ダークマター

ダークマターは、フリッツ・ツヴィッキーが、かみのけ座銀河クラスター（およそ1000個の銀河からなる銀河クラスター）の動的ふるまいに関する自らの観測に基づいて、その存在に言及したのが最初である。

ツヴィッキーはビリアル定理を用いてその銀河クラスターの質量を計算した。１個の惑星が太陽の周りを円軌道を描いて公転するような単純な太陽系の場合、ビリアル定理は、惑星の運動エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーとの間の厳密な関係として現れる。それに対して、ある種の相互作用によって多数の粒子が互いに束縛されているような一般の系では、ビリアル定理は全運動エネルギーの時間平均と全ポテンシャルエネルギーの時間平均との間の関係を与える。

1933年にツヴィッキーは、かみのけ座銀河クラスターの周縁付近の銀河の速度の観測から、そのクラスターが観測で見えているもの（つまり銀河たち）よりも全体として大きな質量を持っていることを見出した。すなわち、観測された大きな速度を説明するためには何か隠れた質量が存在しなければならないのである。その隠れた質量はダークマターである。

以下では、各々の銀河の質量は観測で見える質量にその銀河とともに運動するダークマターの質量を加えたものであるとし、ダークマターと観測で見える物質との相互作用は重力のみであると仮定せよ。

A. 銀河クラスター

半径Rの球内に一様に分布した、多数（N個）の銀河およびダークマターからなる銀河クラスター（集団）を考えよう。クラスター全体(銀河とダークマター)の質量をMとする。1つの銀河あたりの平均質量(銀河中の見える質量とダークマターの質量の和)をmとし、クラスター全体は熱力学的な平衡状態にあるとする。

A.1	クラスター内の物質の分布は連続的であると仮定する。クラスター全体の重力ポテンシャルのエネルギーをM, Rで表せ。	1.0 pt.

宇宙膨張によって、遠くにある天体は地球にいる観測者から、天体と観測者との間の距離に応じた速度で離れていく。　銀河クラスター内のi番目の銀河のIA型超新星から放射される特定のライマン（水素原子が出す輝線）周波数がf_i であることが観測された（i = 1,...,N）。地球上においてこれらに対応するライマン周波数はf_0 である。

A.2	銀河クラスター全体が地球から遠ざかる平均の速さV_{cr}を、f_i　$(i = 1, \ldots, N)$,　f_0,Nで表せ。個々の銀河の速さは光速cに比べて非常に小さいことに注意せよ。	0.5 pt.
A.3	クラスター中心に対する銀河たちの相対速度の分布が等方的(方向に依らない)であるものと仮定し、クラスター中心に対する銀河の運動の二乗平均速度v_{rms}（二乗したものを平均してルートをとった速度）を決定せよ。N, f_i　$(i = 1, \ldots, N)$, f_0で表すこと。この結果を用いて、クラスター中心に対する銀河の運動の、一つの銀河あたりの平均運動エネルギーを求めよ。v_{rms}とmで表すこと。	1.5 pt.

クラスターの全質量(銀河とダークマター)を求めるためにビリアル定理を用いることができる。ビリアル定理に

よれば、相互作用が保存力であるような多粒子系に対して

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t$$

が成り立つ。ここで、$\langle K \rangle_t$ は全運動エネルギーの時間平均、$\langle U \rangle_t$ は全ポテンシャルエネルギーの時間平均、 γ はポテンシャルの関数形のみに依る無次元定数である。この定理は、互いに相互作用する多くの粒子からなる系においてそれぞれの粒子の位置や運動量の大きさが有限であり、従って

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

が有限であると仮定することにより導かれる。

A.4	$d\Gamma/dt$ の長時間にわたる時間平均が0になること、つまり$\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$を用いて、重力相互作用の場合にビリアル定理中の γの数値を決定せよ。(ヒント：まずは非常に少数の銀河からなる系について考えてΓ の和を取ることで、答えを予想してみよ。)	1.7 pt.
A.5	前問で求めた結果より，クラスター中のダークマターの全質量をN, m_g, R およびv_{rms}の関数として決定せよ。m_g は銀河の観測で見える物質の分の平均質量である。ダークマターの二乗平均速度が銀河でのそれ(v_{rms})と同じであることに注意せよ。	0.5 pt.

B. 銀河中のダークマター

ダークマターは銀河の中および周辺にも存在する。可視半径がR_gの球状銀河を考える。（ここで可視半径R_gとは十分に多数の星が観測される一番外側の端までの半径のことであるが、R_gよりも外側の領域にもごく少数の星が分布していることに注意せよ。）この銀河の星々は平均質量m_sの点粒子であると仮定せよ。星々は、銀河中に数密度nで一様分布しているとし、それらは円軌道を描いているものとする。

B.1	この銀河が星のみによって構成されているものとした場合の、ある星の速さ$v(r)$をその銀河中心からの距離の関数として求め、$r < R_g$ および $r \geq R_g$ について$v(r)$をプロットせよ。	0.8 pt.

ダークマターの存在は、銀河回転のグラフ、すなわち観測から得られる$v(r)$のプロット、から示唆される。下図は、銀河回転グラフの典型的な形状を示している。簡単のため、この図の$r < R_g$の領域で$v(r)$は線形であり、$r \geq R_g$の領域で$v(r)$は一定値 v_0であると近似せよ。

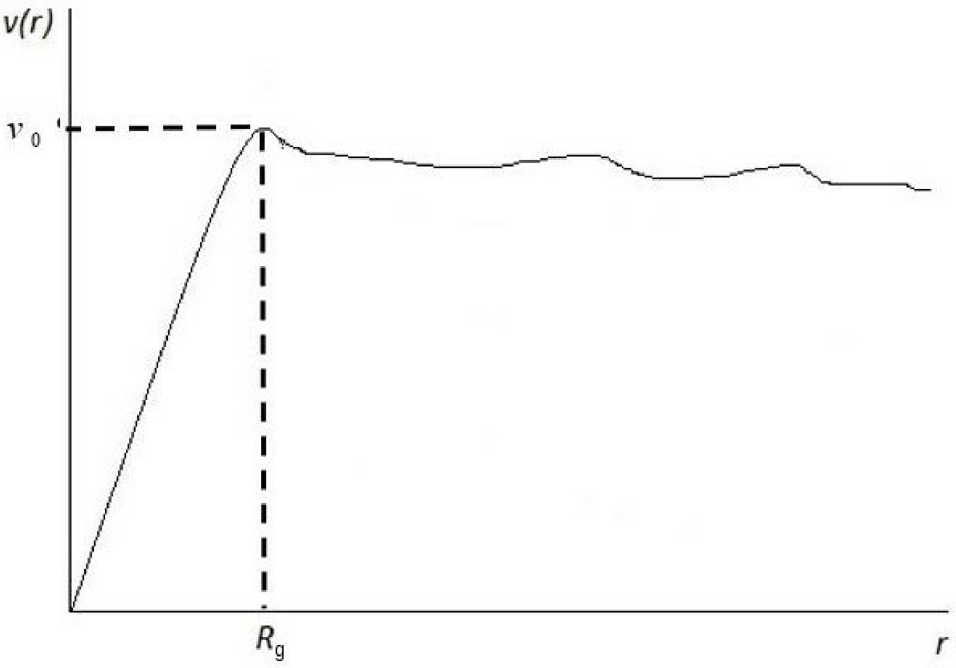

図1 ある銀河での銀河回転のグラフ

B.2	この銀河の中心を中心とした半径R_gの球の内部にある全質量m_R (星とダークマター)を、v_0とR_gを用いて求めよ。	0.5 pt.

B.2の図(図1)とB.1で求められたグラフとの食い違いはダークマターの存在を示すものである。

B.3	$r < R_g$ および $r \geq R_g$について、r, R_g, v_0, n, m_sの関数としてダークマターの質量密度を決定せよ。	1.5 pt.

C. 星間ガスとダークマター

以下では、若い銀河を考えよう。若い銀河では、星間ガスとダークマターの質量が支配的であって、星々の質量は無視できる。星間ガスは、質量m_pの同一粒子からなると仮定する。星間ガスの数密度 $n(r)$ と温度 $T(r)$ は銀河中心からの距離 r に依存する。多くの物理的なプロセスがガスのなかで起こるが、この問いでは銀河からの重力による引力とガスの圧力が流体静力学的に平衡な状態にあると仮定して良い。

C.1	星間ガスの圧力勾配 dP/dr を、 $m'(r)$, r および $n(r)$ を用いて表わせ。ここで $m'(r)$ は銀河中心を中心とする半径 r の球内の星間ガスとダークマターの質量の和である。	0.5 pt.

C.2	星間ガスが理想気体であると仮定し、$m'(r)$を、$n(r)$, $T(r)$ およびそれらの r での微分を用いて求めよ。	0.5 pt.

次に簡単のため、星間ガスは温度 T_0 の等温で分布しているとし、星間ガスの数密度は以下のように与えられるものとする。

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

,

ここで α と β は定数である。

C.3	銀河内のダークマターの質量密度を r の関数として求めよ。	1.0 pt.