

平行双極子列磁気トラップとその地震計・火山センサーへの応用

A. イントロダクション

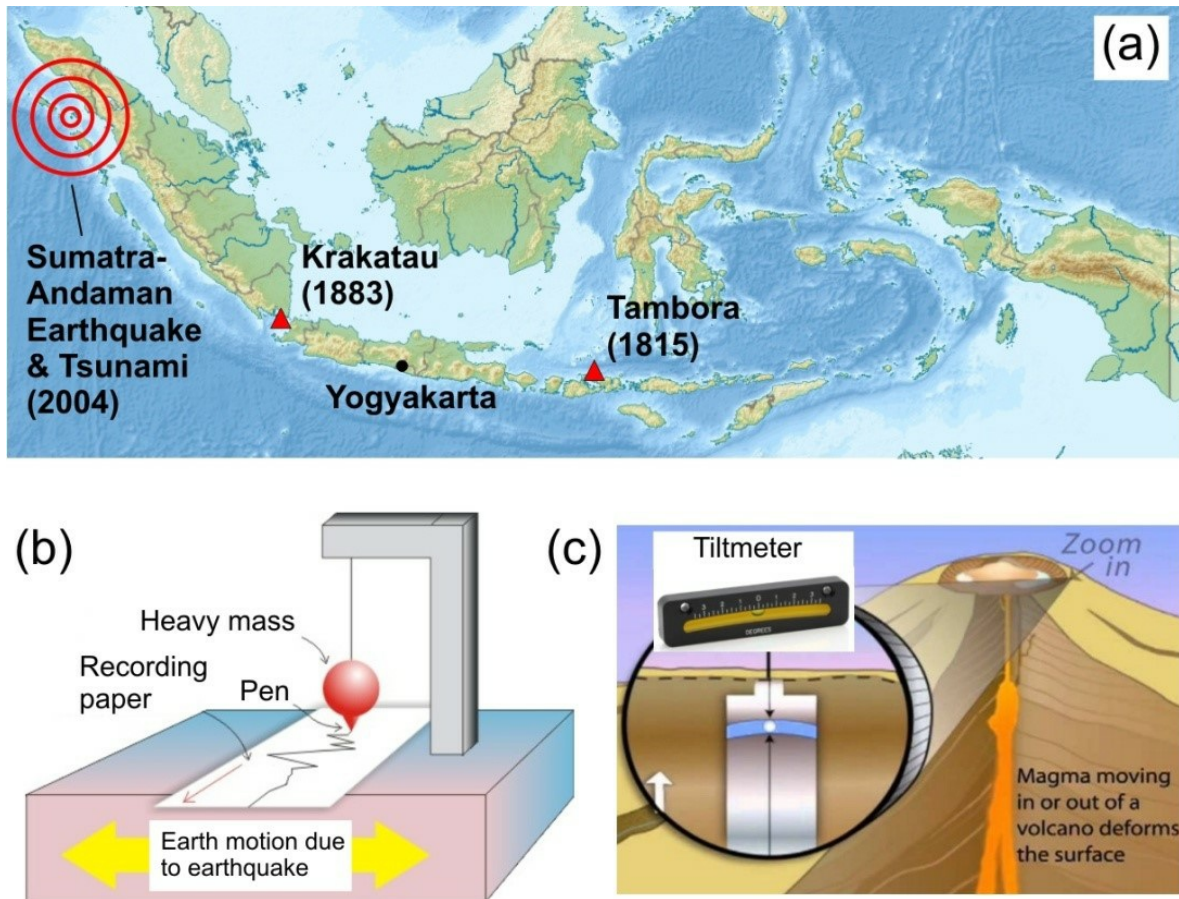


図1 (a) よく知られた災害を示したインドネシアの図 (b) 地震を検出する基本的な地震計 (c) 火山をモニタリングするための傾斜検出器 (Tiltmeter)

インドネシアは世界最大の群島であり、約17,000の島々が熱帯に点在していることから、しばしば「赤道の寶石」と呼ばれる。残念ながら地震や火山の爆発的噴火といった自然の脅威を多く抱えている。スマトラ-アンダマン地震及び津波（2004）やクラカタウ火山（1883）やタンボラ火山（1815）の爆発的噴火等の巨大な壊滅的な出来事（図1a）が世界の歴史上最も致命的な災害として記録されている。地震を検出するためには、通常振り子を利用して地面の変位や加速度を測定する地震計が用いられている（図1b）。火山を監視するためには、地下のマグマの運動による地面の傾きの変化を検出するための傾斜検出器（チルトメーター）が用いられている（図1c）。この問題で、地震の検出や火山の監視をおこなうための新しい種類の磁気的なトラップ及びセンサー（平行な直線状双極子(PDL)トラップシステム）に関する物理と応用を調べてみよう。

平行直線状双極子システムは、図2に示されたように、2本の直線状に分布した磁気双極子（直線状双極子と呼ぶ）を配列させたものである。最近2人のインドネシア人の物理学者がこのシステムにおいて非常に面白い現象を発見した。それは直線状双極子の長さがあるしきい値よりも長くなると、中心部よりも端の磁場が強くなり、図2a*に示されたような「らくだの背ポテンシャル」を作るというものである。この「らくだの背効果」は平行直線状双極子(PDL)トラップと呼ばれる新しい形の磁気トラップを可能にしてくれるという点で重要である。1対の径

Japan

向磁石、すなわち図2cに示されているように、N極とS極が円筒の端面ではなくて曲がった側面にあるような円筒磁石、を用いることによりこのPDLトラップは実験的に実現される。

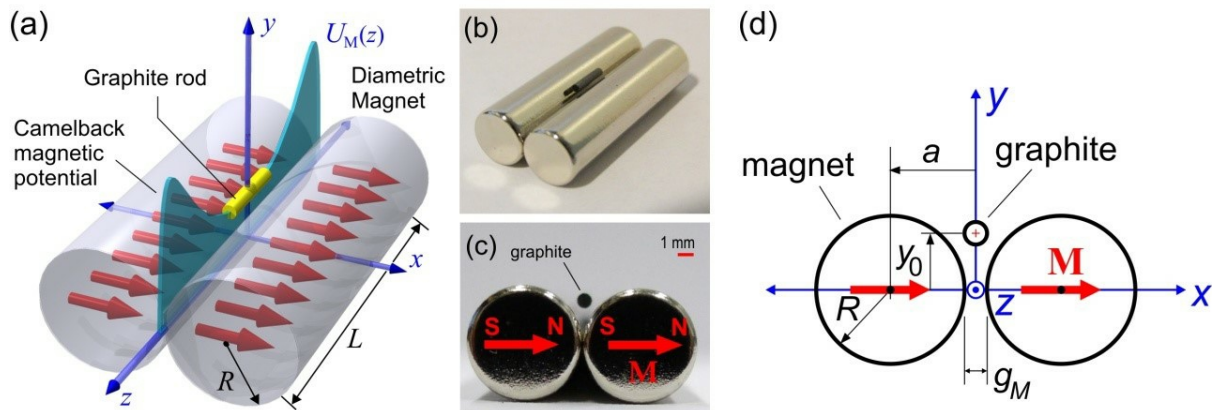


図2. (a) z軸に沿ったらくだの背ポテンシャル(Camelback magnetic potential)を持つ平行直線状双極子トラップのモデル (b) 径向磁石(Diametric Magnet)を用いた実験の配置 (c) 断面図 (d) PDLトラップの概略図. [* Gunawan and Virgus, J. Appl. Phys. 121, 133902 (2017)].

このトラップにグラファイト棒（普通のシャープペンシルの芯）を落としてやると、それは空中に浮いて、ある安定な状態に捕えられる。このようなことが起こるのは、グラファイト棒はx方向では両方の磁石からの反発力を受け、垂直方向（y方向）では磁気反発力と重力が釣り合うことによって高さ y_0 に浮上するためである（図2 d）。長手方向（z方向）では、「ラクダの背」ポテンシャルがグラファイト棒を安定な位置に保持する。

この磁気トラップの「ラクダの背」ポテンシャルは1次元の振動子として働く。グラファイト棒をz軸方向に少し押しやると、図3 aに示したような減衰振動を行う。このPDLトラップは高感度の地震計として使うことができる。地面が揺れてもグラファイト棒はそのままの位置に留まろうとするので、相対的変位（図3 b）は「地震」の信号となる。この磁気トラップはまた、高感度の傾斜計としても使うことができる。このトラップを少し傾けただけで、グラファイト棒は摩擦なしにかなり動くことになる。

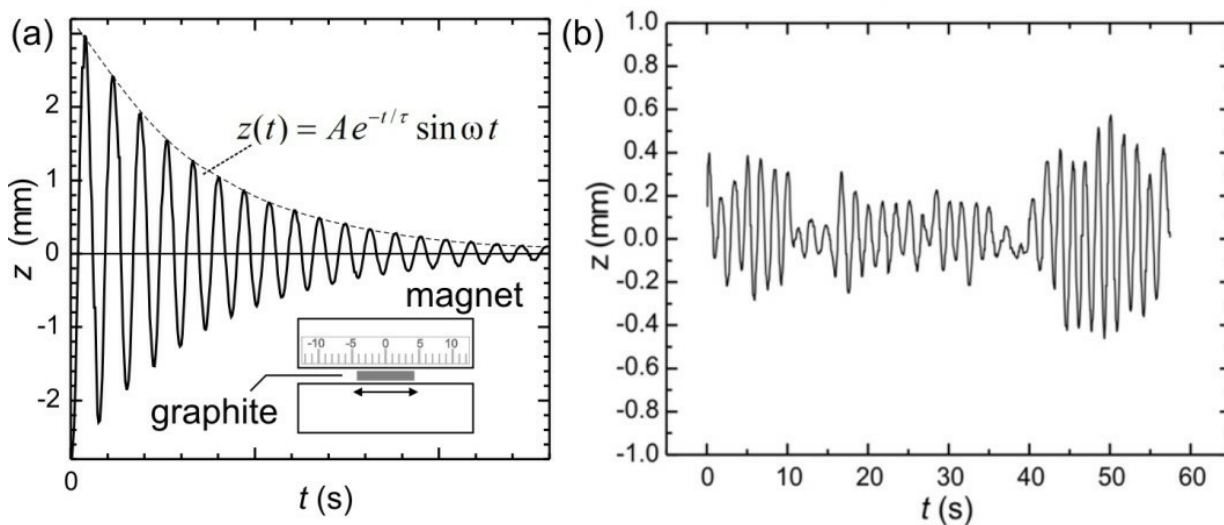


図3 (a) 「ラクダの背」ポテンシャルに平行な方向のグラファイト棒の減衰振動。(b) 地震計としての応用。PDLトラップによる地面の振動の検出。

次に、このPDLトラップの物理と応用を以下の2つの節に分けて調べることにしよう。

A: 基本的特性

- (1) 磁石の磁化 M の決定 (2.5 pt.)
- (2) 磁気浮上と磁化率 χ (1.0 pt.)
- (3) 「ラクダの背」ポテンシャルによる振動と磁化率 χ (1.0 pt.)
- (4) 振動子の Q -値と、空気の粘性 μ_A の決定(3.0 pt.)

B: 応用

- (5) PDLトラップを用いた地震計 (0.5 pt.)
- (6) PDLトラップを用いた傾斜検出器 (2.0 pt.)

B. 実験装置

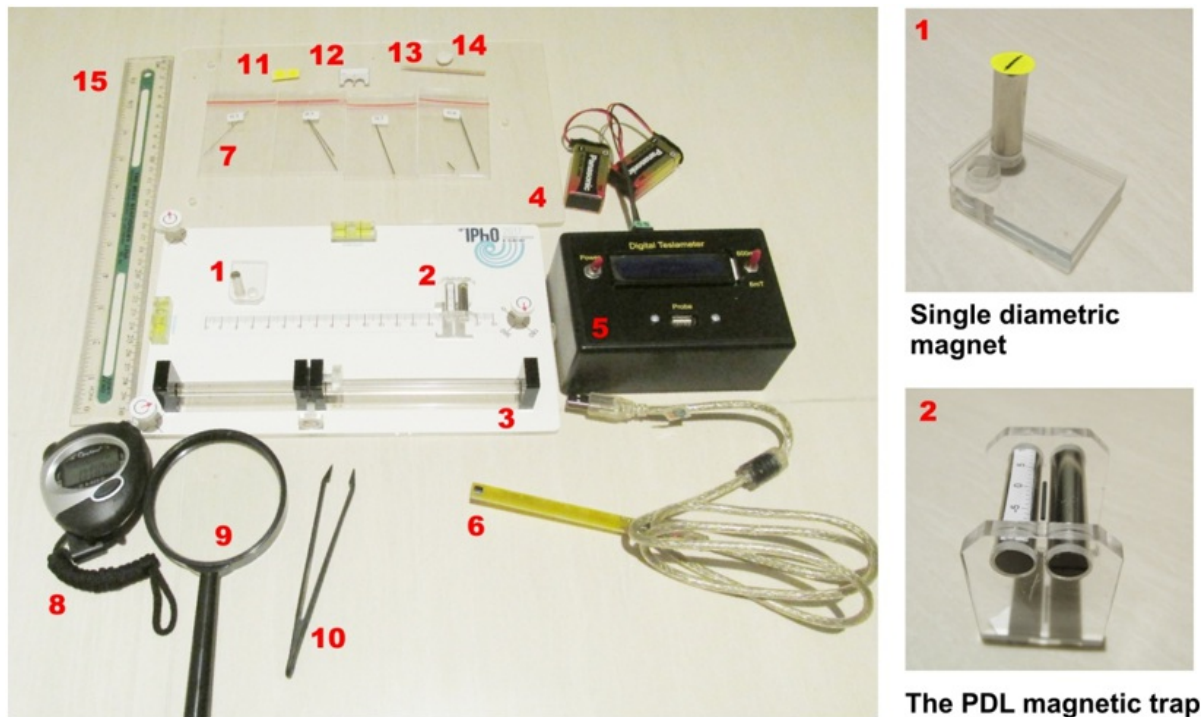


図4. 実験器具の一覧。右上は一個の径向磁石(Single diametric magnet)、右下はPDL磁気トラップ(The PDL magnetic trap)。

1. 単一の径向磁石(Single diametric magnet)。磁化方向を示すように黄色のシールを貼る。
2. PDL磁気トラップ(浮上したグラファイトが写真で示されている)。組み上がったセットから磁石を外さないこと。
3. 3つのネジを備えたプラットフォーム
4. 底に敷く板
5. 磁場測定器 (Tesla meter)。電池は磁気測定器に電力を供給するするため。ケーブルはホールセンサーと磁場測定器をつなぐためのもの。
6. 磁場測定器のホールセンサー
7. 4つの直径 (HB/0.3, HB/0.5, HB/0.7, HB/0.9) のグラファイト棒 (シャープの芯)。ここで、数字はおおよその直径(mm)を表す。たとえばHB/0.5の直径はおおよそ0.5mmである。正確な直径は「定数とデータ」を参照せよ。グラファイト棒は適宜求められた長さに切る必要がある。
8. ストップウォッチ
9. 虫眼鏡

Japan

10. ピンセット(静電防止型)
11. 黄色くて丸いステッカー：単一の磁石の磁化の方向を示すため
12. グラファイトの浮上している高さをはかるために挿入する定規
13. グラファイト棒を動かすためのつまようじ
14. 単一の磁石をプラットフォームに固定するための弱い粘着パテ
15. 定規

指示と注意：

1. 単一の磁石とPDLトラップ（2個の磁石を組みあげたもの）はお互いに近づけないこと。互いに衝突して割れることがある。
2. 電池を節約するため、使用しない時はテスラメーターの電源を切ること。
3. 底に敷く板（部品4）から注意して部品7,11~14を取り外しなさい。そしてプラットフォーム（部品3）を底に敷く板の上に置け。
4. プラットフォームの水平度を3つのねじを使って調節することができる。

定数とデータ：

径向磁石の半径	：	$R = 3.2 \text{ mm}$
径向磁石の長さ	：	$L = 25.4 \text{ mm}$
PDLトラップのすき間	：	$g_M = 1.5 \text{ mm}$
グラファイトの質量密度	：	$\rho = 1680 \text{ kg/m}^3$
グラファイト棒「HB/0.3」の直径	：	$d = 0.38 \text{ mm}$
グラファイト棒「HB/0.5」の直径	：	$d = 0.56 \text{ mm}$
グラファイト棒「HB/0.7」の直径	：	$d = 0.70 \text{ mm}$
グラファイト棒「HB/0.9」の直径	：	$d = 0.90 \text{ mm}$
室温	：	$T = 298 \text{ K}$
真空の透磁率	：	$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
ボルツマン定数	：	$k_B = 1.38064852 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
重力加速度の大きさ	：	$g = 9.8 \text{ m/s}^2$

Japan

C. 実験と問題

A. PDLトラップの基本的特性

[1] 磁石の磁化 M の決定 (2.5 pt.)

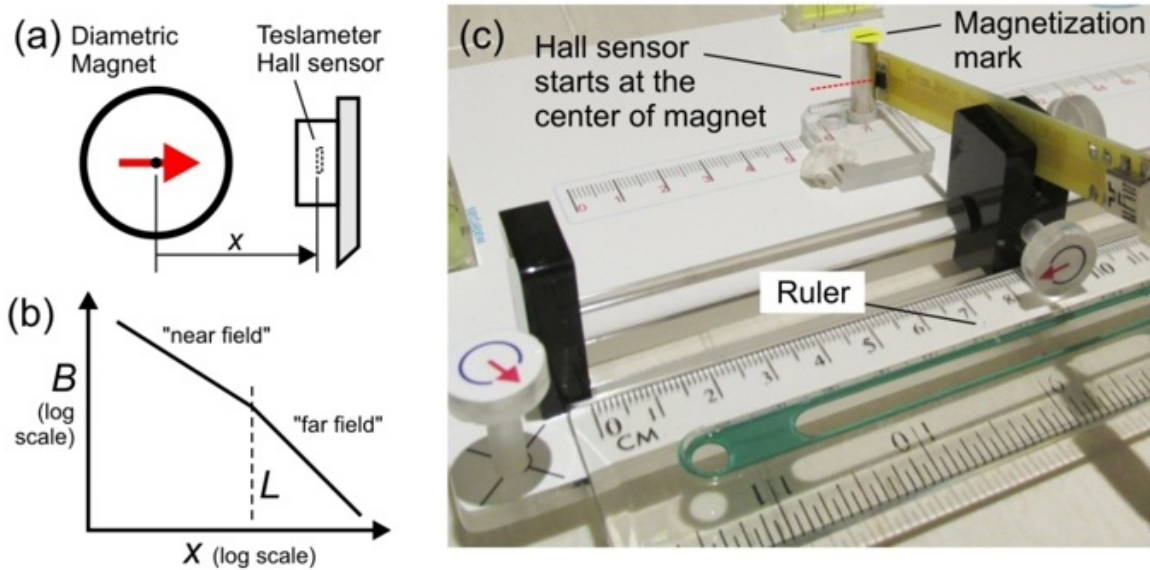


図5 (a) 磁場の測定. (b) 磁場の距離依存性(両対数プロット) 近距離 (near field) と遠距離 (far field) で距離依存性が異なる (c) セットアップ。磁場センサーは磁石の中央から測定をはじめめる (Hall sensor starts at the center of magnet.)

磁気トラップの強度は磁石の全磁気双極子モーメント m に依存する。全磁気双極子モーメントは磁化 M に依存する。磁化 M は単位体積当たりの磁気双極子の大きさであって、磁性体固有の性質である。径向磁石については、

$$M = \frac{m}{\pi R^2 L} \quad (1)$$

である。ここで、 R は磁石の半径、 L は磁石の長さである (「定数及びデータ」を参照)。本実験問題において、全ての磁石の M の値は同じと考える。ここでは磁場の空間分布のグラフを描き、PDLトラップに用いられている径向磁石の M を決定する。

一個の径向磁石を用い、実験装置を図5(c)のように配置する。磁石の磁化の向きは (図6aに示されたように) ホール (磁場) センサーの方に向くようにする。テスラメーターを用いて x 軸に沿った磁場の強度を測定せよ。 x に対する磁場 B のグラフは2つの領域からなる。近接場すなわち、およそ $x \leq 16$ mm の「直線状双極子」極限で磁場は下記の距離依存性をもつ。

$$B_I(x) = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3 L} \quad (2)$$

x 軸は図6(a)のように径向磁石の磁化の軸に沿ってとり、 x は径向磁石の中心軸から磁気センサーのチップ内にあるホール素子センサーまでの距離を表す。 x の値のオフセットの問題については図6(b)を参照せよ。

ここでは、「近接場」の領域でのみ測定をおこなう。

A.1	近くに磁石がない場合のテスラメーターのゼロオフセット B_0 を記録しなさい。これ以降の磁場の測定ではこの値を差し引くこと。	0.1 pt.
A.2	「近接場」の領域 ($7 \leq x \leq 16$ mm)において、 x に対する磁場 B を測定せよ。 x は磁石の中心から測った距離とすること。解答用紙に結果を記録しグラフを書きなさい。下の「ヒントと指示」に従うこと。	1.15 pt.
A.3	指数 p の値を決定するため、実験データを使いなさい。	0.75 pt.
A.4	磁石の磁化 M を求めよ。	0.5 pt.

ヒントと指針:

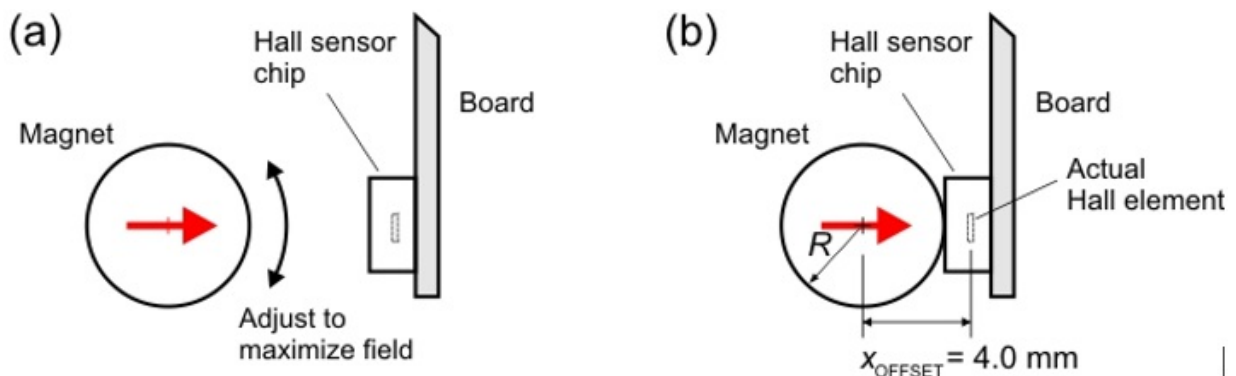


図6. 磁場の測定 (a) 磁場が最大になるよう調整する (Adjust to maximize field) (b) オフセット (offset) の図

1. **使用していない時はテスラメーターの電源を切り、電池を節約すること!**
2. テスラメーターでは各データ点に対し約2秒待ってから数値を読むこと。
3. x は磁石の中心から測った距離であることに注意。磁石の半径は $R = 3.2$ mmである。
4. 図5(c)の配置での測定を推奨する。
5. 図6(a)を見て磁石の回転の向きを調整し、磁場がホールセンサーの方を向くようにすること。それにより磁場が最大となる。磁石の磁場の向きに印を付けるのに黄色の丸いシールを用いるとよい。
6. ホールセンサーが磁石に接触しているとき、磁石の中心と実際のホールセンサー素子の距離はオフセット値 $x_{\text{OFFSET}} = 4\text{mm}$ となる。
7. ホールセンサーでの測定は $x = 5$ mmから始めること! センサーが磁石に接触している時($x = 4$ mm)のデータは使用しないこと。センサーの指示が飽和していたり接触の間にプローブが曲っていたりする場合がある。

[2] 磁気浮上効果と磁化率 χ (1 pt.)

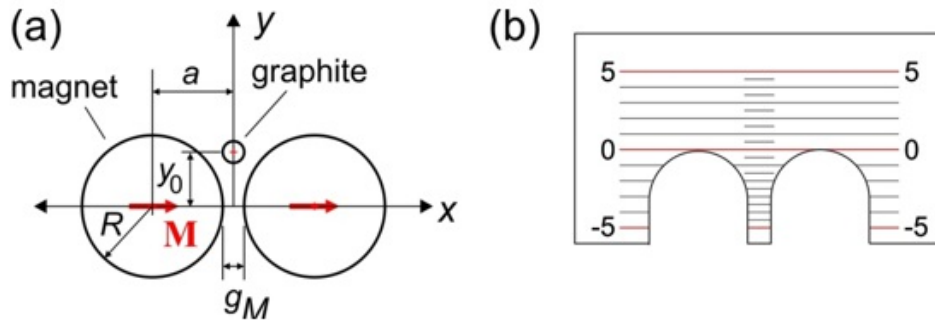


図7. (a) PDLトラップ上での磁気浮上効果. (b) 浮上している高さ y_0 を図るための定規.

PDLトラップによって磁気浮上効果も実現させることができる。図7aに示すようにグラファイトは高さ y_0 の位置のトラップの中央で浮上する。グラファイトは磁石から力 $F_M(y_0)$ の反発力を受ける。この力は磁化率 χ と棒の高さ y_0 に依存する。磁化率はある物質が印加磁場に対してどれだけ磁化するかを表す量であり、次の式を満たす。 $\mu = (1 + \chi)\mu_0$ 。ここで、 μ は物質の透磁率である。PDLトラップ上のグラファイト棒に作用する磁気反発力は次の式で与えられる。

$$F_M(y_0) = -\frac{\mu_0 M^2 \chi V_r}{2} \frac{R^4}{a^3} f\left(\frac{y_0}{a}\right) \quad (3)$$

$F_M(y_0)$ が正のとき、力は上向きであり式には負符号がついていることに注意せよ。ここで、 V_r はグラファイト棒の体積であり、 M は(問題1で得た)磁石の磁化であり、 a は次のように与えられる磁石中心の位置である。 $a = R + g_M/2$ (図7(a)を参照。) $g_M = 1.5\text{mm}$ はマグネット間のギャップを表す。 $f(u)$ は次で与えられる、トラップ上の磁気反発力を表すための無次元量を与える関数である。

$$f(u) = \frac{4u(3-u^2)(1-u^2)}{(1+u^2)^5} \quad (4)$$

A.5	長さ8mmのグラファイト棒HB/0.5をトラップ上に丁寧に置け。その時の棒の浮上している高さ y_0 を測定しなさい。(図7(a)を参照。) ヒント：図7(b)に示されている定規を使いなさい。グラファイト棒の位置を読むために磁石に定規を押し付けて測りなさい。	0.1 pt.
A.6	A.5での結果を使ってグラファイト棒の磁化率 χ を決定せよ。	0.8 pt.
A.7	グラファイトは以下のどの磁氣的性質を持った物質か？一つ選びなさい。(i)強磁性(ii)常磁性(iii)反磁性	0.1 pt.

[3] 「ラクダの背」ポテンシャル中の振動と磁化率 χ (1 pts)

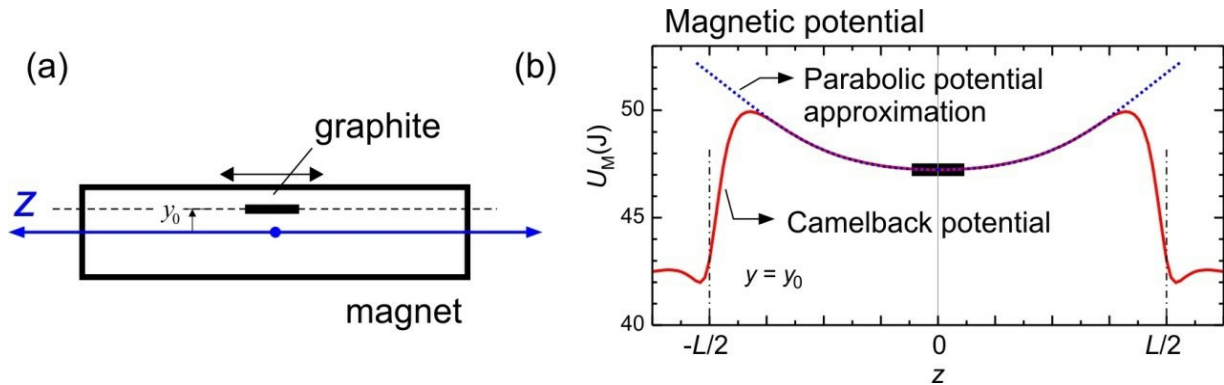


図8. (a) 高さ y_0 におけるグラファイトの振動。(b) PDLトラップの「ラクダの背」ポテンシャル(Camelback potential)と、その放物線近似 (Parabolic potential approximation)。

図8に示したPDLトラップの「ラクダの背」磁気ポテンシャル中の振動を利用して磁化率 χ をより精密に決定することにする。振動振幅が小さい ($z < 4\text{mm}$) 範囲では、磁気ポテンシャルを放物線で近似することができる (図8 bでは点線で示してある)。

$$U_M = \frac{1}{2}k_z z^2 \quad (5)$$

ここで、 k_z はポテンシャルのバネ定数であり、 z はグラファイト棒の重心の変位である。このバネ定数 k_z は磁石の磁化 M (問1で求めた) と磁化率 χ によって

$$k_z = -C_1 \mu_0 \chi M^2 V_r \quad (6)$$

と表される。ここで μ_0 は透磁率、 V_r はグラファイト棒の体積、 $C_1 = 198.6 \text{ /m}^2$ はこの磁気トラップに固有の定数である。

グラファイト棒を磁気トラップの中央にそっと置きなさい。ネジのツマミを回して装置台の水平度を調整しなさい。爪楊枝でグラファイト棒を横にずらせてやることによって、「ラクダの背」ポテンシャルに平行な振動を誘起しなさい。

A.8	「HB/0.5」のグラファイトを長さ $l = 8\text{mm}$ にしたものを振動させてみなさい。振動振幅は小さい範囲 ($A < 4\text{mm}$) に留めなさい。振動周期を決定しなさい (振動は時間が経つにつれて減衰するが、減衰効果は無視しなさい)。	0.2 pt.
A.9	この振動を用いて、グラファイトの磁化率 χ を計算しなさい。	0.8 pt.

[4] 振動子のQ値と空気の粘性の見積もり (3 pt.)

空気抵抗によるグラファイト棒の振動の減衰を観測し、グラファイト棒のサイズ(直径と長さ)および空気の粘性 μ_A によって空気抵抗がどのように変化するかを理解したい。棒の運動は図3に示すように減衰振動 $z(t) = Ae^{-t/\tau} \sin \omega t$ によってモデル化することができる。ここで A は初期振幅、 $\omega = 2\pi f$ は角振動数、 t は時刻である。振幅は時間とともに減衰し、 $\exp(-t/\tau)$ の因子がかかる。ここで τ は減衰の時定数である。ここで振動のQ値を $Q = \omega_0 \tau / 2$ と定義する。 $Q > 0.5$ のときは減衰振動、 $Q = 0.5$ のときは臨界減衰、 $Q < 0.5$ のときは過減衰がそれぞれ生じる。Q値はPDLトラップを使った地震計や傾斜測定器の設計に重要である。

円柱棒を長い回転楕円体で近似することによって、減衰の時定数 τ を計算することができ、ストークス粘性力を計算することができる。減衰の時定数 τ は次のように与えられる:

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{\rho r^2}{\mu_A} \ln \left(0.607 \times \frac{l}{r} \right) \quad (7)$$

ここで ρ , r , l はそれぞれ、グラファイト棒の質量密度、半径、長さを表し、 μ_A は空気の粘性である。このモデルを用いて空気の粘性を見積もりたい。

A.10	減衰振動の時定数 τ を決める必要がある。どのようにしたら、簡単な方法で τ を測ることができるか。その概略を述べよ。	0.5 pt.
A.11	棒の長さを8mmに固定し、全ての直径の棒を使って、減衰振動の実験を実行せよ。それぞれの棒に対して、減衰の時定数 τ を決定せよ。	1.5 pt.
A.12	空気の粘性 μ_A を決定せよ。	1.0 pt.

SECTION B. 測定器への応用

[5] PDLトラップ地震計 (0.5 pt.)

このPDLトラップを使って地震計を設計することを考えよう。地震計に応用するために、非常に高い感受率、つまりは非常に低いレベルの「ノイズ・フロア」が求められる。ここでいうノイズ・フロアとは、地震計が検出できる最低の加速度のことであり、 $(\text{m}/(\text{s}^2 \text{Hz}^{0.5}))$ の単位で) 次のように与えられる。:

$$a_n = \sqrt{\frac{4k_B T \omega}{Q m_R}} \quad (8)$$

ここで、 k_B はボルツマン定数であり、 T は温度(定数とデータをみよ)、 m_R は棒の質量である。全てSI単位系である。問題4では、いくつかの直径のグラファイトについて τ を求めた。地震計として一番良いと考えられるものを一つ選びなさい。

B.1	どの直径の棒を選ぶのが良いか?	0.2 pt.

B.2	選んだ棒について、地震計のノイズ・フロア a_n を計算せよ。	0.3 pt.
------------	-----------------------------------	---------

[6] PDLトラップを利用した傾斜測定器 (2 pt.)

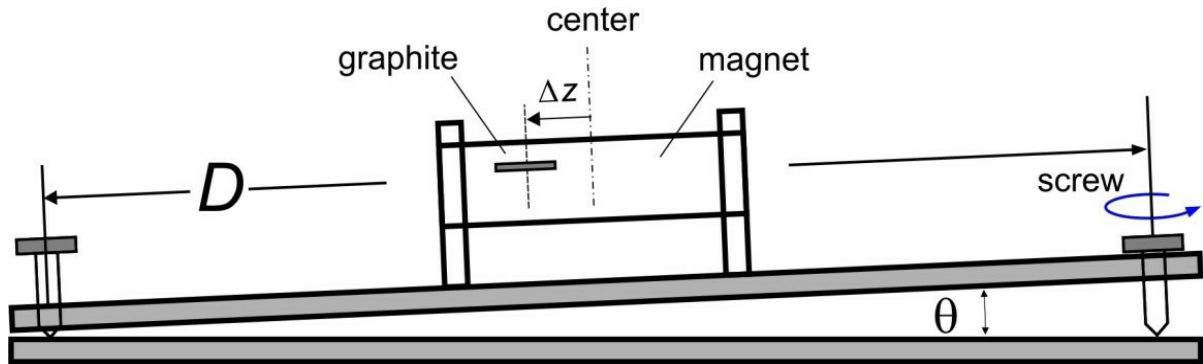


図9. 傾斜測定器としてのPDLトラップシステム. ネジ(Screw)によって傾斜を調節する。

PDLトラップを、火山をモニターするための高感度傾斜測定器として利用することを考える。地面の傾斜の変化を、模擬的にネジ (Screw) の回転によって再現することとし、ネジのピッチ S を決定する。ここで S はネジを1回転した時の高さの変化を表す。トラップ中のグラファイト棒の位置変化によって傾斜角を精密に測定できることを示す。

この実験には、長さ $l=8\text{mm}$ のHB/0.5グラファイト棒を用い、トラップの中央位置から始めなさい。問3と同様、「ラクダの背」ポテンシャルは放物線で近似できるものとしなさい。

B.3	位置変化 Δz と、ネジのピッチ S およびネジの回転数 N との関係の理論式を導きなさい。	0.5 pt.
B.4	ネジをそっと回転させて、回転数 N とグラファイト棒の位置変化 Δz とのグラフを求め、そこからネジのピッチ S の値を決定しなさい。	1.25 pt.
B.5	地面の傾斜が変化した際にそれを楽に読み取れるためには、グラファイト棒が新たな平衡位置にできるだけ速やかに落ち着く（長時間にわたって振動が持続するのではなく）ことが望ましい。そのために最適な傾斜測定器のQ値はいくらか。	0.25 pt.