的にも数値的にも解くことができ、おおよその解$\phi = 7.725\ \mathrm{rad}$を得る。このとき

$$\frac{H}{R} = (1 - \cos \phi) \approx 0.871$$

方法が正しいならば得られたH/Rの値によって下記の点数を与える。 **0.4**

$0.85 \le H/R \le 0.88$　0.4 点

$0.5 \le H/R < 0.85$　0.3 点

$0 < H/R < 0.5$ または$H/R > 0.88$　0.2 点

$H = 0$ または 方法が誤っている場合　0 点

解法 2

Hと回転角ϕの関係式

$$\frac{R - H}{R} = \cos \phi$$ **0.2**

により次の式を得る。

$$\frac{H}{R} = 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{1-(1-H/R)^2}}{1-H/R}\right)$$ **0.2**

図 3 に$f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{1-(1-x)^2}}{1-x}\right)$のグラフを与える。 2 番目の交点の近似値を求めよう。

最初の交点は捨てる。なぜならば$\cos\phi = \cos(-\phi)$であるがために交点になってしまったのであり、$H > R$となるからだ。

無限個の解が存在することに気づくこと **0.2**

- 新たに変数$x \coloneqq 1 - H/R$を定義すると、与式は次のようになる。

$$x = \cos\left(\sqrt{1-x^2}/x\right) =: g(x)$$

- $g(x)$は最初の解にいたるまで（最初の解よりもxの大きいところでは）xよりも小さい。特にある領域では負となる（図 4）。3 番目のゼロ点が解の下限を与える。

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 5\pi/2$$

- 下限を与える。

$$x = 1/\sqrt{25\pi^2/4+1} \Longrightarrow H = R\left(1 - 1/\sqrt{25\pi^2/4+1}\right) \approx 0.874R$$

注意：厳密な解は$H/R = 0.871\ldots$である。

答えの数値については解法 1 で述べたのと同様の点数を与える。 **0.4**

gでなくfをプロットして$f(x) = x$の解を見つけたならば上の解と等価である。同様の点数を与える。

$\cos\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$を用いても良い。

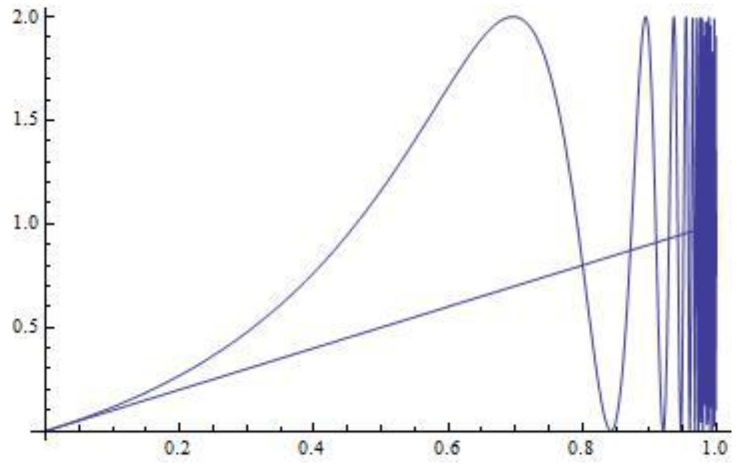


図 3: $f(H/R)$とH/Rのグラフ

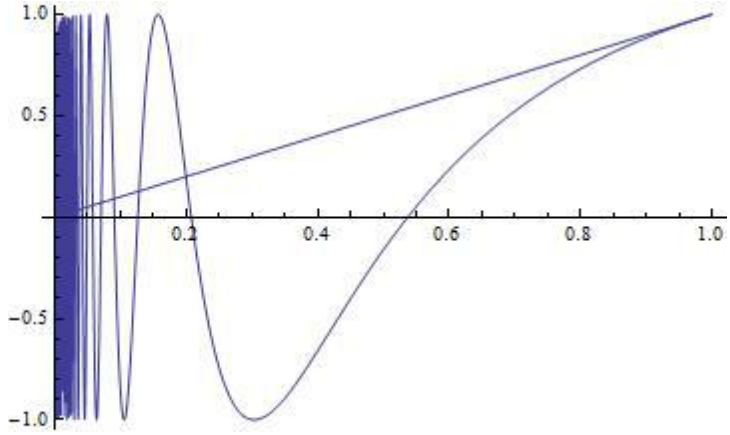


図 4: $g(x)$とxのグラフ

B8（1.7 点） 平衡位置$x=0, y=0$から、アリスは物体を距離dだけ引き下げて、ばねを離した（図 5 を見よ）。

- $x(t)$と$y(t)$の表式を求めよ。$\omega_{ss}d$は小さいとしてよい。また、y方向の運動についてはコリオリ力を無視してよい。
- 軌跡$\big(x(t), y(t)\big)$をスケッチせよ（概略図を描け）。振幅のような、軌跡の重要な特徴はすべて記載すること。

B8 の解答: **[1.7]**

注意：コリオリ力の符号については言及してこなかった。逆符号を用いていても同じ点数を与えるが、整合性がなければならない！整合性のない場合、各々*0.1 点*を引く。 **−0.1**

ωを用いて全ての式を表しても良く、$\sqrt{k/m-\omega_{ss}^2}$とあらわに書く必要はない。しかしωのかわりにk/mを用いていたら 0.1 点を引く。 **−0.1**

$y(t)$は調和振動であることに気づく。

$$y(t) = A\cos\omega t + B$$ **0.1**

初期条件を用いて定数を正しく与える。

$$y(t) = -d\cos\omega t$$ **0.2**

$v_y(t)$の正しい表現

$$v_y(t) = d\omega\sin\omega t$$ **0.1**

x方向のコリオリ力

$$F_x(t) = 2m\omega_{ss}v_y(t) = 2m\omega_{ss}d\omega\sin\omega t$$ **0.2**

このことにより$x(t)$もまた調和振動であることに気づくこと **0.1**

しかし、等速度運動する項vtがあることに気づくこと **0.1**

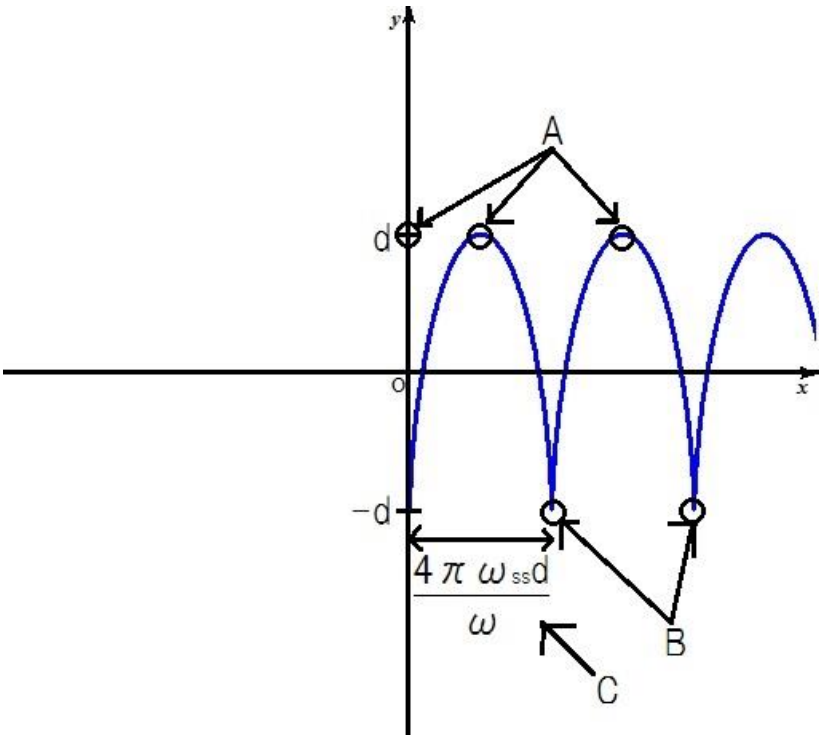
正しい振幅を得る

$$A = \frac{2\omega_{ss} d}{\omega}$$ **0.1**

正しい初期条件のもとでの正しい解

$$x(t) = -\frac{2\omega_{ss} d}{\omega}\sin\omega t + 2\omega_{ss} dt$$ **0.2**

概略図:



定性的評価:

周期運動 **0.1**

周期運動に加えて等速度運動をしていること **0.1**

B): 突出点(cusp) **0.1**

定量的評価:

A)+B): 極大点と突出点が$y = \pm d$にあること **0.1**

C): 突出点(cusp)同士の距離が$\Delta x = \frac{4\pi\omega_{ss} d}{\omega}$であること **0.2**