

レンズの公式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

を利用して次の問題を考える。

この式の意味を考えると、 a はレンズを中心として左側方向を正としたら、レンズの右側方向を負とし、 b は a と逆にレンズの右側が正、左側が負となる。そして凸レンズの場合 f は正、凹レンズの場合 f は負となる。従って、レンズの右側、焦点距離よりもレンズから遠い位置にある物体の像は、 $a > f$ の場合

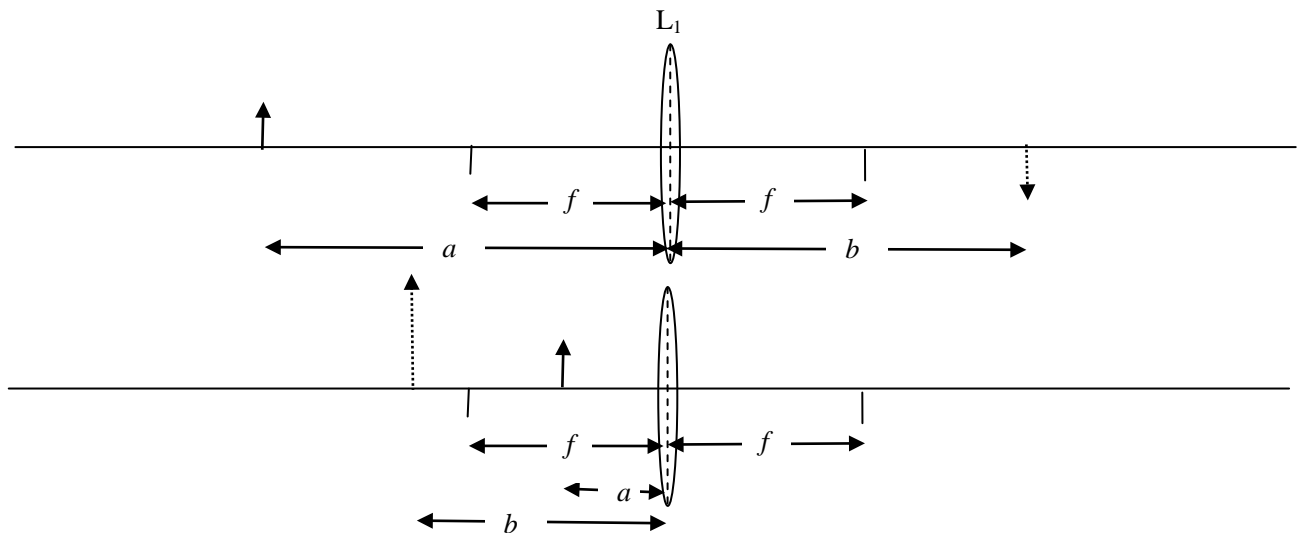
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \quad \text{であるから、} \quad b = \frac{af}{a-f} = \frac{f}{1-f/a} > f > 0 \quad (2)$$

となり、レンズの右側、 f よりも遠方に実像ができる。これに対し、レンズの焦点距離よりも内側、 $a < f$ の位置に物体がある場合、(1)式より、

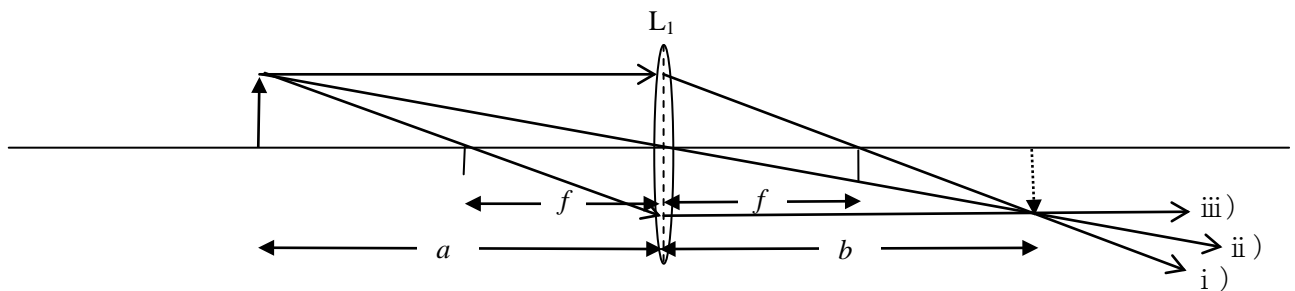
$$b = \frac{af}{a-f} < 0 \quad (3)$$

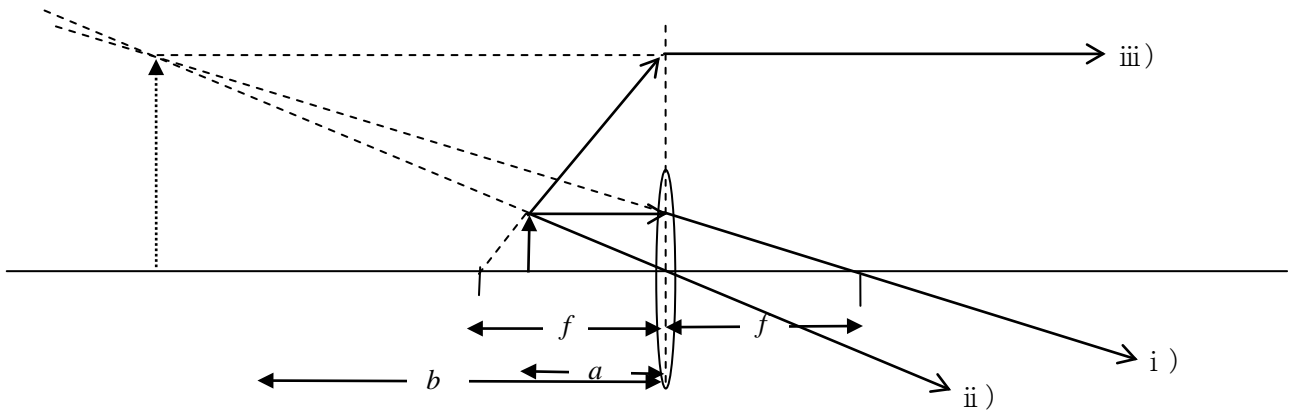
となり、レンズの左側、物体と同じ側に像ができる。この場合 $b < 0$ であるから、虚像となる。

これら2つの場合を下図に示す。像の大きさは、 a 、 b の比、 b/a で求められる。



また、物体からの光線をたどって描くと、





このように、光線をたどる場合、以下の3本を利用する。

i) 光軸と平行な線。平行光線を意味し、レンズの焦点位置、 f を通る。

ii) レンズの中心（光軸上の）を通る直線。この光線は方向が変わらない。

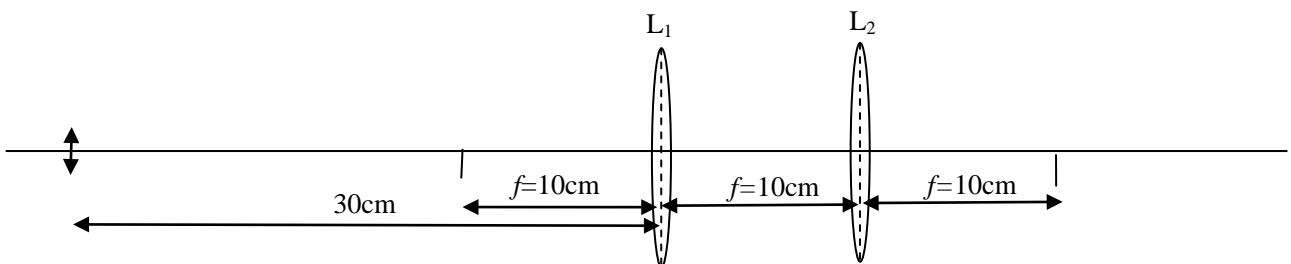
iii) 入射側の焦点位置 f を通ってレンズに入る線はレンズで曲げられ、光軸と平行な線となる。つまり焦点からでた光は光軸に平行な光線となる。

上の図では、これらどの3本を描いているか、それぞれ、i)、ii)、iii) を記してある。これら3本（2本で十分）の光線の交点が像の位置を示す。2番目の図では、入射光線を逆方向に延ばして（点線で示した）、交点を求めており、虚像であることを示している（この位置にスクリーンを置いても像は現れないが、右遠方より眺めると、そこに像があるように見える）。

レンズが複数の場合、作図または式 (1) を使って、入射光に対して、光が入る順番に、各レンズについて像を求め、そのレンズによってできた像について、次のレンズによる像がどこにできるかを求めるというステップを繰り返せばよい。また、複数レンズ全体の系の特質は焦点と主点で記述される。焦点の位置は、光軸に平行に入射した光が光軸と交わる点として求められ、主点は、焦点に集光する光を逆に伸ばし、入射光と交わる点から光軸に下ろした点として求められる。

問1

1) 焦点距離が 10 cm の凸レンズ 2 枚 (L_1 と L_2) を 10 cm 離して並べた。この時、レンズ L_1 から L_2 とは反対側、30 cm 離れた光軸上にある、光軸に垂直に置かれた長さ 1 cm の直線の像は、何処にどのくらいの大きさでできるか、また実像か虚像のどちらか。



最初のレンズでどの位置に像ができるかを求める。(2) 式に $a=30$ 、 $f=10$ を代入すると、

$b=(30 \times 10)/(30-10)=300/20=15$ と求められ、レンズ L_1 の右側 15cm のところに実像ができ、大きさは $15/30=0.5$ 倍となる。この像に対して、2 枚目のレンズによる像をもとめればよい。上の図から、 L_2 の右側 5cm のところに実像ができるので、(2) 式では、 $a=-5$ 、 $f=10$ を代入して、

$$b=(-5 \times 10)/(-5-10)=50/15=10/3、 \quad b/a=(10/3)/5=10/15=2/3$$

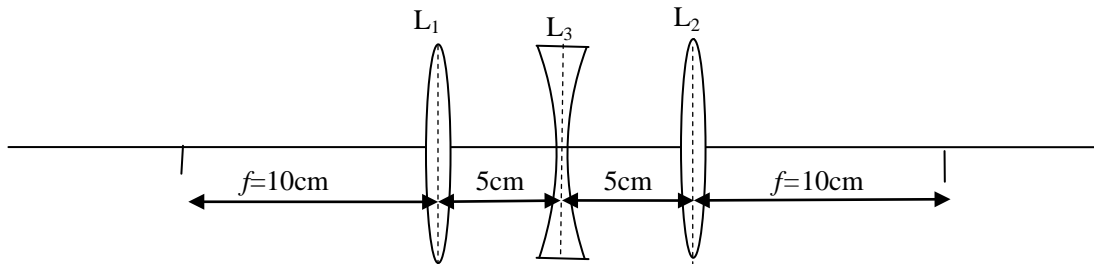
然るに、2 番目の像は元の物体の 0.5 倍であったので、2 枚レンズによる像の大きさは、

$$(1/2) \times (2/3) = 1/3$$

したがって、レンズ L_2 の右側のところに、元の $1/3$ 倍、すなわち $1/3$ cm の実像がつくられる。

問 2

この 2 枚のレンズの間、中央に焦点距離 10 cm の凹レンズを入れた。この 3 枚のレンズ全体の系の焦点距離はいくらか。 焦点距離は、光軸に入射した平行光線とその光線が焦点に集光した時、焦点から逆に伸ばした光線と、光軸に入射した平行光線との交点から光軸に下ろした垂線が光軸と交わる点（これを主点という）と焦点の間の距離をいう。



無限遠に像があるとしよう。 $a=\infty$ となるので、 $b=f$ 、すなわち L_1 の右、10cm のところに実像ができる。中央に入れた凹レンズについて考えると、凹レンズ L_3 の右側 5cm のところに L_1 による像ができる。したがって $a=-5$ cm、 $f=-10$ cm を式 (3) に入れると、

$$b=(-5 \times -10)/(-5-(-10))=50/5=10\text{cm}$$

すなわち、凹レンズの右側 10 センチのところに実像が結ばれる。次に、 L_2 による像は、実像位置が L_2 の右側 5cm であるから、 $a=-5$ cm、 $f=10$ cm を (3) 式に代入すると、

$$b=(-5 \times 10)/(-5-10)=50/15=(10/3)\text{cm}$$

すなわち、 L_2 の右側 3.33cm のところが焦点位置となる。次に、焦点距離を求める。光軸から 1cm 離れた平行光線は、 L_3 に 1/2cm の高さで入射し、 L_3 から 10cm のところで光軸と交わるので、5cm 離れた L_2 にはさらに 1/2 の高さ、すなわち、 $(1/2) \times (1/2)=(1/4)$ cm の高さで入射する。その後、 $(10/3)$ cm 離れた点で光軸と交わる（焦点）ので、この光線を逆に延ばして、高さ 1cm の入射光の延長線と交わる位置を求めると、 $(10/3)$ cm 離れた位置で $(1/4)$ cm の高さなので、1cm の高さになるには、 $40/3$ cm の距離が必要。

すなわち、焦点距離 $f=13\frac{1}{3}$ cm、主点の位置は L_2 の左側 $(40/3)\text{cm} - (10/3)=(30/3)\text{cm}=10\text{cm}$ となり、 L_1 の位置と重なる。

このように、式 (1) を利用すれば、結像位置、大きさなどを容易に求めることができる。