

# 問題 2 : 電気回路における非線形ダイナミクス 解答

## PartA 定常状態と不安定性

### A1 [計 0.4 点]

$I$ - $V$ グラフを見て、以下を得る。

$$R_{\text{off}} = 10.0 \Omega \quad (0.1)$$

$$R_{\text{on}} = 1.00 \Omega \quad (0.1)$$

$$R_{\text{int}} = 2.00 \Omega \quad (0.1)$$

$$I_0 = 6.00 \text{A} \quad (0.1)$$

注意：この間いでは有効数字の桁数は考慮しない。

### A2 [計 1.0 点]

この回路にキルヒホッフの法則を用いる。 $U$ を双安定な素子の電圧として、

$$\mathcal{E} = IR + U \quad (0.1)$$

したがって

$$I = \frac{\mathcal{E} - U}{R} \quad (0.1)$$

よって、回路の定常状態は素子Xの $I$ - $V$ グラフと上の方程式の交点である。 (0.2)

$R=3.00 \Omega$  のとき、常にちょうど1個の交点がある。 (0.2)

$R=1.00 \Omega$  のとき、 $E$ の値によって1,2,3個の交点が得られる。 (0.4)

注意：以下の表により部分点を与える。

答	1個	2個	3個	1,3個	1,2個	2,3個	1,2,3個
点数	0	0	0.2	0.3	0	0.2	0.4

### A3 [計0.6点]

定常状態は中間の部分上にある。 (0.2)

したがって対応する式は

$$I_{\text{stationary}} = \frac{\mathcal{E} - R_{\text{int}}I_0}{R - R_{\text{int}}} \quad (0.1)$$

$$= 3.00 \text{A} \quad (0.1)$$

$$U_{\text{stationary}} = R_{\text{int}} (I_0 - I) \quad (0.1)$$

$$= 6.00 \text{V} \quad (0.1)$$

注意：上側直線または下側直線上の（非物理的な）定常状態に対しては、0.2点の減点。

### A4 [計1.0点]

正しいモデル化ならばすべて以下のようになるであろう。

この回路にキルヒホッフの法則を用いて

$$\mathcal{E} = IR + U_X + L \frac{dI}{dt} = IR + (I_0 - I)R_{\text{int}} + L \frac{dI}{dt}$$

よって

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - I_0 R_{\text{int}} - (R - R_{\text{int}})I$$

(0.5)

重要な2つの場合への分離は $dI/dt$ の符号によって決まる。

$I > I_{\text{stationary}}$  のとき、 $dI/dt < 0$  となり  $I$  は減少する。(0.2)

$I < I_{\text{stationary}}$  のとき、 $dI/dt > 0$  となり  $I$  は増加する。(0.2)

注意：時間微分を式に含んでいることは本質的ではないので、正しければほかの解答ももちろん許容する。

したがって定常状態はstableであるといえる。(0.1)

注意：stableにチェックされていれば、たとえ理由が書かれていなかったとしても0.1点を与える。逆にunstableにチェックされていれば、たとえそれまでがどれほど正確な理由だったとしてもこの0.1点は与えない。

## PartB 物理学のなかの双安定非線形素子：無線送信機

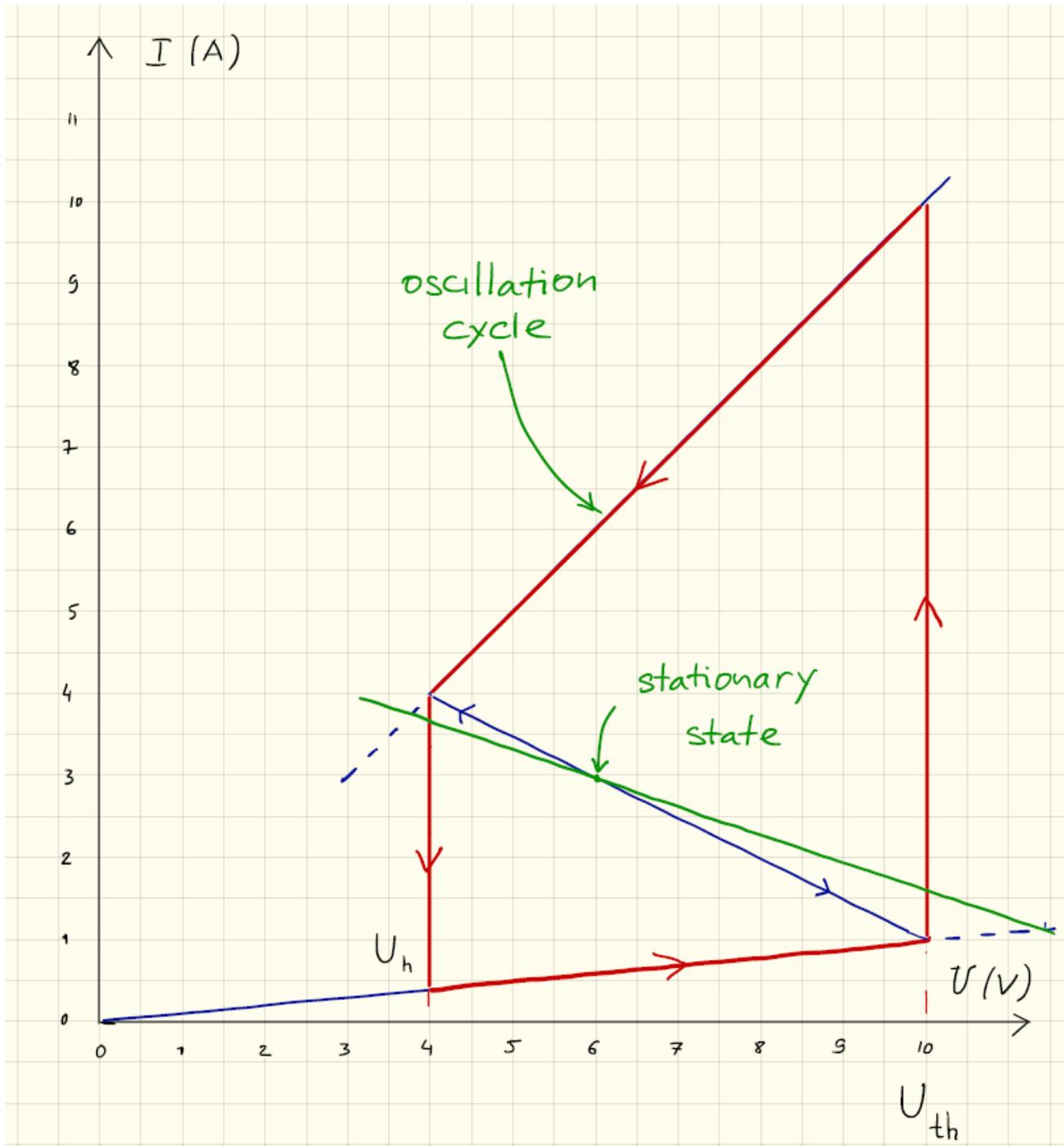
### B1 [計1.8点]

正確にサイクルが書けていれば1.2点を与える。以下はその分配である。

- ・上側直線がサイクルのなかに含まれている。(0.2)
- ・下側直線がサイクルのなかに含まれている。(0.2)
- ・ジャンプが直角である ( $U$  一定である)。(0.2)
- ・ジャンプが $U_h$ と $U_{th}$ で起きている。(0.2)
- ・上側直線を左向きに移動している。(0.2)
- ・下側直線を右向きに移動している。(0.2)

考察について以下を1つ述べているごとにさらに0.2点を与える。ただし、0.6点を超えることはない。

- ・ジャンプの間 $U$ が一定になるのは、コンデンサの電荷が直ちに変わることはないからである。(0.2)
- ・中間部分では定常状態になるのでサイクルの一部とはならない。(0.2)
- ・ジャンプが角で起こるのはそこからどこにも行けないからである。(0.2)
- ・上側直線上で左向きに動くのは、安定な定常状態が（グラフの外ではあるが）上側直線の左側にあるからである。これはキルヒホッフの法則を用いた議論によっても同様に示される。(0.2)
- ・下側直線上で右向きに動くのは、安定な定常状態が（グラフの外ではあるが）下側直線の右側にあるからである。これはキルヒホッフの法則を用いた議論によっても同様に示される。(0.2)



## B2 [計1.9点]

非線形素子は上側直線と下側直線の間を振動しているので

$$U_x = R_{\text{on/off}} I_x$$

と書き表すことが出来る。片側の直線に限って考えると、回路は基本的なRC回路のようにふるまう。ただし、電気容量は  $C$  で抵抗は合成抵抗  $R_{\text{on/off}}R / (R_{\text{on/off}} + R)$  である。(素子Xと抵抗が並列に接続されていることに注意) したがって、この回路の時定数は

$$\frac{R_{\text{on/off}}R}{R_{\text{on/off}} + R} C$$

となる。

訳者補足：時定数とは簡単に言うと、RC回路などで微分方程式を解いた時にできる指数部分の肩に着目して書くと、 $C \cdot \exp(-\alpha t)$  とかけるが、この  $\alpha$  の逆数のことである。

この問題での直線部分を仮想的に伸ばした時、十分長い時間が経った後、この回路は定常状態へと移行する。定常状態での電圧は

$$U_{\text{on/off}} = \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R} \mathcal{E}$$

とかける。定常状態との差が指数的に減少することを考えて、 $U_X(t)$ の表式は

$$U_X(t) = \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R} \mathcal{E} + \left( U_X(t=0) - \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R} \mathcal{E} \right) e^{-\frac{R_{\text{on/off}} + R}{R_{\text{on/off}} RC} t}$$

注意：0.5点を次のように配分する。

- ・指数部分が正しい。(0.2)
- ・ $t \rightarrow \infty$ で正しい定常状態となる。(0.1)
- ・指数の前の部分が正しい。(0.1)
- ・ $U_X(t)$ の表式が正しい。(0.1)

上側直線でかかる時間は

$$t_{\text{on}} = \frac{R_{\text{on}} R}{R_{\text{on}} + R} C \log \left( \frac{U_{\text{th}} - U_{\text{on}}}{U_{\text{h}} - U_{\text{on}}} \right) = 2.41 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (0.4)$$

下側直線でかかる時間は

$$t_{\text{off}} = \frac{R_{\text{off}} R}{R_{\text{off}} + R} C \log \left( \frac{U_{\text{off}} - U_{\text{h}}}{U_{\text{off}} - U_{\text{th}}} \right) = 3.67 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (0.4)$$

したがって振動の周期は

$$T = t_{\text{on}} + t_{\text{off}} = 6.08 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (0.1)$$

注意：最終的な答えがあていば満点を与える。また、部分的な答案に対しても部分点を与える。

訳者補足：解答は時定数を用いたeleganceな導出をしているが、キルヒホッフの法則から微分方程式を定積分しても同様な答えが求まる。部分点の範囲は広いが、文字式でなく数値で議論してしまうと部分点ももらえないことがあるので注意すること。

### B3 [計0.7点]

下側直線で消費されるエネルギーは無視する。1サイクルの間に上側直線で消費されるエネルギーはだいたい以下のように見積もることが出来る。

$$E = \frac{1}{R_{\text{on}}} \left( \frac{U_{\text{h}} + U_{\text{th}}}{2} \right)^2 t_{\text{on}} = 1.18 \cdot 10^{-4} \text{ J} \quad (0.4)$$

電力は以下の通り。

$$P \sim \frac{E}{T} = 19.3 \text{ W} \quad (0.3)$$

注意：公式が書けており、答えが $5\text{W} \leq P \leq 50\text{W}$ の範囲内ならば満点を与える。

公式が書けており、上の範囲外だが $1\text{W} \leq P \leq 100\text{W}$ の範囲内ならば0.5点を与える。

値は範囲外だが、公式を書けているならば0.4点を与える。

上で与えた式はあくまで1つの例であり、他のどんな妥当な評価も許容される。

### B4 [計0.6点]

ラジオ波の波長は $\lambda = c T = 1.82 \times 10^3 \text{ m}$ で与えられる。(0.2)

アンテナのありうる長さは $\lambda/4$  (もしくは $3\lambda/4, 5\lambda/4$ など...)。(0.3)

1kmを下回るただ1つの答えは  $s = \lambda/4 = 459\text{m}$ である。(0.1)

注意：正しい答である  $\lambda/4$  には満点が、 $\lambda/2$  とした間違いには0.4点を与えられる。

### PartC 生物学のなかの双安定非線形素子：ニューリスタ

C1 [計1.2点]

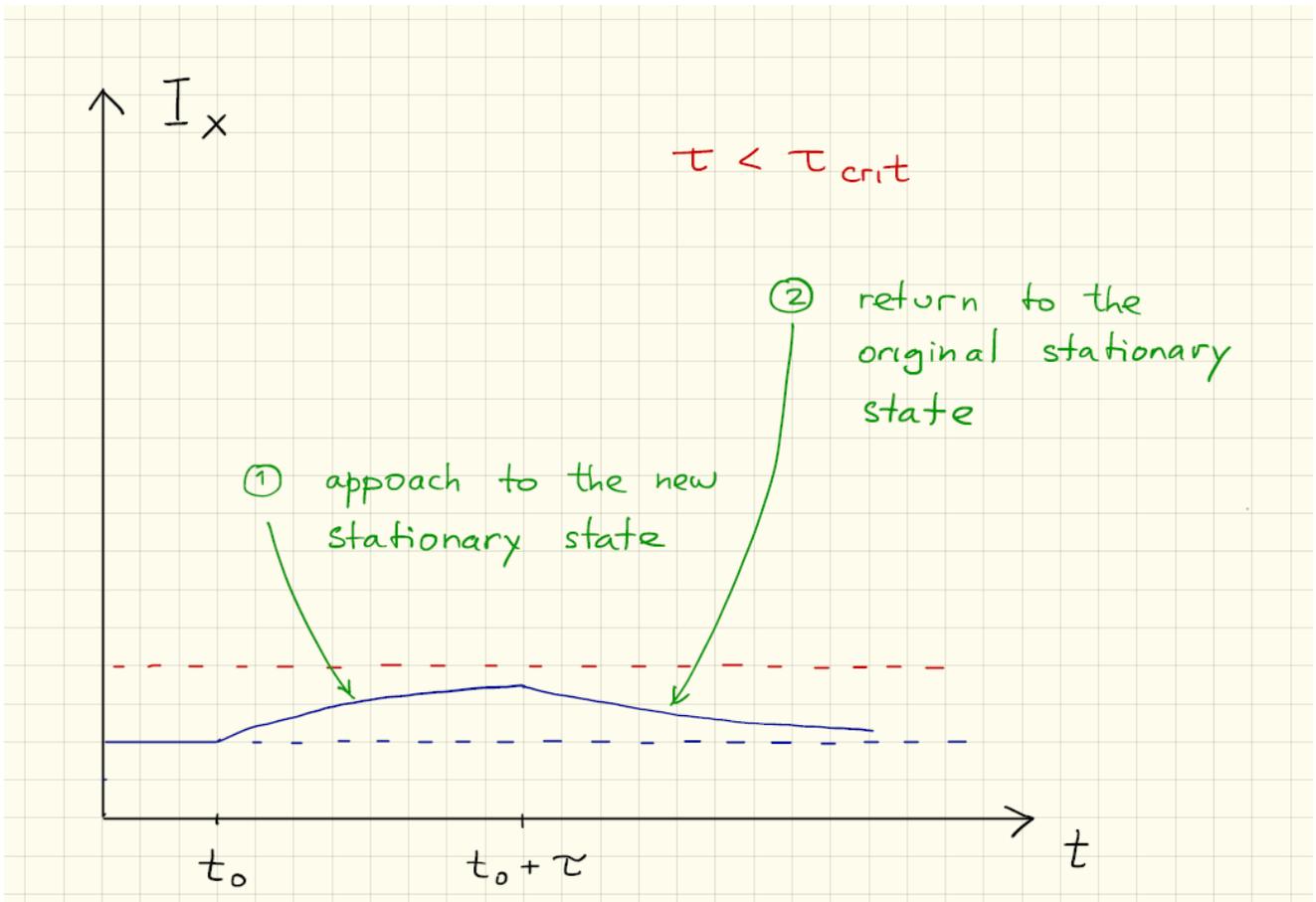
$\tilde{\epsilon} = 12.0V$  のとき、定常状態は下側直線上にある。

$$\tilde{U} = \frac{R_{off}}{R_{off} + R} \tilde{\epsilon} = 9.23V$$

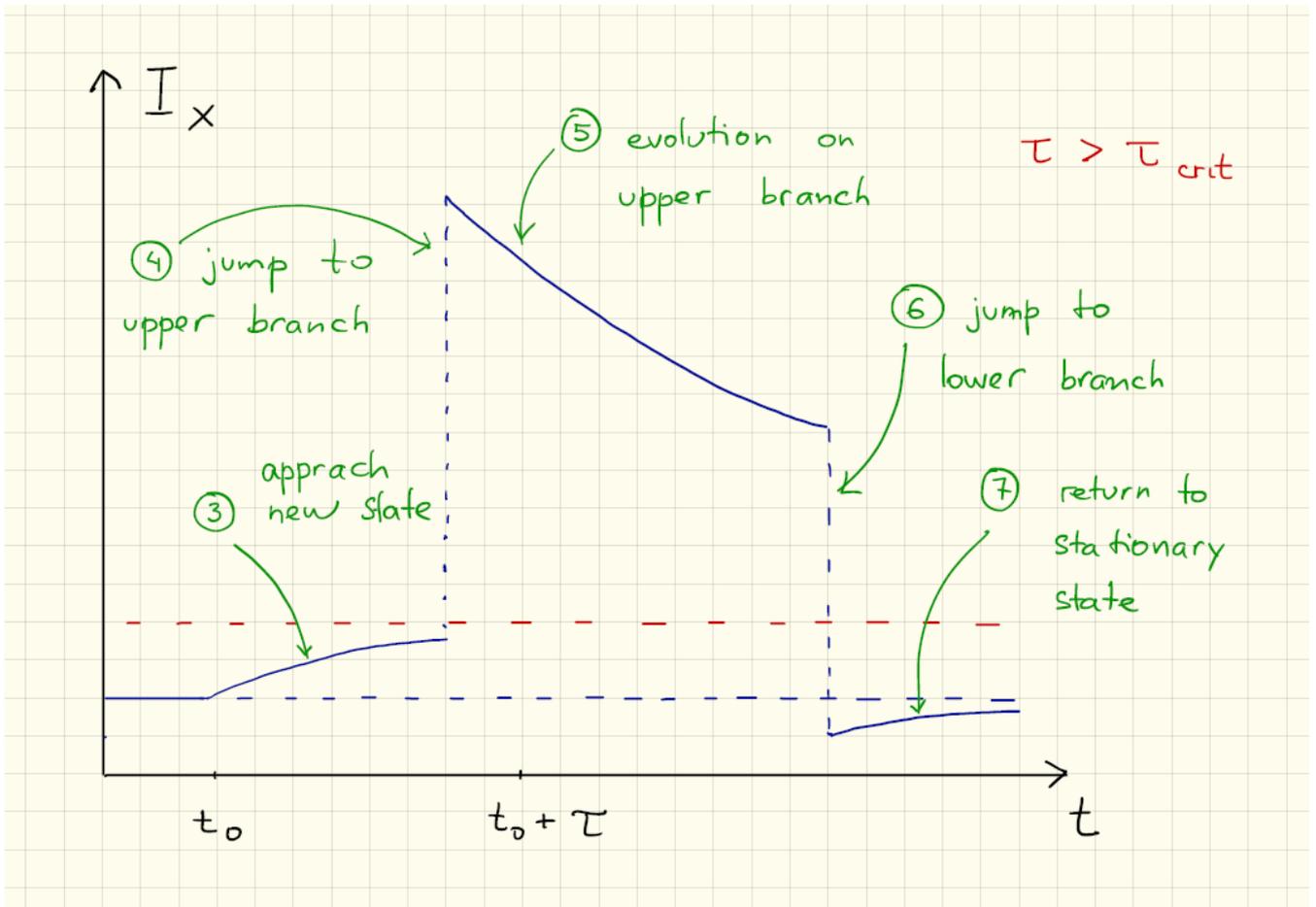
$\tilde{\epsilon} = 15.0V$  まで電圧をあげたとき、PartBと同様に下側直線を右向きに動く。

もし右端に至る前に元の電圧まで下げると、単純に基底状態まで戻ってくるだろう。

しかし、右端に至ってしまうと、上側直線までジャンプし、( $\tau < T$ なので) 1回の周期を行ってから元の基底状態に戻ってくるだろう。



1. 新しい状態への近づき方 (0.2)
2. 下の基底状態へ戻る様子 (0.2)



3. 新しい状態への近づき方 (0.1)
4.  $t_0 + \tau$ までに上側直線にジャンプしている (0.2)
5. 上側直線での進展 (0.2)
6. 下側直線へのジャンプ (0.1)
7. もとの基底状態への戻りかた (0.2)

### C2 [計0.6点]

下側直線の右端までにかかる時間を計算すればよい。

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{R_{\text{off}}R}{R_{\text{off}} + R} C \log \left( \frac{U_{\text{off}} - \tilde{U}}{U_{\text{off}} - U_{\text{th}}} \right) = 9.36 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

注意：この式はB2の $t_{\text{off}}$ の式で $U_{\text{h}}$ を $\tilde{U}$ に置き換えただけである。

- 正しい時定数 (0.2)
- 正しい電圧の選択 (0.2)
- 正しい表式 (0.1)
- 正しい数値 (0.1)

正しい解答には満点を与える。上のスキームによって部分点を与える。

### C3 [計0.2点]

$\tau > \tau_{\text{crit}}$  のとき、この系は1回の振動を行う。これがニューリスタである。

注意：ほかの問の出来に関わらず、Yesにのみ0.2点を与える。