IPhO2017 理論試験問題3　宇宙のインフレーション

A. 宇宙の膨張

A1 [1.3pt.]

球面上の質量mの質量素片の運動方程式は(等方性の仮定により動径方向のみであることに注意して),

$$m\ddot{R}(t) = -G\frac{mM_s}{R^2(t)}$$

ここで，M_sは半径$R(t)$の球殻の内部にある質量である。

上式に$\dot{R}$をかけて積分すると,

$$\int \dot{R}\frac{d\dot{R}}{dt}dt = \frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{GM_s}{R} + A$$

を得る。ここで，Aは定数である。

ところで,

$$M_s = \frac{4}{3}\pi R^3(t)\rho(t)$$

$$\dot{R} = \dot{a}R_s$$

なので，代入して整理すると,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2A}{R_s^2 a^2(t)}$$

となる。式(1)と見比べて,

$$A_1 = \frac{8\pi G}{3}$$

A2 [0.9pt.]

熱力学の第１法則より,

$$dE = -pdV + dQ_{in}$$

膨張は断熱的なので,

$$dE + pdV = 0$$
$$\dot{E} + p\dot{V} = 0$$

ここで,

$$\dot{V} = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

$$E = \rho(t)V(t)c^2$$

$$\dot{E} = \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\right)Vc^2$$

代入して整理すると,

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

が得られ，(2)と見比べると,

$$A_2 = 3$$

A3 [1.2pt.]

文中のρとpの関係式を式(2)に代入すると

$$\dot{\rho} + 3\rho(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

これは変数分離できて

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a}$$

となるから、

$$\rho = Ka^{-3(1+w)}$$
$$\rho_r \propto a^{-3(1+w)}$$

とかける(Kは初期値によって定まる定数)。ここで，ρ_rは，エネルギー密度である。

(ⅰ)放射だけの場合を考える。光子のエネルギーは波長λを用いて，

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

とかける。ここで，膨張おける波長の伸びより，エネルギーはa に反比例する(フォトンの波長はaに比例して大きくなるので)。

したがって，

$$\rho_r V \propto a^{-1}$$
$$\rho_r \propto a^{-4}$$
$$-3(1+w_r) = -4$$
$$w_r = \frac{1}{3}$$

(ⅱ) 非相対論的な場合，静止エネルギーm_0c^2が優勢であり，エネルギー密度は$\rho_m \cong \frac{m_0c^2}{V} \propto a^{-3}$であるから

$$-3(1+w_m) = -3$$
$$w_m = 0$$

(ⅲ) 一定のエネルギー密度を持つ場合、

$$\rho_\Lambda = Const.$$
$$-3(1+w_\Lambda) = 0$$
$$w_\Lambda = -1$$

訳者補足：この問題のポイントはそれぞれの仮定において何が一定で何が変わりうるのかを考えることであった。(ⅰ)の場合には，膨張による波長ののび(文中に書いてある)によって，エネルギーは保存せず，膨張に反比例して小さくなる。(ⅱ)の場合には，非相対論物質を仮定しており，エネルギーとしては，静止エネルギーm_0c^2が優勢である。(ⅲ)での保存量は問題文から明らかに分かる。

A4 [1.2pt.]

(ⅰ) A3 での条件に今のパラメーターを代入することにより，

$$\rho_r(t)a^4(t) = \rho_0$$

$k = 0$と式(1)より，

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-4}(t)$$

膨張しているので$\dot{a}>0$であることに注意して、

$$\dot{a}(t)=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\cdot\frac{1}{a(t)}$$

を得る。変数分離型の簡単な微分方程式なので，これを解くと，

$$\frac{1}{2}a^2(t)=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\cdot t+K_r$$

K_rは定数であり初期条件により，

$$a(t)=\left(\frac{32\pi G}{3}\rho_0\right)^{\frac{1}{4}}\cdot t^{\frac{1}{2}}=(2H_0)^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}$$

ここで，

$$H_0=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}$$

（ⅱ）同様に，

$$\rho_r(t)a^3(t)=\rho_0$$

$$\dot{a}(t)=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\cdot a^{-1/2}$$

$$\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}(t)=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\cdot t$$

$$a(t)=(6\pi G\rho_0)^{\frac{1}{3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3H_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}$$

（ⅲ）同様に，

$$\rho_r(t)=\rho_0$$

$$\dot{a}(t)=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\cdot a$$

$$\ln a=\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\cdot t$$

$$a(t)=e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\cdot t}=e^{H_0 t}$$

A5 [0.1pt.]

定義により，

$$\rho_c(t)=\frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

フリードマン方程式(1)に代入して整理すると、

$$H^2(t) = H^2(t)\Omega(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)}$$

$$k = \left(\frac{R_0^2}{c^2}\right) a^2 H^2 (\Omega - 1)$$

A6［0.3pt.］

$$\left(\frac{R_0^2}{c^2}\right) a^2 H^2 > 0$$

が成り立つことに注意すると、$k = +1$ならば$\Omega > 1$、$k = 0$ならば$\Omega = 0$、$k = -1$ならば$\Omega < 1$が条件である。

B. インフレーションの導入の動機と一般的な条件

B1［0.5pt.］

A5 の式より、

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2} \frac{1}{\dot{a}^2}$$

が成り立つ。A4 より、放射が支配的な時期も、非相対論的物質が支配的である時期もどちらもaはtのベキ乗として変化する。

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^p$$

ここで、放射が支配的な場合は$p = 1/2$で、非相対論的物質が支配的な場合は$p = 2/3$である。
したがって、時間の関数としての$\Omega(t) - 1$は、$\tilde{k}$を定数として、

$$\Omega(t) - 1 = \tilde{k} t^{2(1-p)}$$

これは、時間発展によってズレが拡大していくことを表している。

B2［0.3pt.］

A4 より,

$$a(t) = e^{H_0 t}$$

$$\dot{a}(t) = H_0 e^{H_0 t}$$

よって，$\tilde{k}$を定数として,

$$\Omega(t) - 1 = \tilde{k} e^{-2H_0 t}$$

このことは，時間発展によってズレが指数関数的に小さくなることを示している。

B3［0.9pt.］

・負の圧力

A3 より，$w_\Lambda = -1$だから，$p = -\rho c^2 < 0$

・加速度的な膨張

フリードマン方程式より,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) a^2(t) - \frac{kc^2}{R_0^2}$$

両辺微分して,

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) = \frac{8\pi G}{3}\left(-3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)a\dot{a} + 2\rho a\dot{a}\right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

よって，$\ddot{a} > 0$である。

・ハッブル半径の減少

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt}\dot{a} = \frac{d}{dt}(Ha) > 0$$

だから，Haは単調増加。よってハッブル半径$(aH)^{-1}$は単調減少し，これは,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0$$

に他ならない。

B4 [0.2pt.]

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1-\epsilon) < 0$$

$$\epsilon < 1$$

C. 一様分布の粒子によって引き起こされるインフレーション

C1 [1.7pt.]

式(4)を微分することで,

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\dot{\phi}\right] = \frac{1}{3M_{pl}^2}[-3H\dot{\phi}^2]$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2 H^2}$$

をえる。ポテンシャルエネルギーが十分大きいという仮定から,

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_{pl}^2}$$

また，緩い転がりの近似から,

$$3H\dot{\phi} \approx -V'$$

したがって,

$$\epsilon \approx \frac{M_{pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2$$

ところで,

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi}$$

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{V''}{3H^2} - \epsilon$$

だから,

$$\eta_V \approx M_{pl}^2\frac{V''}{V}$$

となる。最後に，

$$dN = Hdt = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)d\phi \approx -\frac{1}{M_{pl}^2}\left(\frac{V}{V'}\right)d\phi$$

より，

$$\frac{dN}{d\phi} \approx -\frac{1}{M_{pl}^2}\left(\frac{V}{V'}\right)$$

を得る。

D. 単純なポテンシャルで記述される膨張

D1 [0.5pt.]

インフレーションの終わりでは，$\epsilon = 1$なので，Vの具体的な関数形 $V = \Lambda^4\left(\frac{\phi}{M_{pl}}\right)^n$を代入すると，

$$\epsilon = 1 = \frac{M_{pl}^2}{2}\left[\frac{n}{\phi_{end}}\right]^2$$

$$\phi_{end} = \frac{n}{\sqrt{2}}M_{pl}$$

D2 [0.9 pt.]

$$\frac{dN}{d\phi} = -\frac{1}{M_{pl}^2}\left(\frac{V}{V'}\right) = -\frac{\phi}{nM_{pl}^2}$$

なので，積分すると(インフレーションの終わりで$N = 0, \phi = \phi_{end}$に注意)，

$$N = -\frac{1}{2n}\left[\frac{\phi}{M_{pl}}\right]^2 + \frac{n}{4}$$

となり，N, n, ϕ間の関係が得られる。よって，

$$\eta_V = n(n-1)\left[\frac{M_{pl}}{\phi}\right]^2 = \frac{2(n-1)}{n-4N}$$

$$\epsilon = \frac{n^2}{2}\left[\frac{M_{pl}}{\phi}\right]^2 = \frac{n}{n-4N}$$

だから，

$$r = 16\epsilon = \frac{16n}{n-4N}$$

$$n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon = 1 - \frac{2(n+2)}{n-4N}$$

をえる。$n_s = 0.968$を代入すると，$n = -5.93$となる。しかし，$n = -6$ のとき， $r = 0.39$，$n = -5$ のとき，$r = -0.32$ となり、条件を満たす n は存在しない。