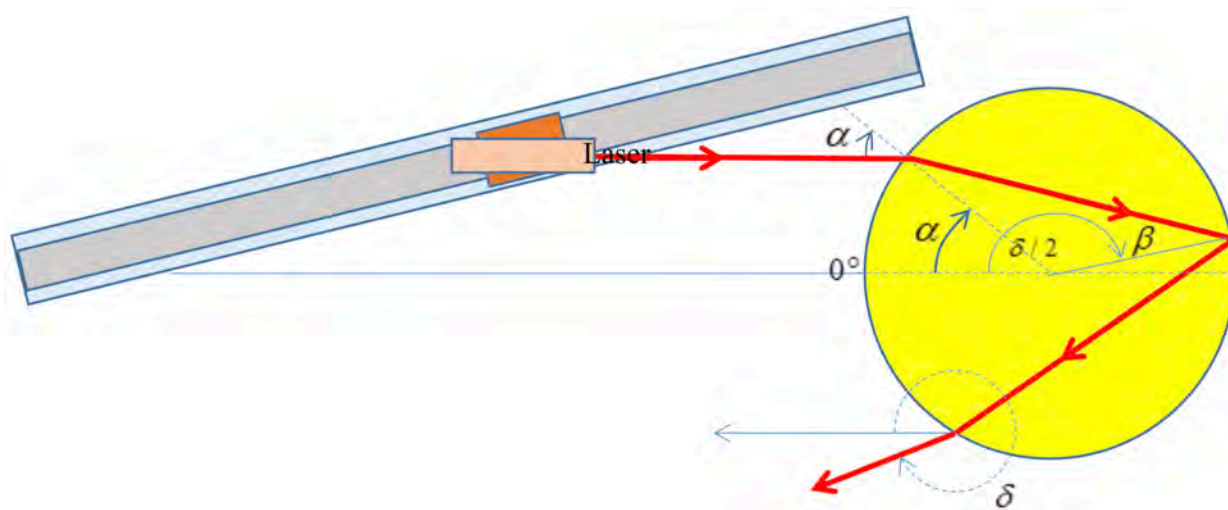


光学的測定 – 解答

Part A – 円板の屈折率

A.1:

N = 3 の場合の実験装置のセットアップのスケッチ

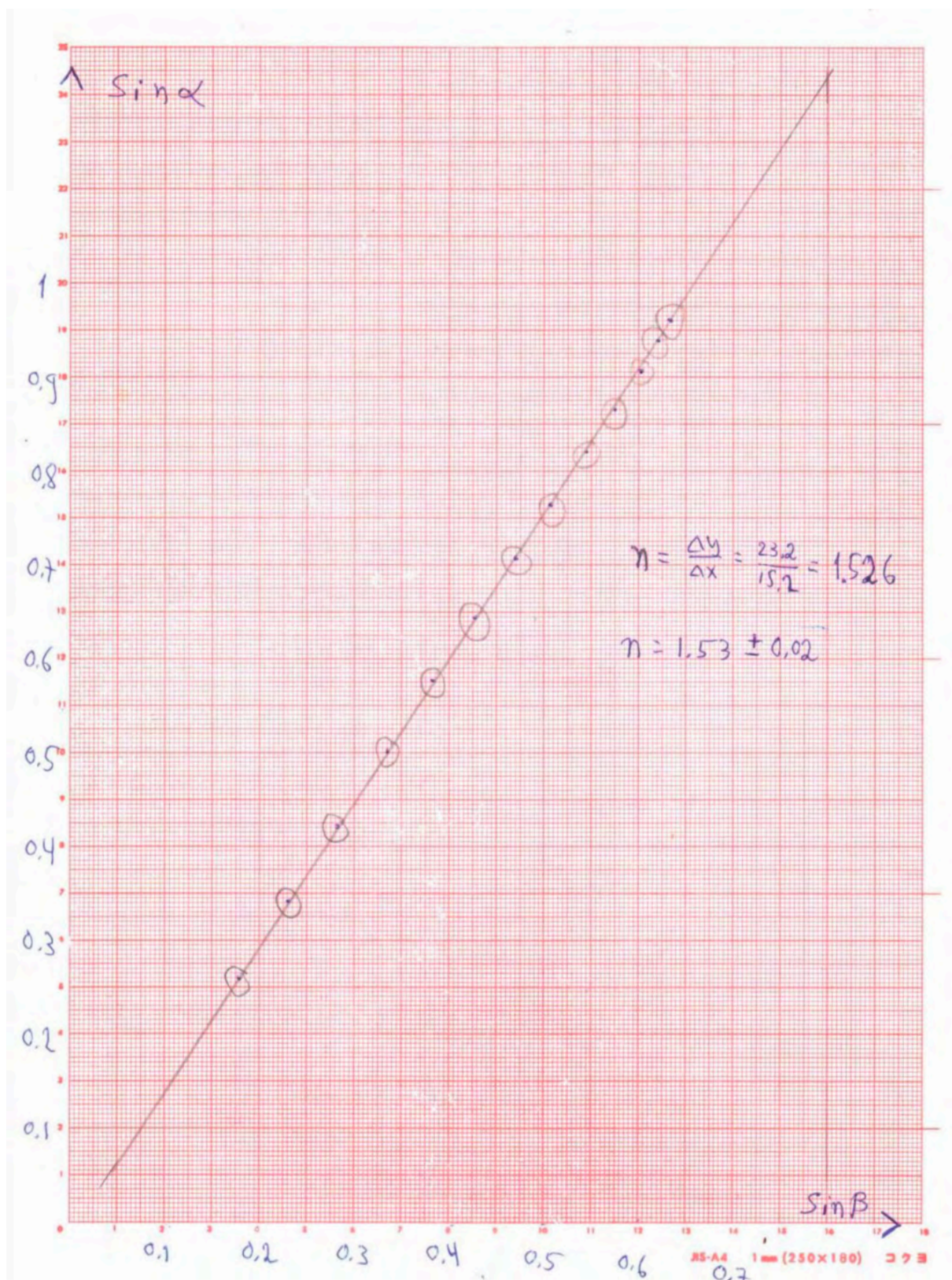


測定値と計算値の表

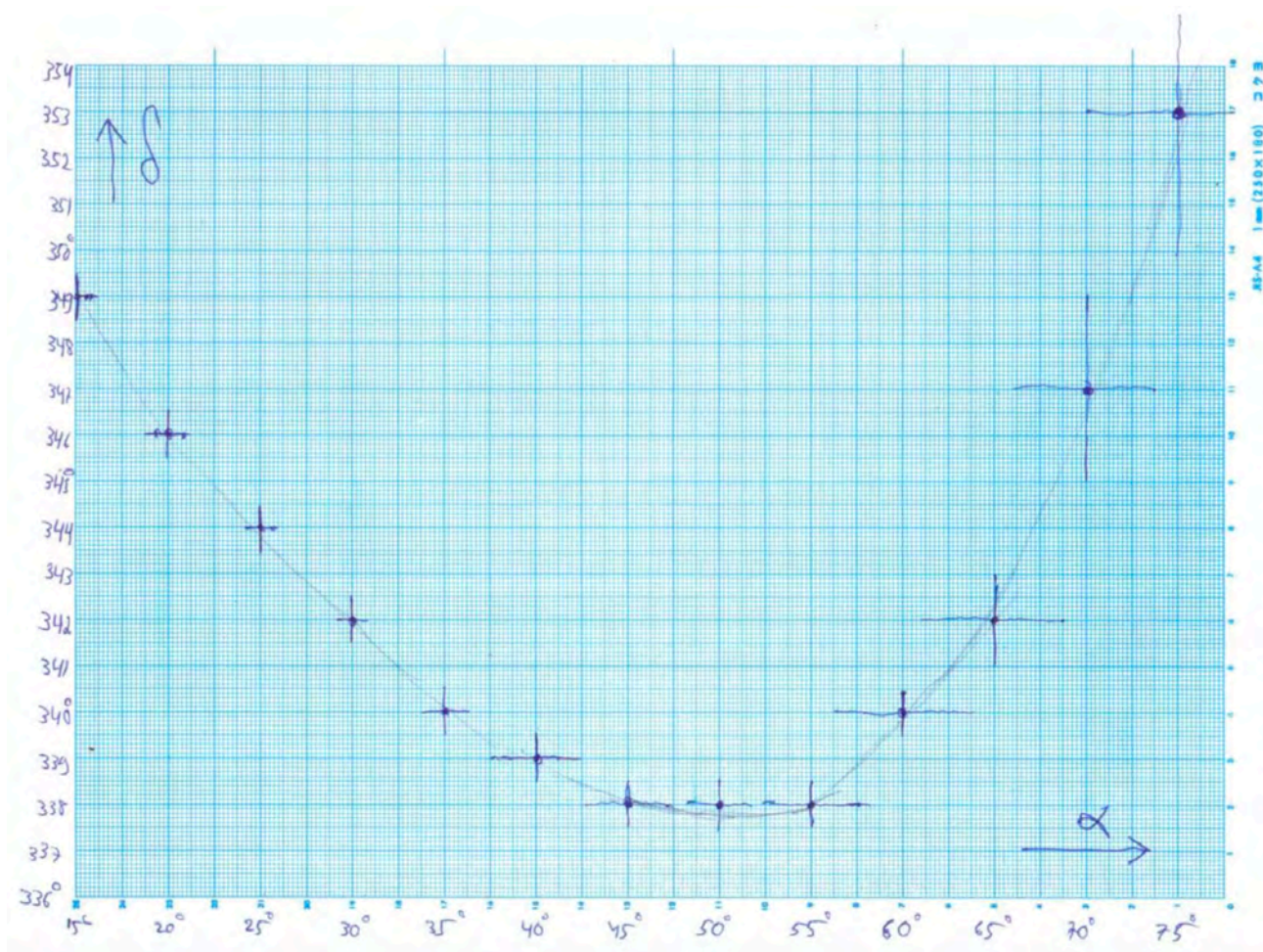
$\alpha(^{\circ})$	$\Delta\alpha(^{\circ})$	$\delta/2(^{\circ})$	$\Delta\delta/2(^{\circ})$	$\delta(^{\circ})$	$\Delta\delta(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	$\sin \alpha$	$\sin \beta$
15	0.25	174.5	0.25	349	0.5	10.25	0.259	0.178
20	0.25	173	0.25	346	0.5	13.5	0.342	0.233
25	0.25	172	0.25	344	0.5	16.5	0.423	0.284
30	0.25	171	0.25	342	0.5	19.5	0.500	0.334
35	0.5	170	0.25	340	0.5	22.5	0.574	0.383
40	1	169.5	0.25	339	0.5	25.25	0.643	0.427
45	1	169	0.25	338	0.5	28	0.707	0.469
50	1	169	0.25	338	0.5	30.5	0.766	0.508
55	1	169	0.25	338	0.5	33	0.819	0.545
60	1.5	170	0.25	340	0.5	35	0.866	0.574
65	1.5	171	0.5	342	1	37	0.906	0.602
70	1.5	173.5	1	347	2	38.25	0.940	0.619
75	2	176.5	1.5	353	3	39.25	0.966	0.633

A.2:

屈折率を求めるグラフ



A.3:

 δ の最小値を求めるグラフ

離れた場所に置いたスクリーンを観測することによって、 δ が最小値をとる点をかなり高い精度で測定することができる。

測定によって得られた値は、

$$\alpha = 49.00^\circ \pm 0.25^\circ, \quad \delta = 338.0^\circ \pm 0.5^\circ$$

A.4:

δ が最小の時 $d\delta/d\alpha = 0$ であるため、関係式 $\delta = 2\alpha + (N-1)(180^\circ - 2\beta)$ を α で微分することで、

$$2 - 2(N-1)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad \therefore \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{N-1}$$



また、スネルの法則 $\sin \alpha = n \sin \beta$ を微分することで次の関係式を得る。

$$\cos \alpha = n \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{n \cos \beta}{N-1}$$

この式とスネルの法則の式を2乗して和を取ると、

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = n^2 \sin^2 \beta + \frac{n^2 \cos^2 \beta}{(N-1)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{n^2} = \sin^2 \beta + \frac{\cos^2 \beta}{(N-1)^2}$$

よって、物質の屈折率 n と屈折角 β の関係が得られた。内部で複数回反射するため、光が円板と空気の境界に到達する点全てを考えることで、屈折角 β を高い精度で測定できる。

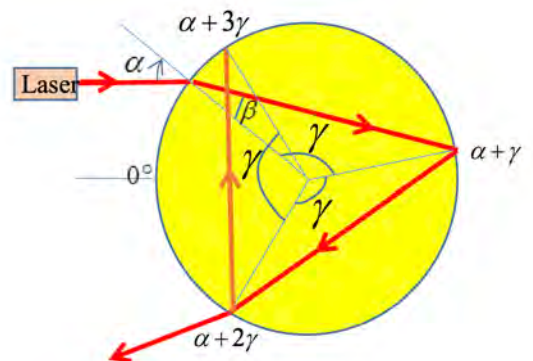
A.5:

角度 γ を右の図に示したように $\gamma = 180^\circ - 2\beta$ と定義する。実際、2回反射した後の光の出口の位置は入射の点と非常に近い位置にある。

測定は k 回反射した光が円板の側面に達する点の位置をなるべく多くの k について測定する。

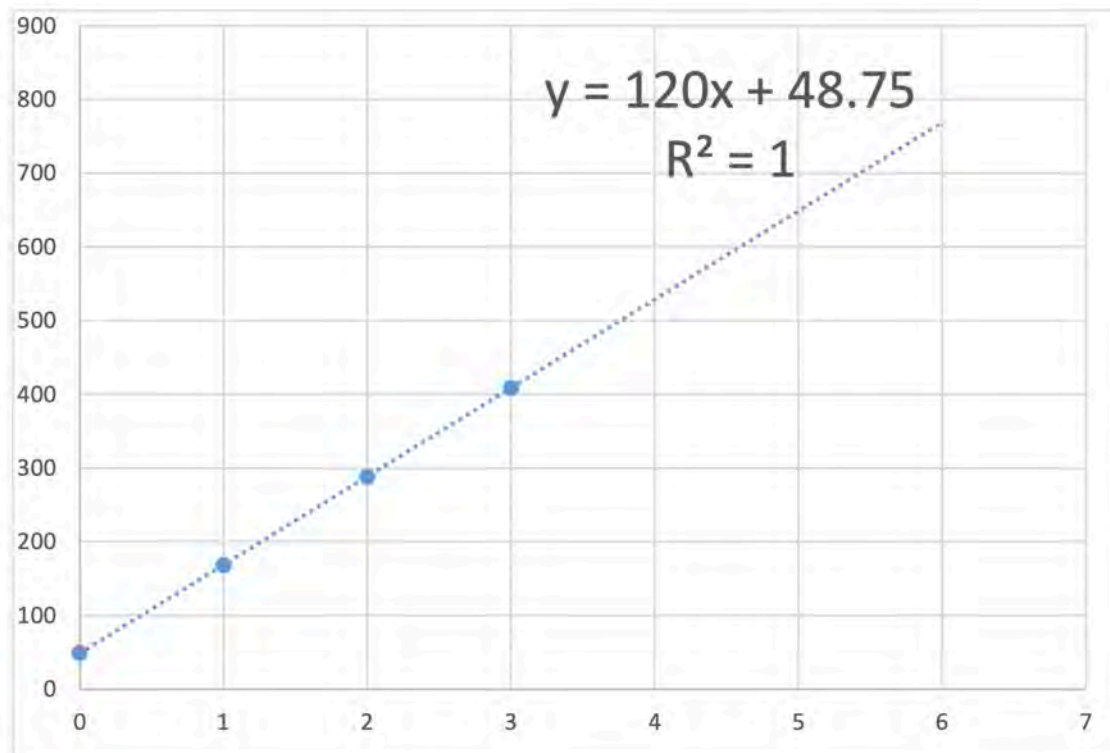
その結果得られた結果が以下ようになる。

k	$\alpha + k\gamma$
0	49
1	168.5
2	288.5
3	409



注意: $N = 3$ の場合、 $k > 3$ の反射光については、この例のように、到達点がそれよりも反射回数が少ない点と一致するため、測定できない。

次のグラフは $y = \alpha + k\gamma$ 対 k のグラフであり、回帰直線の傾きから γ を得る:



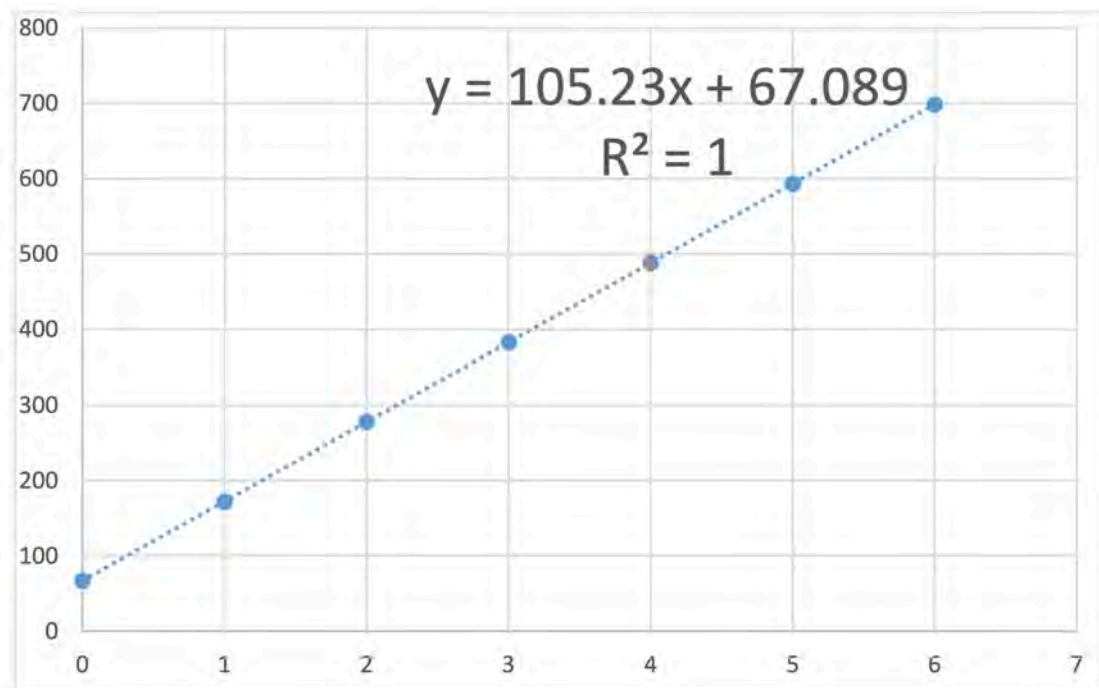
$\gamma = 120^\circ$ から $\beta = 30^\circ$ となるため、A.4 で求めた式を用いて屈折率を得る:

$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 / (N - 1)^2}} = 1.512$$

A.6:

まず、 $N = 4$ の光、つまり、4回反射して出てきた光を見つける。 $N = 4$ に対する δ_{\min} が得られるまで入射角を変化させる。A.5の時と同様に、光が円板と空気の境界に当たった回数 k の関数として $\alpha + k\gamma$ を測定する:

k	$\alpha + k\gamma$
0	67
1	172
2	278
3	383
4	488
5	593
6	698.5

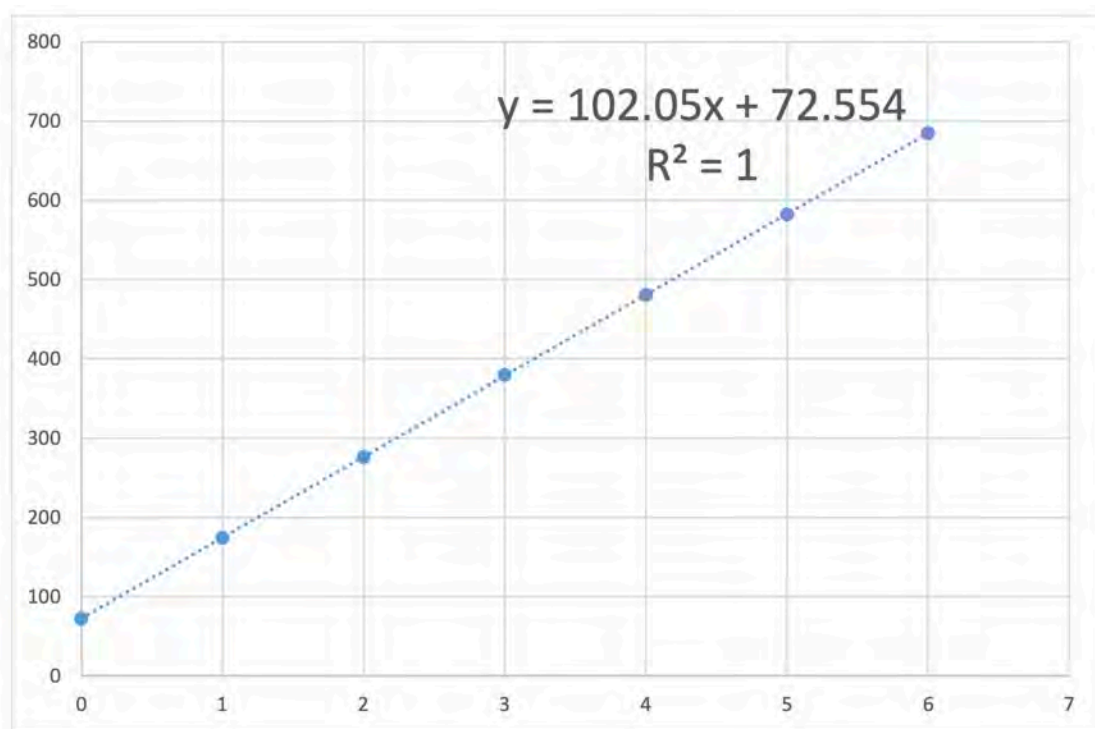


$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 / (N - 1)^2}} = 1.511$$

これを $N = 5$ の場合でも繰り返す:

$N = 5$ の光, つまり, 5回反射して出てきた光を見つける. 入射角を変化させて δ_{\min} となる点を見つけて, A.5の時と同様に $\alpha + k\gamma$ を光が境界に当たった回数 k の関数として測定する:

k	$\alpha + k\gamma$
0	72.5
1	174.5
2	276.5
3	379.5
4	480.5
5	582.5
6	685



$$n = \frac{1}{\sqrt{(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 / (N - 1)^2}} = 1.519$$

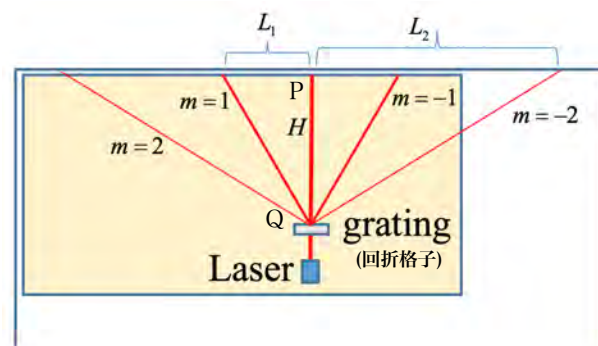
これら3つの平均をとることで次の値を得る.

$$n = \frac{1.519 + 1.511 + 1.512}{3} = 1.514 \pm 0.004$$

Part B - 回折格子のパラメーター

B.1:

テーブル上において、パーティションの前方の壁（スクリーンとして用いる）からの大体の距離が $H = 70 \text{ cm}$ であり、両サイドの壁からほぼ等距離にある点 Q を定め、印を付ける。次にスクリーン上に、点 Q からの距離が等しい（約 1 m ）の2点 P_1, P_2 を定め、この2点 $P_1 P_2$ の中点を点 P として印を付ける。レーザー光が QP を通るようにすると、レーザー光はスクリーンに垂直に入射する。





スタンダードな方法:

まず回折格子をレーザー光が通過するように設置する。回折格子をゆっくり回転して、1次と-1次、および2次と-2次の回折点が0次の回折点Pに対して対称な位置にくるように調整する。

これによりレーザー光の回折格子への入射角 $\alpha = 0$ とすることができる。回折格子を回転して α を変化させても0次の回折点の位置は変化しない。

前ページの図に示された H, L_1, L_2 を測定する。

測定した値は、例えば、 $2L_1 = 53.3 \text{ cm}$, $2L_2 = 163.5 \text{ cm}$, $H = 60.8 \text{ cm}$ となる。

ここで、 $d \sin \theta_m = m\lambda$ という関係式を用いると、1次 ($m = 1$) の場合には、 $\frac{\lambda}{d} = 0.4015$,
2次 ($m = 2$) の場合には、 $\frac{\lambda}{d} = 0.4012$ を得る。

B.2:

二つ目の方法:

入射角 $\alpha = 0$ で高次の回折光を観測するのは不可能である。そのため α の値を変化させて θ_m の値を変化させると、 θ_m の値が最小値をとる α が存在することを利用する。

関係式 $d(\sin \alpha + \sin(\theta_m - \alpha)) = m\lambda$ を α で微分して、最小値では $d\theta_m/d\alpha = 0$ となる

ことから、 $\cos \alpha - \cos(\theta_m - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta_m}{2}$ 。これより、 $2d \sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) = m\lambda$ を得る。

この方法では入射角 α を測定する必要はなく、 α の値を変化させて θ_m の最小値を見つければよい。

この方法を使って $m = 1$ や $m = 2$ の次数の測定も可能である。この場合、 $m = \pm 2$ の回折光を用いて、その2つの明点の midpoint が $m = 0$ (直進した光) の明点と一致することを確認することができる。

$m = 3$ については入射角 α の値を変化させて、 $\theta_{3,\min}$ を求め、さらに次のように L, h_3 を測定する。

下図で示したように測定した値は、例えば、 $H = 67.0 \text{ cm}$, $L = 100.2 \text{ cm}$, $h_3 = 37.8 \text{ cm}$ となる。それより、

$$\tan \theta_{3,\min} = \frac{L}{H - h_3} = \frac{100.2}{67.0 - 37.8} = 3.432 \quad \therefore \theta_{3,\min} = 73.75^\circ$$

よって、

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{3} \sin \frac{\theta_{3,\min}}{2} = \frac{2}{3} \sin \frac{73.75^\circ}{2} = 0.400$$

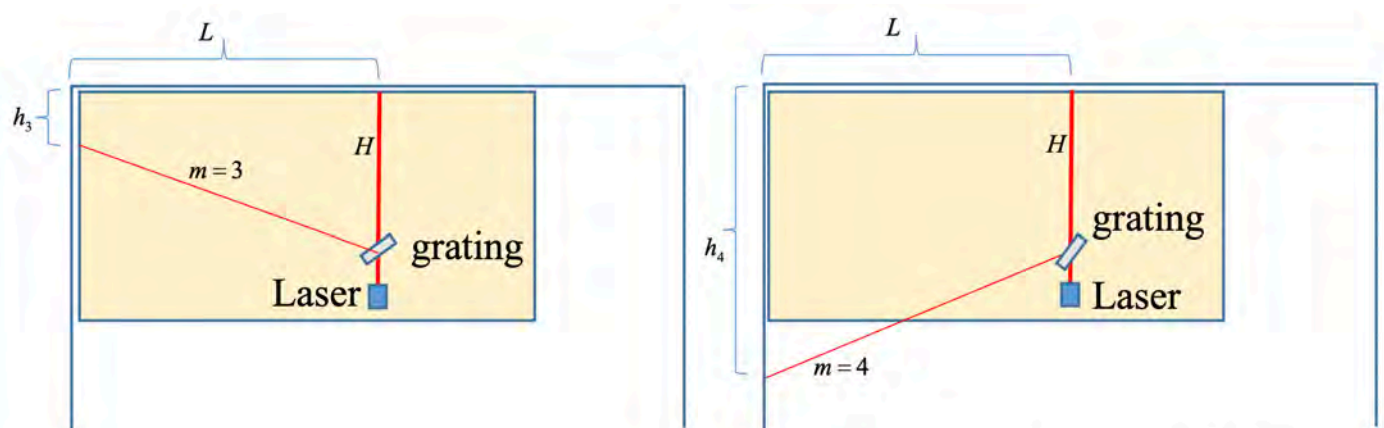
また、 $m = 4$ についても入射角 α の値を変化させて、 $\theta_{4,\min}$ を求め、さらに L, h_4 を測定する。測定値は、例えば、 $H = 67.0 \text{ cm}$, $L = 100.2 \text{ cm}$, $h_4 = 96.3 \text{ cm}$ となる。それより、

$$\tan(\theta_{4,\min} - 90^\circ) = \frac{h_4 - H}{L} = \frac{96.3 - 67.0}{100.2} = 0.2924 \quad \therefore \theta_{4,\min} = 106.3^\circ$$

よって、

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{2}{4} \sin \frac{\theta_{4,\min}}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{106.3^\circ}{2} = 0.400$$

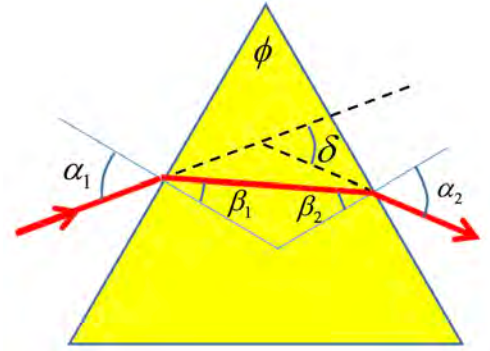
となる。



Part C – 三角プリズムの屈折率

C.1:

右図で示した光の経路と、光は逆向きでも同じ経路を通るという原理から、光の偏角 δ は入射角 α_1, α_2 を入れ替えても変化しない。従って、偏角 δ が極値(実際は最小値)をとるのは、完全に対称つまり $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合である。この時、 $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\phi}{2}$ が成り立つ。



このように対称な場合、入射角 α は $\alpha = \frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}$

の関係を満たし、スネルの法則から、 $\sin\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\phi}{2}\right) = n \sin \frac{\phi}{2}$ が得られる。

ここからはプリズムが完全に正三角形でないを考える。プリズムの3つの頂角を $i = 1, 2, 3$ で $\phi_i = 60^\circ + 2\varepsilon_i$ とする。この3つの角の和をとることで、 $\sum \varepsilon_i = 0$ がわかる。また、

$\beta_i = 30^\circ + \varepsilon_i$ である。この時、 $\phi = 60^\circ$ の時の δ を δ_0 として、 $\delta_{\min} = \delta_0 + 2\Delta_i$ と書ける。

スネルの法則から、 $\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ + \Delta_i + \varepsilon_i\right) = n \sin(30^\circ + \varepsilon_i)$ となる。

微小角の近似 ($\cos(\Delta_i + \varepsilon_i) \approx 1$, $\sin(\Delta_i + \varepsilon_i) \approx \Delta_i + \varepsilon_i$ 等) を用いると、

$\sin\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right) + \cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \sin 30^\circ + n \cos 30^\circ \cdot \varepsilon_i$ となる。

$\phi \approx 60^\circ$ の場合に成り立つ上のスネルの法則の結果を用いると、両辺の第1項同士が等しく、

$\cos\left(\frac{\delta_0}{2} + 30^\circ\right)(\Delta_i + \varepsilon_i) = n \cos 30^\circ \cdot \varepsilon_i$ となる。

3つの頂点の角度の平均をとると、 $\langle \Delta_i \rangle = 0$ であるから、これにより次の関係式、

$$n = 2 \sin\left(\frac{\langle \delta_{\min} \rangle}{2} + 30^\circ\right)$$

が得られる。

C.2:

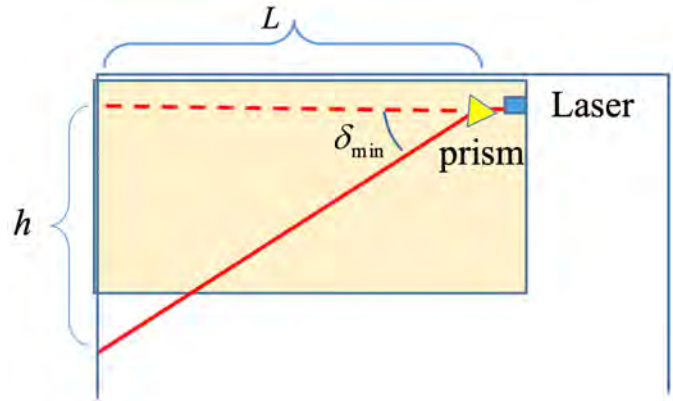
できるだけ長い距離で測定するために、右図のようにセットアップする。プリズムがない場合にはレーザー光がスクリーン(試験会場のパーティションの壁)に垂直に入射するようにする。

粘着テープを使って板(12A)をテーブルに固定し、その上にプリズムホルダー(12B)とプリズム(12D)を乗せる。

プリズムを回転させて最小偏角 δ_{\min} を見つけ、そのときの以下の値を測定する。

プリズムの各頂点についてそれぞれ測定を行う。

測定した値は、例えば、以下の表のようになる:



Corner No.	L	h	δ_{\min}
1	141.6 ± 0.2 cm	175.2 ± 0.3 cm	$51.05^\circ \pm 0.1^\circ$
2	141.0 ± 0.2 cm	167.1 ± 0.3 cm	$49.84^\circ \pm 0.1^\circ$
3	140.7 ± 0.2 cm	171.4 ± 0.3 cm	$50.62^\circ \pm 0.1^\circ$

δ_{\min} の誤差:

$$\tan \delta_{\min} = \frac{h}{L} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \delta_{\min}} \Delta \delta_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 + \left(\frac{h \Delta L}{L^2}\right)^2}$$

よって、

$$\Delta \delta_{\min} = \cos^2 \delta_{\min} \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 + \left(\frac{h \Delta L}{L^2}\right)^2}$$

測定した値を代入すると、

$$\Delta \delta_{\min} = \cos^2 51.05^\circ \sqrt{\left(\frac{0.3}{141.6}\right)^2 + \left(\frac{175.2 \cdot 0.2}{141.6^2}\right)^2} = 0.0017 \text{ rad} = 0.1^\circ$$

よって3つの角の平均値における誤差は、

$$\Delta \langle \delta_{\min} \rangle = \frac{0.1^\circ}{\sqrt{3}} = 0.06^\circ = 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

とわかる。



表より δ_{\min} の平均値 $\langle \delta_{\min} \rangle = 50.50^\circ$ が得られる.

よって、プリズムの屈折率は、

$$n = 2 \sin \left(\frac{\langle \delta_{\min} \rangle}{2} + 30^\circ \right) = \sin \left(\frac{50.50^\circ}{2} + 30^\circ \right) = 2 \sin 55.25^\circ = 1.6433$$

その誤差は、

$$n = 2 \cos 55.25^\circ \cdot \frac{1}{2} \Delta \langle \delta_{\min} \rangle = \cos 55.25^\circ \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-4}$$

従って、

$$n = 1.6433 \pm 0.0006$$

文献では $n = 1.6425 \pm 0.0007$ とあるが、これはレーザー光の波長が品物によって異なり、 $\pm 10 \text{ nm}$ 程度のばらつきを持つためである.