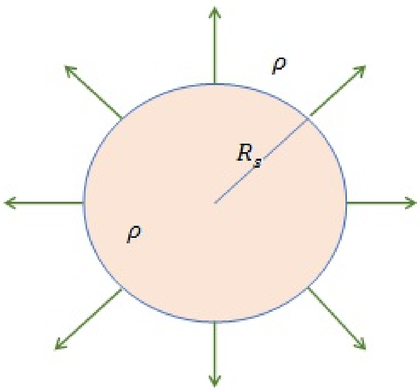
宇宙のインフレーション

地球から観測される銀河の相対運動により、実際に観測される銀河のスペクトルの波長はもともとの波長からずれる。これは電磁波のドップラー効果として知られている。複数の銀河を調べると、波長のシフトはランダムに分布するのではないかと予想される。つまり、ある銀河の波長は正の方向にシフトし（赤方偏移）し、別の銀河の波長は負の方向にシフトする（青方偏移）すると予想できるわけだ。しかし実際に測定してみると、地球から近い銀河の集団については例外として全ての銀河が赤方偏移を示している。たとえ宇宙の違う場所から測定したとしてもこの事実は変わらない。つまりは、我々の宇宙は膨張しているに違いないわけである。一方で、宇宙の局所部分で起こる異常は100Mpc以上のスケールでは無視することができる（1pc = 3.26光年）。より大域的なスケールで平均を取れば、銀河のクラスターの分布はより等方的（方向依存性がないということ）かつ一様（位置依存性がないということ）となる。ゆえに宇宙は一様な質量密度ρを持った物質が膨張しているものとして捉えることができる。

A. 宇宙の膨張



我々の宇宙の単純なモデルとして、均一な密度の膨張する球が、無限に大きい球の媒質中に埋め込まれているものを考える。外側の無限に大きい球の密度は常に内側の球の密度と等しいと仮定する。ある時刻における球の半径がR_sであるとする。球の膨張を表すため、半径$R(t)$の時間依存性をスケール因子 $a(t)$ で表すと、$R(t) = a(t)R_s$ と書ける。

ニュートンの重力法則を用いて、宇宙モデルである膨張球の境界に位置する質量素片の加速度を考えることによって、次のフリードマン方程式(1)(2)を得ることができる。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \tag{1}$$

ここで、kは無次元の定数であり、cは光速である。

A.1	式(1)の定数A_1を求めよ。	1.3 pt.

これまでの議論は非相対論的であった。しかし実は$\rho(t)c^2$を内部エネルギー密度（重力ポテンシャルエネルギーは除く）と解釈し直すことによってこれを相対論的な系に拡張することができる。この相対論的な系について、宇宙膨張過程が断熱的であると考えて熱力学第一法則を使うことで、第二のフリードマン方程式を導くことができる。

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2}\right)\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \qquad (2)$$

ここで、pは球にかかる圧力である。

A.2	式(2)の定数A_2を求めよ。	0.9 pt.

方程式(1)及び(2)を解くためには、$p = p(\rho)$の関係式を仮定しなければならない。例えば、wを無次元の定数として、$p(t)/c^2 = w\rho(t)$という関係式である。また、因子$H = \dot{a}/a$ はハッブルパラメーターと呼ばれる。パラメーターの現在の値は通常下付きの0を付けてt_0, ρ_0, H_0, a_0 等のように表す。簡単のため、$a_0 = 1$であるとする。

宇宙は、ビッグバンと呼ばれる巨大爆発により発生したと信じられており、それによって相対論的粒子の放出が起こった。

宇宙は膨張に伴って冷却され、その中の粒子は非相対論的になる。しかしながら、最近の観測によれば、現在の宇宙はスケール因子に依らない一定なエネルギー密度により支配されていることが明らかになっている。フォトン（光子）について言えば、宇宙の膨張につれて、フォトンの波長はスケール因子に比例して大きくなる。

A.3	次の三つのケースについて無次元量wの数値を求めよ。(i) 放射（すなわちフォトンのエネルギー）のみで満たされている宇宙、(ii) 非相対論的な物質のみで満たされている宇宙、及び(iii)一定のエネルギー密度を持った宇宙	1.2 pt.
A.4	$k = 0$の場合、A.3の(i)から(iii)のそれぞれの場合に対して$a(t)$を求めよ。ただし、初期条件は(i),(ii)において$a(t=0) = 0$とし、(iii)について$a(t=0) = 1$とする。	1.2 pt.

式(1)中の定数kは宇宙の空間の幾何学的な分類を表している。$k = +1$であれば正の曲率の宇宙(閉じた宇宙)、$k = 0$ であれば平らな宇宙(無限に広がった宇宙)、$k = -1$ であれば負の曲率の宇宙(閉じておらず無限に広がった宇宙)である。密度比を$\Omega = \rho/\rho_c$で定義する。ただし$\rho_c c^2 = H^2/A_1$はエネルギー密度の臨界値である。ここでいうA_1は問題A.1.で得た定数である。

A.5	式(1)のkをΩ, H, a, R_0を用いて表せ。	0.1 pt.
A.6	３つのkの値 $k = +1, k = 0, k = -1$について、Ωの数値の範囲を求めよ。	0.3 pt.

B.インフレーションの導入の動機と一般的な条件

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)の観測は、宇宙がほぼ平らであることを示唆している。だが問題はもしもこれが真実だとすると、この宇宙は完全に平らな宇宙から始まっていなければならないことだ。宇宙が少しだけ平らな状態からずれていたとすると、時間が経過するにつれて初期の宇宙の平らな状態からのズレが拡大を続け、最終的に現在のような平らな宇宙にはならないことを導くことができる。

B.1	放射が支配的であるような時期かもしくは非相対論的物質が支配的であるような時期のいずれかについて、時間tの関数として$(\Omega(t) - 1)$を求めよ（問題A.4.を参照）。	0.5 pt.

この問題を解決するためには、宇宙はその歴史の初期に「一定のエネルギー密度」が支配的であるような時期を持たなければならない。これは「インフレーション」と呼ばれる指数関数的な膨張を導く。

B.2	この一定のエネルギー密度が支配的であるような時期について、時間tの関数として$(\Omega(t) - 1)$を求めよ。$(\Omega(t) - 1) \ll 1$と仮定せよ。	0.3 pt.
B.3	宇宙がほぼ平らな状況からインフレーションが起こるとき、次のような条件が全て成り立つことを示せ。 ・負の圧力（$p < 0$） ・加速度的な膨張($\ddot{a} > 0$) ・ハッブル半径の減少($d(aH)^{-1}/dt < 0$)	0.9 pt.
B.4	ハッブル半径$(aH)^{-1}$が減少するという条件式はパラメーター $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$ を用いて$\epsilon < 1$で表せることを示せ。	0.2 pt.

インフレーションは$\epsilon < 1$である限り起き、$\epsilon = 1$となると終わる。e-fold数（どれだけ指数膨張したかを表す数）Nを次のように定義する。$dN = d\ln a = Hdt$ かつインフレーションの終わりで$N = 0$。

C.　一様分布の粒子によって引き起こされるインフレーション

インフレーションを生起し得る単純な物理系の例として、一様分布した物質が優勢な宇宙、がある。この種の物質はインフラトンと呼ばれ、$\phi(t)$という関数で特徴づけられる。

インフラトンが従うべき運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \tag{3}$$

と表すことができる。ここで、$V = V(\phi)$ はポテンシャル関数であり、$V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ である。

ハッブルパラメーターは

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]. \tag{4}$$

を満たす。

ここでM_{pl}は、換算プランク質量と呼ばれる定数である。インフレーションは、ポテンシャルエネルギーVが運動エネルギー$\dot{\phi}^2/2$よりずっと大きい時に起こる。(3)式の$\ddot{\phi}$が無視することができる。この条件は「緩い転がりの近似」と呼ばれる。

ϵ および $\eta_V = \delta + \epsilon$ という量は「緩い転がりのパラメーター」と呼ばれるもので、$\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$である。

C.1	ϵ、η_V、$dN/d\phi$をポテンシャル関数$V(\phi)$およびその一階微分V'と二階微分V "を用いて表せ。	1.7 pt.

D.単純なポテンシャルで記述される膨張

インフレーションモデルの予言は何にせよ、CMBの観測値によって与えられる制約$n_s = 0.968 \pm 0.006$ 及び$r < 0.12$を満たしている必要がある。物質優勢の宇宙の インフレーションモデルでは $\phi = \phi_{start}$ において $r = 16\epsilon$ および $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ の式を満たす。インフラトンのポテンシャルは単純な形 $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}}\right)^n$ を持つと仮定せよ。ここでnは整数、Λ は定数である。

D.1	インフレーションの終わりでのϕの値ϕ_{end} を計算せよ。	0.5 pt.
D.2	r と n_s をe-fold数N と整数 n で表わせ。r と n_s が観測値と最もつじつまが合うようなnの値を見積もれ。また計算では $N = 60$ とせよ。	0.9 pt.