

ポリマー糸の粘弾性 (10 点)

実験の開始まで糸に力を加えないように注意せよ。
すぐにはかりのスイッチを入れよ (温まるまでに約 10 分かかる)。はかりの設定を変えるな。

イントロダクション

固体の物質に外力がかかると変形する。加えた力が小さければ変形は力に比例し (フックの法則), 変形は可逆であり, 力が取り除かれると物質はもとの形状に戻る。

固体では, 応力と変形概念を用いてより便利に記述される。応力 σ は, 力 F を力がかかる面の面積 S で割ったものとして定義される。一方, 変形 ϵ は長さの相対的な変化で定義される。

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}, \quad (1)$$

ここで, ℓ と ℓ_0 はそれぞれ変形後, 変形前の長さである。単純な弾性体の挙動では, 応力は $\sigma = E\epsilon$ のように単に変形に比例し (フックの法則), 比例係数 E はヤング率と呼ばれる。

フックの法則で表される弾性体の挙動は, 十分小さい変形でのみ有効な近似である。より大きな変形では, プラスチック領域に達するとともに変化は徐々に不可逆になる。そのような場合, 分子の運動は束縛されなくなり始め, 粘性流体の運動に似てくる。つまり, 弾性限界を超えて伸ばされたり押し込められると, 物質は漸近的に流体になる。

粘弾性物質

ある種の物質は弾性体の特徴と粘性流体に似た特徴をあわせ持ち, 「粘弾性」として知られている。

そのため, 粘弾性物質を扱う上で, 純粋に弾性的なふるまいと追加の粘性的なふるまいを分けて考えるのがよい。つまり, 与えられた変形 ϵ を起こす全応力 σ は, 純粋な弾性項 $\sigma_0 = E_0\epsilon_0$ と粘弾性項 σ_1 の和である。

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (2)$$

両方の応力項が同じ変形 ($\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1$) に対応すると仮定されている。しかし, 粘弾性項に対応する変形 ϵ_1 は通常, 純粋な弾性変形 $\epsilon_1^e = \sigma_1/E_1$ と純粋な粘性変形 ϵ_1^v の和としてモデル化される (共に共通の応力 $\sigma_1 = \sigma_1^e = \sigma_1^v$ によって生じる):

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^e + \epsilon_1^v \quad (3)$$

純粋な粘性過程では, (粘性流体で見つかったことと同様に) 応力と変形の時間微分の間に関係が認められる。

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{d\epsilon_1^v}{dt},$$

ここで, η_1 は粘性係数である。

この現象論的なモデルは, 線型粘弾性の「標準線型固体モデル」と呼ばれ, 図 1 に描かれている。ばねは純粋な弾性成分を表し, ポットは純粋な粘性成分を表す。

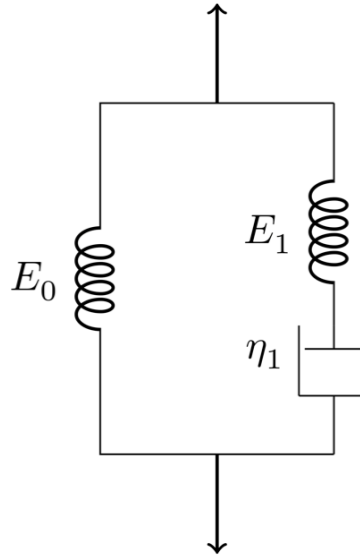
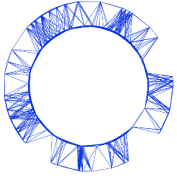


図 1. 線型粘弾性の標準線型固体モデル

上の方程式から、次の関係式が得られる。

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad (4)$$

そのため、粘弾性の標準線型モデルでは、次の式が示される。

$$\sigma = E_0 \epsilon + \tau_1 (E_0 + E_1) \frac{d\epsilon}{dt} - \tau_1 \frac{d\sigma}{dt} \quad (5)$$

ここで、 $\tau_1 = \eta_1 / E_1$ 。この微分方程式は、応力と変形の関係はもはや線型ではなく、応力と変形はともに時間の一般関数であることを示している。 $\epsilon(t)$ を得るには、関数 $\sigma(t)$ を特定する必要があり、逆もまたそうである。

2つの特別な場合、 $d\epsilon/dt = 0$ と $d\sigma/dt = 0$ に実用的な興味がある。それぞれ「応力緩和条件」と「クリープ条件」として一般に知られている。応力緩和条件では、突然応力が加えられ、ある時間にわたって一定に保たれる ($d\epsilon/dt = 0$)。そのような場合では、関数 $\sigma(t)$ は媒質の粘弾性パラメータにのみ依存し、式 (5) の解は、

$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}) \quad (6)$$

ここで、 $t = 0$ では弾性成分のみが応力に寄与すると仮定し、よって $\sigma(t=0) = \epsilon(E_0 + E_1)$ であるとする。この解は、粘弾性応力は時定数 τ_1 で時間とともに指数関数的に減衰することを示している。

多重粘弾性過程

標準線型モデルは、図 2 に示されるように、多くの粘弾性過程を含むモデルに拡張できる。

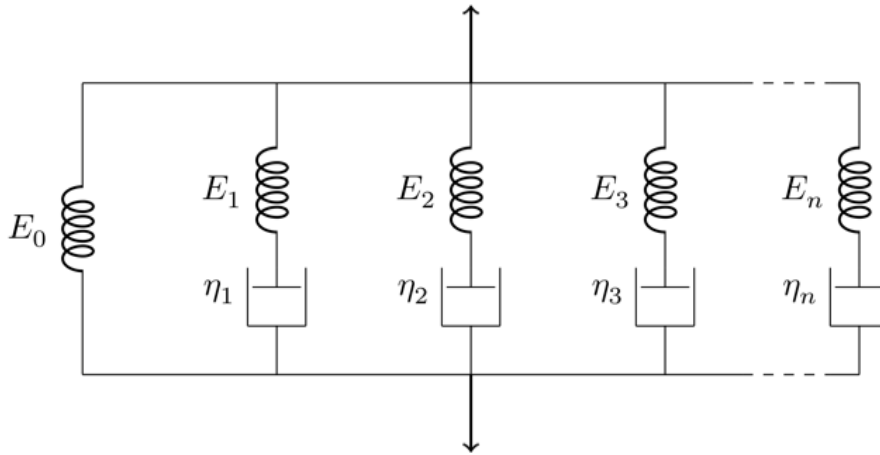
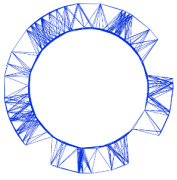


図2. 多重粘弾性過程の一般化モデル

よって、 N 個の異なる粘弾性成分を考えると、

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

ここで $\frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{1}{E_k} \frac{d\sigma_k}{dt} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$ であり、上と同様に、 $\frac{d\epsilon_0}{dt} = \frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$

式 (5) を次のように一般化できる。

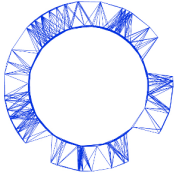
$$\sigma = E_0 \epsilon + \eta_t \frac{d\epsilon}{dt} - \sum_k \tau_k \frac{d\sigma_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

ここで、 $\eta_t = \sum_k \eta_k$, $\tau_k = \eta_k / E_k$ 。

変形が定数であるという条件では、様々な粘弾性応力が $\sigma_k = A_k e^{-t/\tau_k}$ のように時間とともに指数関数的に減衰する。このことから次の解が導かれる。

$$\sigma(t) = \epsilon \left(E_0 + \sum_k E_k e^{-t/\tau_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

ここで、 $t = 0$ では弾性成分のみが全応力に寄与し、そのため $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$ であることを仮定した。その結果現れる粘弾性応答は明らかに非線型になる。



装置

次の装置はこの実験問題で用いるものである（図3を見よ）。

1. レーザーポインターを取り付け、上部に糸を取り付けてはかりの上で一定の変形を保って垂直に引っ張られるようにするスタンド1台
2. おもりセット（真ん中がへこんだ円柱状のおもりと糸を取り付ける指示ねじ）1つ
3. 一方におもりセットが取り付けられ、もう一方が上部の支えから糸をつるすために指示ねじにつけてある長い thermoplastic polyurethane (TPU) 糸1本
4. 短い TPU 糸1本
5. レーザーポインターとその支え1組
6. 電子てんびん1台
7. 平面鏡2台
8. ストップウォッチ1つ
9. 定規1つ
10. 金属製の巻き尺1つ
11. スクリーンとして用いる A4 用紙1枚
12. レーザーを支え、電源をつけるための洗濯ばさみ1つ

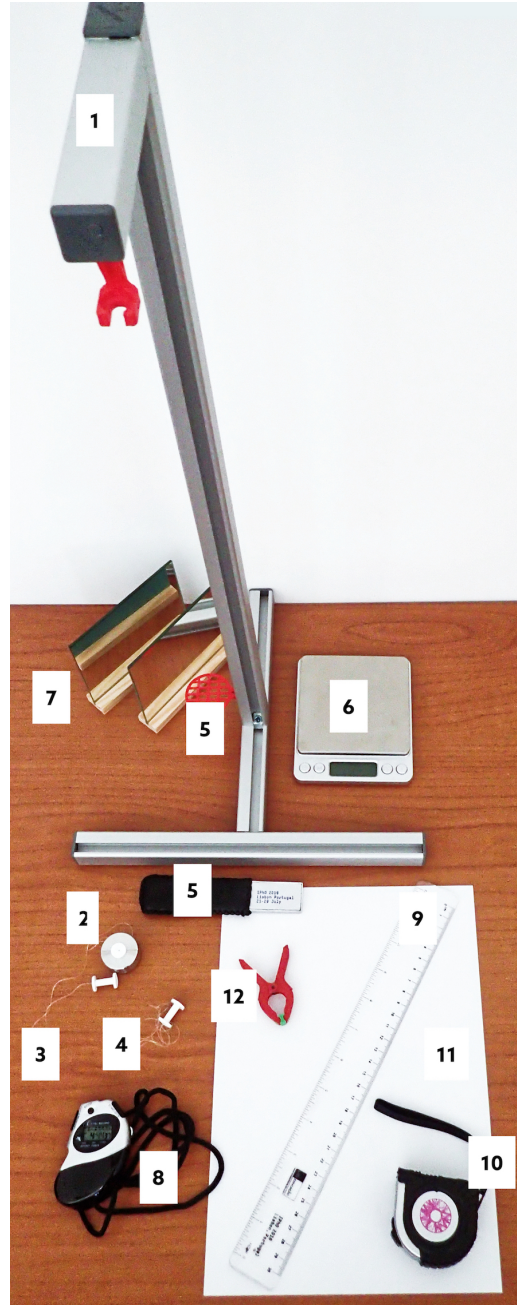
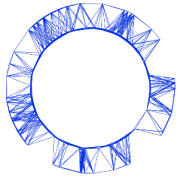
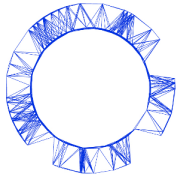


図3. この実験問題で用いる装置

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-6

Japanese (Japan)

Part A: 応力緩和測定 (1.9 点)

糸には実験の前に応力がかからないように注意すること！ 不用意にも応力をかけてしまった場合は、予備のものと取り換えてもらうこと。ただし、この交換作業には時間がかかるので、実験時間が減ってしまうことに留意すること。
この Part A の測定を始める前に“Part D：データ解析”の指示を注意深く読み、Part A の測定方法に活かすこと。

A.1 応力を加えていない糸のねじ頭間の長さを測定せよ。糸の全長 l_0 を得るためには、ねじの中の糸の長さ 5 mm の 2 倍を加えなさい。解答用紙に l_0 の測定値とその不確かさの値を記入しなさい。 0.3pt

A.2 おもりセットの全重量 P_0 を gf (g 重) の単位で測定しなさい。なお、1 gf とは、質量 1 g の物体の重さを示す ($1 \text{ gf} = 9.80 \times 10^{-3} \text{ N}$)。解答用紙に測定値と不確かさについて見積もった値を記入しなさい。 0.3pt

緩和の影響を観測するためには、応力を与える時間を十分にとる必要がある。この測定の場合、約 45 分は応力を加え続けなければならない。

ここからは、二つの操作 1 と 2 を同時に実施する。開始前に説明を注意深く読むこと。
重要：もし、何らかの原因で実験が中断してしまった場合は、そのまま継続することはできず、新しい糸を用意して最初からやり直さなければならない。もしそうってしまった場合は、予備のものと取り換えてもらうこと。

以下の操作を同時に行うこと。

1. おもりセットを電子てんびんの上に載せたまま、糸の他端のねじをスタンドに取り付ける (図 4)。
2. ストップウォッチによる時刻測定を 1. と同時に開始する。

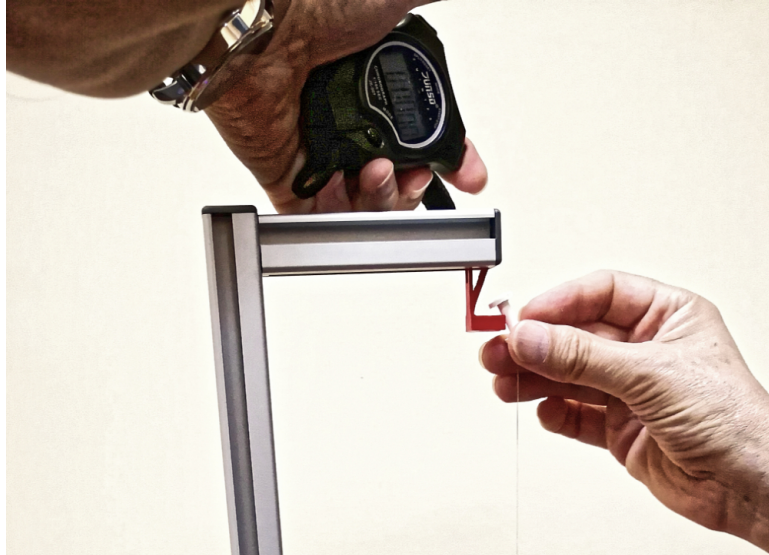
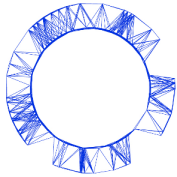


図4. 糸を支持システムに配置すると同時に測定を開始する。

A.3 約45分間、電子てんびんの値 $P(t)$ を時刻 t とともに解答用紙に記録せよ。 1.0pt

A.4 糸の長さ l を測定するとともに、不確かさを見積り、解答用紙に記録せよ。 0.3pt

Part B : 伸びた糸の直径の測定 (1.3 点)

レーザーを直視しないこと！ また、測定時以外は電源を切ること。
回折模様がうまく見られないときはレーザーの交換を求めること。

この Part では、光の回折を利用してポリマー糸の直径を測定する。(知っていることだと思うが、) 幅 d の長方形のスリットによる回折パターンは、直径 d の円柱の物体による回折パターンに似ている。十分遠方 (フラウンホーファー) において、物体の直径に比べて十分大きい距離を隔てて置かれたスクリーン上に現れる回折パターンは、角度が小さい範囲において、回折光の強度が極小を示す位置の間隔がスリットでも物体でも等しいとみなせ、以下の式で与えられる。

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

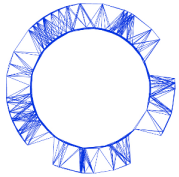
θ は回折角である。

また、レーザーの波長は $\lambda = 650 \pm 10 \text{ nm}$ である。

この Part は以下のように進める。

1. 洗濯ばさみでレーザー光の電源を入れる。(図5)
2. 糸に直接レーザー光があたるように位置を調整する。
3. 与えられた器具を用いて、回折パターンを紙に投影する方法を考案し、式(14)を用いて糸の直径を決定できるようにデータを測定する。

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-8

Japanese (Japan)



図5. ばねクリップでレーザー光の電源を入れる。

B.1	考案した方法を解答用紙に記しなさい。	0.6pt
B.2	糸と回折像が投影されたスクリーンまでの光学距離 D を測定しなさい。また、これを解答用紙に見積もった不確かさとともに記しなさい。	0.3pt
B.3	強度が極小となる位置の隣り合う間隔の平均値 \bar{x} を決定しなさい。また、これを解答用紙に見積もった不確かさとともに記しなさい。	0.3pt
B.4	測定結果を式 (10) に適用し、伸びたポリマー糸の直径 d を不確かさとともに決定しなさい。また、これを解答用紙に見積もった不確かさとともに記しなさい。	0.3pt

Part C : 新しい糸への交換 (0.3 点)

これまでのデータ解析 (Part D) を行う前に、短い糸 (Part E) の準備を行う。

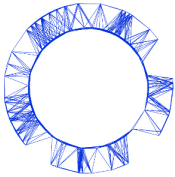
おもりから長い糸を取り外し (ねじを緩める)、短い糸と交換する (糸の端をねじの穴に入れ、もう一方のねじで固定する。図6)。

穴に糸の一端を入れることが困難な場合は申し出てよい。



図6. 固定ねじに TPU 糸を取り付ける。

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-9

Japanese (Japan)

C.1 A.1と同様に、長さ l'_0 を測定しなさい。不確かさとともに解答用紙に記録せよ。 0.3pt

おもりが一定の力を及ぼすように新しく取り付けられた糸を吊るす。これによって実験の解析を行っている間に、徐々に糸の変形 $\epsilon = \sigma/E$ が一定値に達する（最低でも 30 分は伸ばされた状態を保持すること）。

PartD : データ解析 (5.7 点)

注意：リスボンの重力加速度の大きさは、 $g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$ である。

D.1 全ての測定点において、糸にはたらく力の大きさ F を gf で計算し、A.3 の表の対応する箇所を埋めなさい。 0.3pt

D.2 解答用紙のグラフ用紙に $F(t)$ をプロットしなさい。 0.4pt

電子てんびんの上面は動かないとみなせるので、変形は一定とし、式 (9) を用いることができる。比 $\frac{\sigma}{\epsilon}$ は β を一定として $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$ と表せる。よって、

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2} + E_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (11)$$

と表される。ただし、便宜上 ($\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots$) の順に並べて記載している。

D.3 糸の変形 ϵ を不確かさとともに決定せよ。また、これを解答用紙に見積もった不確かさとともに記しなさい。 0.3pt

D.4 β を計算して求めなさい。その際、 σ を SI 単位で、 F を gf 単位でそれぞれ扱いなさい。また、これらを解答用紙に記しなさい（不確かさを考える必要はない）。 0.3pt

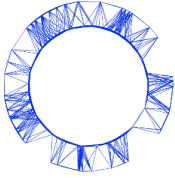
D.5 D.2 でグラフを描くのに用いたデータを見てみよう。これは純粋な弾性過程を示してはいない。解答用紙のグラフ用紙に、純粋な弾性過程の場合の $F(t)$ グラフを定性的に描きなさい。 0.4pt

データ解析は、 $F(t)$ よりも $\frac{dF}{dt}$ を用いる方が簡単になる。これは、時間微分を用いると緩和に影響するパラメータが手作業によって抜き出せることを意味している。この手作業を行うには、時間微分 $\frac{dF}{dt}$ を全ての測定点で計算しなければならない。この作業は、数値的な方法、またはグラフによる視覚的な方法によりできる。測定点 $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \dots$ の間隔が一定の場合、関数 $f(t)$ の点 t_i での微分の値は、次の式で近似される。

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

ただし、 h (一定) は測定点の間隔であり、 N は測定点の個数である。

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-10

Japanese (Japan)

もし、測定点の間隔が一定ではない場合、時間微分はおおよそ次の式で与えられる。

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

ただし、 $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$ 、 $h_- = (t_i - t_{i-1})$ であり、 N は測定点の個数である。この式はある測定点の左右における時間微分の、時間間隔の逆数で重み付けられた平均を表している。

データの解析と影響を与えるパラメータを抜き出しは、以下の手順で行う。また、式 (11) の級数を用いる。

D.6 測定で得たデータセットが τ_2 より長い時間続いていると仮定して、 $t > 1000$ s となる時間について微分 $\frac{dF}{dt}$ を計算しなさい。A.3. で用いた表に数値を示しなさい。 $\frac{dF}{dt}$ を計算するのにグラフを使う場合、解答用紙のグラフ用紙を用いよ。 0.5pt

D.7 単一の粘弾性過程の場合に期待される $\frac{dF}{dt}$ の時間依存性を解答用紙に表わせ。 0.3pt

D.8 グラフを用いて、D.6. で示したデータ点からパラメータ E_1 と τ_1 を SI 単位系で求めて、解答用紙に記しなさい（不確かさを考える必要はない）。 1.0pt

D.9 D.6. で示したデータ点からパラメータ E_0 を SI 単位系で求めて、解答用紙に記しなさい（不確かさを考える必要はない）。 0.3pt

D.10 $F(t)$ から粘性成分と最も緩和時間の長い粘弾性成分を引くことで、A.3 で用いた表の $y(t)$ 列を埋めよ。（D.6 で用いたデータ点は考えなくてよい。） 0.3pt

D.11 グラフを用いて、 $y(t)$ (D.10 を見よ) から 2 番目の粘弾性成分のパラメータ E_2 と τ_2 を SI 単位系で求め、解答用紙に記しなさい（不確かさを考える必要はない）。 1.0pt

粘弾性に影響を与える他の粘弾性成分は同様に抜き出すことができる。

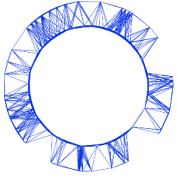
D.12 第 3 の項と関連がある $[t_i, t_f]$ の時間区間を見出しなさい。また、 t_i と t_f を解答用紙に記しなさい（不確かさを考える必要はない）。 0.3pt

D.13 D.11 のグラフから、 τ_3 を SI 単位系で見積りなさい。また、これを解答用紙に記しなさい（不確かさを考える必要はない）。 0.3pt

Part E : 一定の応力が付加される条件下での E の測定 (0.6 点)

Part C. で伸ばした短い糸を用いる。あらかじめ、30 分以上の伸ばされた状態にあったことが必要である。これによって、糸の変形 $\epsilon = \sigma/E$ を一定とみなすことができる。

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-11

Japanese (Japan)

- E.1** 伸びた糸の長さから E を決定しなさい。また、これを **Part D** で得た E_0 との差を 0.6pt 比較して解答用紙に記しなさい (不確かさを考える必要はない)。