A. 銀河クラスター

A.1 クラスター内の物質の分布は連続的であると仮定する。クラスター全体の重力ポテンシャルのエネルギーをM, Rで表せ。	1.0pt
質量が$M(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$である球体と球の中心から距離$r$にある質量$dm$の粒子からなる系のポテンシャルエネルギーは， $$dU=-G\frac{M(r)}{r}dm$$ で与えられる。	0.2pt
したがって半径Rの球では， $$U=-\int_0^R G\frac{M(r)}{r}dm=-\int_0^R G\frac{4\pi r^3\rho}{3r}4\pi r^2\rho dr=-\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2R^5$$	0.6pt
今，系の全質量である $$M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$ を用いて， $$U=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$ を得る。	0.2pt

A.2 銀河クラスター全体が地球から遠ざかる平均の速さV_{cr}を，$f_i(i=1,\cdots,N), f_0, N$で表せ。個々の銀河の速さは光速$c$に比べて非常に小さいことに注意せよ。	0.5pt
ドップラー効果より， $$f_i=f_0\frac{1}{1+\beta}\approx f_0(1-\beta)$$ を得る。ここで$\beta=v/c, v\ll c$とした。したがって，放射状に遠ざかっていくi番目の銀河の速さは， $$V_{ri}=-\frac{f_i-f_0}{f_0}c$$ と求まる。近似を用いない他の解答は， $$f_i=f_0\frac{1}{1+\beta}$$	0.2pt

$$V_{ri} = c\left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right)$$	
銀河クラスター内の全ての銀河は宇宙膨張によって一緒に遠ざかっていく。したがってクラスター内にあるN個の銀河の遠ざかっていく速さの平均は $$V_{cr} = -\frac{c}{Nf_0}\sum_{i=1}^{N}(f_i - f_0) = -\frac{c}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_i}{f_0} - 1\right)$$ と求まる。近似を用いない他の解答は， $$V_{cr} = \frac{c}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right) = \frac{cf_0}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_0}\right)$$	0.3pt

A.3 クラスター中心に対する銀河たちの相対速度の分布が等方的（方向に依らない）であるものと仮定し，クラスター中心に対する銀河の運動の二乗平均速度v_{rms}（二乗したものを平均してルートをとった速度）を決定せよ。$N, f_i(i = 1,\cdots,N), f_0$で表すこと。この結果を用いて，クラスター中心に対する銀河の運動の，一つの銀河あたりの平均運動エネルギーを求めよ。v_{rms}とmで表すこと。	1.5pt
A.2 における遠ざかる銀河の速さV_iは，銀河の速度の 3 成分のうち 1 成分のみしか考えていないものであった。そのことを踏まえると，クラスターの中心に対する各銀河の速さを 2 乗したものの平均は， $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{V}_i - \vec{V}_c\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{(V_{xi} - V_{xc})^2 + \left(V_{yi} - V_{yc}\right)^2 + (V_{zi} - V_{zc})^2\right\}$$ と求まる。等方的であるという仮定より， $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{V}_i - \vec{V}_c\right)^2 = \frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N}(V_{ri} - V_{cr})^2$$ が得られる。	0.5pt
したがって，クラスターの中心に対する銀河の速さの 2 乗平均速度は，	0.7pt

<table>
<tr><td>

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N}(V_{ri} - V_{cr})^2} = \sqrt{\frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N}\left({V_{ri}}^2 - 2V_{ri}V_{cr} + {V_{cr}}^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}{V_{ri}}^2\right) - 3{V_{cr}}^2}$$

ここで$V_{cr} = \sum_{i=1}^{N} V_{ri}/N$を用いた。A.2 より

$$v_{rms} = c\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_i}{f_0} - 1\right)^2\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_i}{f_0} - 1\right)\right)^2}$$

これを整理して

$$v_{rms} = \frac{c\sqrt{3}}{f_0 N}\sqrt{\left(N\sum_{i=1}^{N}{f_i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N}f_i\right)^2}$$

が得られる。近似を用いない他の解答は,

$$v_{rms} = c\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right)^2\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_0}{f_i} - 1\right)\right)^2}$$

を整理して,

$$v_{rms} = \frac{cf_0\sqrt{3}}{N}\sqrt{\left(N\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{f_i}\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i}\right)^2}$$

がある。
</td><td></td></tr>
<tr><td>
クラスター中心に対する銀河の運動エネルギーの平均は,

$$K_{ave} = \frac{m}{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{V}_i - \vec{V}_c\right)^2 = \frac{m}{2}{v_{rms}}^2$$

と求まる。
</td><td>0.3pt</td></tr>
</table>

A.4 $d\Gamma/dt$ の長時間にわたる時間平均が 0 になること、つまり$\langle d\Gamma/dt\rangle = 0$を用いて、重力相互作用の場合にビリアル定理中の γ の数値を決定せよ。(ヒント：まずは非常に少数	1.7pt

<table>
<tr><td>の銀河からなる系について考えてΓの和を取ることで、答えを予想してみよ。）</td><td></td></tr>
<tr><td>

$d\Gamma/dt$ の時間平均は，

$$\langle\frac{d\Gamma}{dt}\rangle_t = 0$$

となる。いま，

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p_i}\cdot\vec{r_i} = \sum_i \frac{d\vec{p_i}}{dt}\cdot\vec{r_i} + \sum_i \vec{p_i}\cdot\frac{d\vec{r_i}}{dt}$$

$$= \sum_i \vec{F_i}\cdot\vec{r_i} + \sum_i m\vec{v_i}\cdot\vec{v_i} = \sum_i \vec{F_i}\cdot\vec{r_i} + 2K$$

ここで，Kは系の全運動エネルギーである。

</td><td>0.6pt</td></tr>
<tr><td>

i番目の粒子における重力は他の粒子との相互作用から生じるので，

$$\sum_i \vec{F_i}\cdot\vec{r_i} = \sum_{i,j\neq i}\vec{F_{ji}}\cdot\vec{r_i} = \sum_{i<j}\vec{F_{ji}}\cdot\vec{r_i} - \sum_{i>j}\vec{F_{ij}}\cdot\vec{r_i} = \sum_{i<j}\vec{F_{ji}}\cdot\vec{r_i} - \sum_{j>i}\vec{F_{ji}}\cdot\vec{r_j}$$

$$= \sum_{i<j}\vec{F_{ji}}\cdot(\vec{r_i}-\vec{r_j}) = -\sum_{i<j} G\frac{m_i m_j}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|^2}\frac{\vec{r_i}-\vec{r_j}}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|}\cdot(\vec{r_i}-\vec{r_j})$$

$$= -\sum_{i<j} G\frac{m_i m_j}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|} = U_{tot}$$

他の証明方法：

$$\sum_i \vec{F_i}\cdot\vec{r_i} = \sum_{i,j\neq i}\vec{F_{ji}}\cdot\vec{r_i} = \overrightarrow{F_{21}}\cdot\vec{r_1} + \overrightarrow{F_{31}}\cdot\vec{r_1} + \overrightarrow{F_{41}}\cdot\vec{r_1} + \cdots + \overrightarrow{F_{N1}}\cdot\vec{r_1}$$

$$+\overrightarrow{F_{12}}\cdot\vec{r_2} + \overrightarrow{F_{32}}\cdot\vec{r_2} + \overrightarrow{F_{42}}\cdot\vec{r_2} + \cdots + \overrightarrow{F_{N2}}\cdot\vec{r_2}$$

$$+\overrightarrow{F_{13}}\cdot\vec{r_3} + \overrightarrow{F_{23}}\cdot\vec{r_3} + \overrightarrow{F_{43}}\cdot\vec{r_3} + \cdots + \overrightarrow{F_{N3}}\cdot\vec{r_3}$$

$$+\cdots+\overrightarrow{F_{1N}}\cdot\overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{F_{2N}}\cdot\overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{F_{3N}}\cdot\overrightarrow{r_N} + \cdots + \overrightarrow{F_{NN-1}}\cdot\overrightarrow{r_N}$$

項をまとめて，$\vec{F_{ij}} = -\vec{F_{ji}}$に注意すると，

$$= \overrightarrow{F_{12}}\cdot(\vec{r_2}-\vec{r_1}) + \overrightarrow{F_{13}}\cdot(\vec{r_3}-\vec{r_1}) + \overrightarrow{F_{14}}\cdot(\vec{r_4}-\vec{r_1}) + \cdots$$

$$+\overrightarrow{F_{23}}\cdot(\vec{r_3}-\vec{r_2}) + \overrightarrow{F_{24}}\cdot(\vec{r_4}-\vec{r_2}) + \cdots + \overrightarrow{F_{34}}\cdot(\vec{r_4}-\vec{r_3}) + \cdots$$

$$= \sum_{i<j}\vec{F_{ji}}\cdot(\vec{r_i}-\vec{r_j}) = -\sum_{i<j} G\frac{m_i m_j}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|^2}\frac{\vec{r_i}-\vec{r_j}}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|}\cdot(\vec{r_i}-\vec{r_j})$$

$$= -\sum_{i<j} G\frac{m_i m_j}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|} = U_{tot}$$

が得られる。

</td><td>0.9pt</td></tr>
<tr><td>

したがって，

$$\frac{d\Gamma}{dt} = U + 2K$$

を得る。そして、時間平均を取ることにより

$$\langle\frac{d\Gamma}{dt}\rangle_t = \langle U + 2K\rangle_t = 0$$

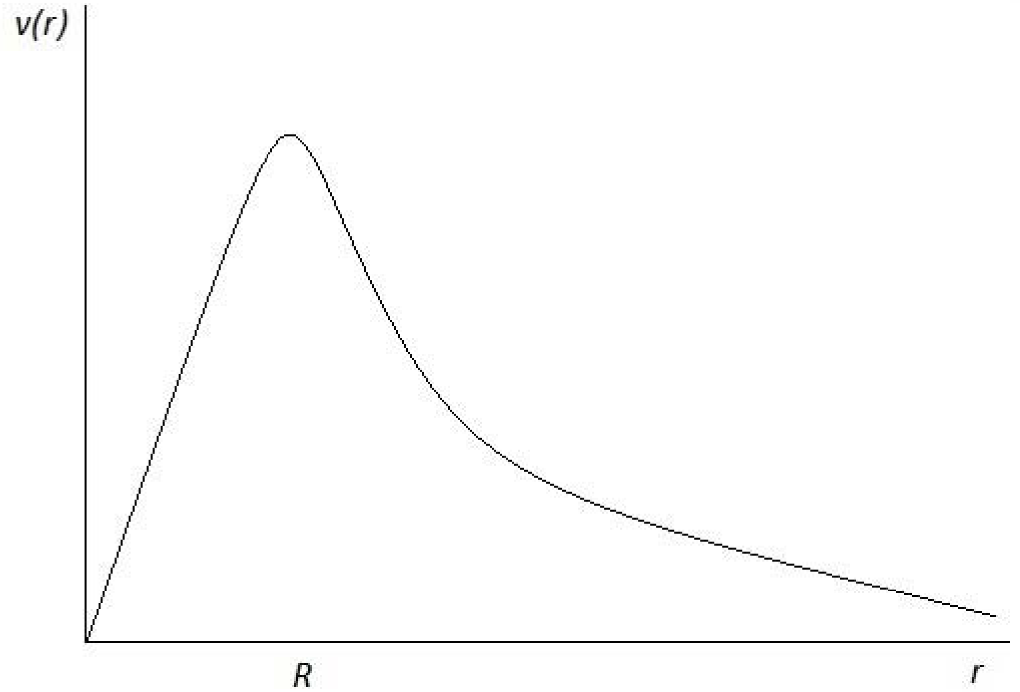
</td><td>0.2pt</td></tr>
</table>

が得られ、これより $$\langle K\rangle_t = -\frac{1}{2}\langle U\rangle_t$$ したがって、 $$\gamma = \frac{1}{2}$$ が求まる。	

A.5 前問で求めた結果より，クラスター中のダークマターの全質量をN, m_g, Rおよびv_{rms}の関数として決定せよ。m_gは銀河の観測で見える物質の平均質量である。ダークマターの二乗平均速度が銀河でのそれ（v_{rms}）と同じであることに注意せよ。	0.5pt
ビリアル定理を用いて，ダークマターが銀河と同じ二乗平均速度を持つことから， $$\langle K\rangle_t = -\frac{1}{2}\langle U\rangle_t$$ $$\frac{M}{2}{v_{rms}}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$ を得る。	0.3pt
これより， $$M = \frac{5R{v_{rms}}^2}{3G}$$	0.1pt
そして，ダークマターの質量は， $$M_{dm} = \frac{5R{v_{rms}}^2}{3G} - Nm_g$$ と求まる。	0.1pt

B. 銀河中のダークマター

B.1 この銀河が星のみによって構成されているものとした場合，ある星の速さ$v(r)$をその銀河中心からの距離の関数として求め，$r < R_g$および$r > R_g$について$v(r)$をプロットせよ。	0.8pt
球の中心から距離rにある粒子にとって重力は半径rの球体内部にある粒子からしか生じない。球体内部の質量m_sの粒子が重心の周りを円軌道で回っているとすると， $$G\frac{m'(r)m_s}{r^2} = \frac{m_s v^2}{r}$$	0.3pt

ここで，$m'(r)$は半径rの球体内部の全質量なので， $$m'(r)=\frac{4}{3}\pi r^3 m_s n$$ したがって， $$v(r)=\sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}r}$$ を得る。	0.2pt
一方で球の外にある粒子に対して同様に考えると， $$v(r)=\sqrt{\frac{4\pi G n m_s R^3}{3r}}$$ が得られる。	0.2pt
プロットしたものは下の図である。  軸が「回転する速さ」と「銀河の中心からの距離」からなる図を描くこと。	0.1pt

B.2 この銀河の中心を中心とした半径R_gの球の内部にある全質量m_R（星とダークマター）を，v_0とR_gを用いて求めよ。	0.5pt
全質量は，	0.5pt

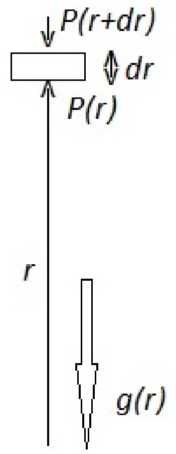
$$G\frac{m'(R_g)m_s}{{R_g}^2}=\frac{m_s{v_0}^2}{R_g}$$ から推論できる。したがって, $$m_R=m'(R_g)=\frac{R_g{v_0}^2}{G}$$ と求まる。	

B.3 $r<R_g$および$r\geq R_g$について，r,R_g,v_0,n,m_sの関数としてダークマターの質量密度を決定せよ。	1.5pt
B.1 での解答に基づいて考えてみると，もし，銀河の質量が見える星々からのみ生じているとすると，銀河回転の曲線は距離$r(\geq R_g)$の外側では$1/\sqrt{r}$に比例して下がっていくはずである。しかし図 1 の曲線では$r\geq R_g$で$v(r)$は一定値を維持していることから, $$G\frac{m'(r)m_s}{r^2}=\frac{m_s{v_0}^2}{r}$$ より，$m'(r)$は$r\geq R_g$においてrに比例する。すなわち$r\geq R_g$において$m'(r)=Ar$（Aは定数）となると推論できる。	0.3pt
一方、図 1 の$r<R_g$ではrに比例する線形になることから，$m'(r)$はr^3に比例する。つまり$m'(r)=Br^3$となると分かる。	0.3pt
したがって、$r<R_g$では $$m'(r)=\int_0^r\rho_t(r')4\pi r'^2dr'=Br^3$$ $$dm'(r)=\rho_t(r)4\pi r^2dr=3Br^2dr$$ したがって、全質量密度は$\rho_t(r)=3B/4\pi$と求まる。	0.2pt
次にBを求める。 $$m_R=\int_0^{R_g}\frac{3B}{4\pi}4\pi r'^2dr'=B{R_g}^3$$ よって, $$B=\frac{m_R}{{R_g}^3}=\frac{{v_0}^2}{G{R_g}^2}$$ したがって、ダークマターの質量密度は $$\rho(r)=\frac{3{v_0}^2}{4\pi G{R_g}^2}-nm_s$$ と求まる。	0.2pt
一方で$r\geq R_g$では, $$m'(r)=\int_0^{R_g}\rho(r')4\pi r'^2dr'+\int_{R_g}^r\rho(r')4\pi r'^2dr'=Ar$$	0.2pt

<table>
<tr><td>真ん中の式の第 1 項は定数なので,
$$\rho(r)4\pi r^2 dr = Adr$$
したがって，$\rho(r) = A/4\pi r^2$と求まる。</td><td></td></tr>
<tr><td>次にAを求める。
$$\int_{R_g}^{r} \frac{A}{4\pi r'^2} 4\pi r'^2 dr' = A(r - R_g) = Ar - m_R$$
$$A = \frac{m_R}{R_g} = \frac{{v_0}^2}{G}$$
また，次のようにAを求めることもできる。
$$G\frac{m'(r)m_s}{r^2} = G\frac{Arm_s}{r^2} = \frac{m_s {v_0}^2}{r}$$
$$A = \frac{{v_0}^2}{G}$$
したがって, ダークマターの質量密度（$r \geq R_g$では$n \approx 0$となることから全質量密度でもある）は,
$$\rho(r) = \frac{{v_0}^2}{4\pi G r^2}$$
と求まる。</td><td>0.3pt</td></tr>
</table>

C. 星間ガスとダークマター

C.1 星間ガスの圧力勾配dP/drを、$m'(r), r$および$n(r)$を用いて表わせ。ここで$m'(r)$は銀河中心を中心とする半径rの球内の星間ガスとダークマターの質量の和である。	0.5pt

面積がA、厚さがΔrである体積の十分小さい円板を考える（下図を見よ）。  静水圧平衡より， $\big(P(r)-P(r+\Delta r)\big)A-\rho g(r)A\Delta r=0$ を得る。	0.3pt
$\dfrac{dP}{dr}=\dfrac{\big(P(r+\Delta r)-P(r)\big)}{\Delta r}=-\rho g(r)=-n(r)m_p\dfrac{Gm'(r)}{r^2}$	0.2pt

C.2 星間ガスが理想気体であると仮定し，$m'(r)$を，$n(r),T(r)$およびそれらのrでの微分を用いて求めよ。	0.5pt
理想気体の状態方程式 $P=nkT$ を用いて（ここで，n は数密度であり$n=N/V$を満たす）， $\dfrac{dP}{dr}=kT(r)\dfrac{dn(r)}{dr}+kn(r)\dfrac{dT(r)}{dr}=-n(r)m_p\dfrac{Gm'(r)}{r^2}$ を得る。これより， $m'(r)=-\dfrac{kT(r)}{Gm_p}\left(\dfrac{r^2}{n(r)}\dfrac{dn(r)}{dr}+\dfrac{r^2}{T(r)}\dfrac{dT(r)}{dr}\right)$ を得る。	0.5pt

C.3 銀河内のダークマターの質量密度をrの関数として求めよ。	1.0pt
仮に等温分布しているとすると$dT(r)/dr=0$となるので， $m'(r)=-\dfrac{kT_0}{Gm_p}\dfrac{r^2}{n(r)}\dfrac{dn(r)}{dr}$	0.2pt

星間ガスの数密度について与えられている式から， $$\frac{1}{n(r)}\frac{dn(r)}{dr} = -\frac{3r+\beta}{r(r+\beta)}$$ $$m'(r) = \frac{kT_0 r}{Gm_p}\frac{3r+\beta}{r+\beta}$$ を得る。	0.2pt
星間ガスの質量密度は， $$\rho_g(r) = n(r)m_p = \frac{\alpha m_p}{r(\beta+r)^2}$$ である。したがって $$m'(r) = \int_0^r \left(\rho_g(r') + \rho_{dm}(r')\right) 4\pi r'^2 dr' = \frac{kT_0 r}{Gm_p}\frac{3r+\beta}{r+\beta}$$ $$m'(r) = \int_0^r \left(\frac{\alpha m_p}{r'(\beta+r')^2} + \rho_{dm}(r')\right) 4\pi r'^2 dr' = \frac{kT_0 r}{Gm_p}\frac{3r+\beta}{r+\beta}$$	0.3pt
これより $$\left(\frac{\alpha m_p}{r(\beta+r)^2} + \rho_{dm}(r)\right) 4\pi r^2 dr = \frac{kT_0}{Gm_p}\frac{3r^2+6r\beta+\beta^2}{(r+\beta)^2} dr$$ $$\rho_{dm}(r) = \frac{kT_0}{4\pi Gm_p}\frac{3r^2+6r\beta+\beta^2}{(r+\beta)^2 r^2} - \frac{\alpha m_p}{r(\beta+r)^2}$$ を得る。	0.3pt

Total　10.0pt