LIGO-GW150914 (10 点)

2015 年に重力波検出器 LIGO が初めて地球に到達した重力波 (Gravitational waves, GW) を観測した。GW150914 と名付けられたこのイベントは，円に近い軌道を運動する 2 つのブラックホールで発生した重力波によるものである。この問題では，観測データの特性から系の物理パラメータを見積もる。

Part A: ニュートン力学による軌道 (3.0 点)

A.1 質量 M_1, M_2 の星がそれぞれ位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ の位置にあるとし，重心系で運動を記述する: 1.0pt

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0\,. \tag{1}$$

星は宇宙の他の天体から十分離れているとし，非相対論的速度で運動しているものとする。ニュートンの法則から，質量 M_1 の加速度ベクトルは以下のように書き表すことができる。

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\vec{r}_1}{r_1^n}\,, \tag{2}$$

ここで $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$ である。自然数 n を求めよ。また，$\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ の具体的な表式を求めよ。G は万有引力定数 [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$]。

A.2 2 つの質量からなる系の全エネルギーは、円軌道に対して以下のように書き表される: 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G\frac{M\mu}{L}\,, \tag{3}$$

ここで

$$\mu \equiv \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\,, \qquad M \equiv M_1 + M_2\,, \tag{4}$$

は系の換算質量および全質量であり，Ω はそれぞれの質量の角速度，L は質量間の距離 ($L = r_1 + r_2$) である。$A(\mu, \Omega, L)$ の具体的な表式を求めよ。

A.3 式 (3) は $E = \beta G\frac{M\mu}{L}$ と簡単化できる。β を決定せよ。 1.0pt

Part B: 相対論的エネルギー散逸の導入 (7.0 点)

1915 年にアインシュタインによって定式化された重力の正確な理論である相対性理論は，重力が光の速さで伝搬することを予言する。このときに重力相互作用の情報を運ぶのが重力波である。重力波は質量が加速されるときに常に放射され，質量系のエネルギーを減少させる。

宇宙の他の天体から十分離れた 2 つの点状の天体を考えよう。十分小さな速度に対して，1) 発せられる重力波の角振動数は軌道の角速度の 2 倍であり，2) 単位時間あたりに放射される重力波のエネルギー $\mathcal{P}$ は，以下のアインシュタインによる四重極公式で決められる:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}^3Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^3Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\right)\,. \tag{5}$$

ここで，$c \simeq 3 \times 10^8$ m/s は光速である。2 質量系が $x - y$ 平面内を運動する時，Q_{ij} は次のように与えられる (i, j はそれぞれ行と列の成分を表す添字である):

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2x_A^2 - y_A^2\right) , \qquad Q_{22} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2y_A^2 - x_A^2\right) , \qquad Q_{33} = -\sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2) , \tag{6}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^{2} M_A x_A y_A , \tag{7}$$

そのほかの成分については，$Q_{ij} = 0$ である。ここで (x_A, y_A) は重心系における質量 A の位置である。

B.1 A.2 で記述した円軌道に対して，Q_{ij} の成分は時刻 t の関数として以下のように書き表すことができる: 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} \left(a_i + b_i \cos kt\right) , \qquad Q_{ij} \overset{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt . \tag{8}$$

k を Ω を使って書き表わせ。さらに，定数 a_i, b_i, c_{ij} の数値を決めよ。

B.2 この系に対して，単位時間あたりに放射される重力波のエネルギー $\mathcal{P}$ を計算し，次のように書き表されることを示せ: 1.0pt

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6 . \tag{9}$$

また，ξ を数値として求めよ。[もし ξ を得ることができなかったら，以下の問で $\xi = 6.4$ を用いよ。]

B.3 重力波の放出がない時，2 つの質点は一定の円軌道を永遠にまわりつづける。しかし，重力波の放出により，系のエネルギーが失われ，円軌道の半径は徐々に小さくなる。角速度の時間変化の割合 $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ は以下の式で与えられることを示せ。 1.0pt

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} \left(G M_{\mathrm{c}}\right)^5 , \tag{10}$$

ここで M_{c} はチャープ質量と呼ばれる。M_{c} を M と μ で書き表わせ。この質量が，軌道が小さくなっていく時の角速度の増加を決める。[「チャープ」は、小さな鳥が発する (振動数があがる) 高音の鳴き声に由来する。]

B.4 ここまでで与えられた情報を使って，軌道の角速度 Ω と重力波の振動数 (単位時間あたりの波の振動回数) f_{GW} の関係式を求めよ。また，任意のなめらかな関数 $F(t)$ と定数 $a \neq 1$ に対して， **2.0pt**

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \chi F(t)^a \qquad \Rightarrow \qquad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0)\,, \tag{11}$$

が成り立つ。ここで χ は定数，t_0 は積分定数である。この公式を用いて，(10) より重力波の振動数が

$$f_{\mathrm{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p}(t_0-t)^{2-p} \tag{12}$$

となることを示し，定数 p を決定せよ。

GW150914 は 2015 年 9 月 14 日に，L 字型に配置された長さ 4km の 2 つのアームからなる LIGO 検出器で記録された。2 つのアームの長さの比は図 1 のように変化した。検出器のアームは通過する重力波に対して線形で応答し，その応答パターンは波のような形になる。この波は，円に近い軌道上を動く 2 つのブラックホールによって生成された。重力放射によるエネルギー損失によって，軌道は縮み，2 つのブラックホールはついには衝突する。衝突点はだいたい図 1 の点 D の右側の信号ピークの位置に対応している。

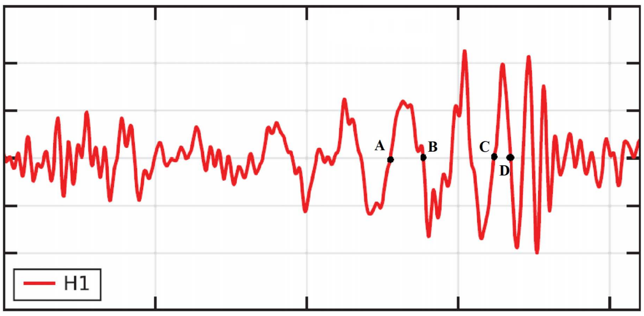

図 1. LIGO 検出器 H1 における 2 つのアームの長さ比の変化。水平軸は時刻，点 A, B, C, D はそれぞれ $t = 0.00, 0.009, 0.034, 0.040$ [秒] の時刻に対応する。

B.5 図から，以下の 2 つの時刻における $f_{\mathrm{GW}}(t)$ を数値的に見積もれ。 **1.0pt**

$$t_{\mathrm{AB}} = \frac{t_{\mathrm{B}} + t_{\mathrm{A}}}{2} \qquad \text{および} \qquad t_{\mathrm{CD}} = \frac{t_{\mathrm{D}} + t_{\mathrm{C}}}{2}\,. \tag{13}$$

さらに，(厳密には違うが) 式 (12) が衝突前に常に成立していると仮定し，2 つの質点は同じ質量を持つとして，系のチャープ質量 M_c と全質量が太陽質量 $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg の何倍になるか，それぞれの数値を求めよ。

B.6 2 つの質量間の最小距離を，時刻 t_{CD} でのデータを用いて数値的に見積もれ。次に，それぞれの天体の大きさの上限 R_{max} を見積もれ。太陽半径 $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km と比較するために，$R_\odot / R_{\mathrm{max}}$ を数値的に求めよ。さらに，同じ時刻に軌道上を動く天体の速さ v_{col} を数値的に見積もり，光の速さと比較のため v_{col}/c を数値的に求めよ。 **1.0pt**

2 つの天体はとても速く動いており，天体はとてもコンパクトであることを示せ!