

ゼロ長ばねとスlinkyコイル

ゼロ長ばね (Zero Length Spring : ZLS) とは、力とばねの長さとは比例するようばねである。 L_0 を最小の長さ、つまり、ばねが伸びていない状態の長さとして、 $L > L_0$ のときの力は $F = kL$ となる。 Figure 1 は、ZLS における力 F とばねの長さ L の関係を表し、直線の傾きはばね定数 k である。

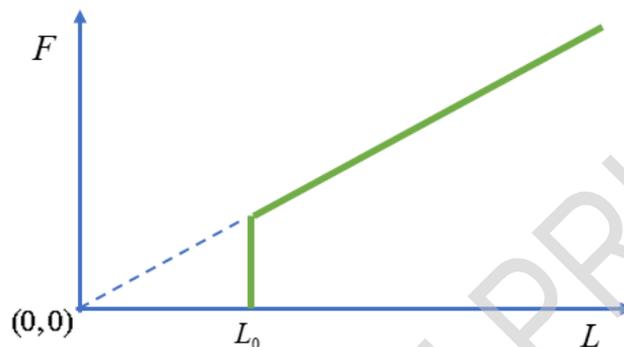


Figure 1: ばねの長さ L と力 F の関係

ZLS は地震観測において有用であり、これを用いて重力加速度の大きさ g の変化を極めて高精度に測定することができる。ここでは、重さ Mg が kL_0 よりも大きい、均質な ZLS を考える。ばねの相対的な柔らかさを表す無次元の比、 $\alpha = kL_0/Mg < 1$ を導入する。よく知られたスlinkyというおもちゃはそのような ZLS の一つである (そうでない場合もある)。

Part A: 静力学 (3.0 points)

A.1 伸びていない状態の ZLS のある微小部分 (長さ $\Delta\ell$) を考える。ばねが外力 F によって引き伸ばされることにより、この微小部分も引き伸ばされる。引き伸ばされた後の長さ Δy を $F, \Delta\ell$ およびばねのパラメータを用いて表せ。ただし、重力の影響はないものとする。 0.5pt

A.2 微小部分 (長さ $\Delta\ell$) を長さ Δy まで引き伸ばすのに必要な仕事 ΔW を求めよ。 0.5pt

これ以降、ばねの特定の点を指定するのに、伸びていない状態での下端からの距離 ℓ ($0 \leq \ell \leq L_0$) を用いる。ばねのあらゆる点について、この ℓ は、ばねが伸びても変わらない。

A.3 このばねの上端を持ってぶら下げたとして、ばねは自重によって伸びる。伸びて平衡状態になったばね全体の長さ H はいくらになるか？答えは L_0 と α を用いて表せ。 2.0pt

Part B: 動力学 (5.5 points)

実験によれば、ばねが吊るされて静止している状態から手放されると、上から徐々に縮んでいくが、下の方には静止したままの部分が残る (Figure 2 を見よ)。時間の経過とともに、縮んだ部分はかたまりとなって下方へ移動し、ばねのひと巻ひと巻をくっ付けていって長くなる。一方、静止している部分の長さは短くなっていく。ばねの各点は、移動部分とその点に達してから初めて動き出す。ばねの最下端は、ばね全体が縮みきって伸びていないときの長さ L_0 になるまで動かない。その後、縮んだばねは傾いたりすることなく 1 個の剛体として重力による鉛直落下を続ける。



Figure 2: 左: スリンキーの自由落下中に撮影した連続写真. 右: ばねの自由落下中の移動する部分 (part I) および静止している部分 (part II).

以下の設問には、上記のモデルに基づいて解答すること。空気抵抗は無視してよいが、 L_0 を無視してはならない。

B.1 ばねが手放された瞬間から、縮みきって最小の長さ L_0 になるまでの時間 t_c を求めよ。答えは、 L_0, g および α を用いて表せ。また t_c の数値を計算せよ。ばねのパラメータは、 $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ および $M = 0.201 \text{ kg}$ とし、重力加速度 g は 9.80 m/s^2 とせよ。 2.5pt

B.2 この設問においては ℓ を、ばねの part I (Figure 2 の移動している部分) と part II (静止している部分) の境界を指定するために使う。ある瞬間に、静止している部分の質量が $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$ であり、このとき移動している部分が一様な瞬間速度 $v_I(\ell)$ で運動していたとする。この瞬間 (静止している部分が残っているとき) の、移動している部分の速度が $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ となることを示し、定数 A および B を L_0, g および α を用いて表せ。 2.5pt

B.3 B.2 に基づいて、手放されてから地面に達するまでの運動の間で、ばねの移動している部分の最小の速さ v_{\min} を求めよ。答えは L_0, α, A および B を用いて表せ。 0.5pt



Part C: エネルギー論 (1.5 points)

- C.1 ばねが手放された瞬間から地面に達する直前までの間に、熱の発生によって失われた力学的エネルギーの量 Q を計算せよ。答えは L_0, M, g および α を用いて表せ。 1.5pt

DELEGATION PRINT