

電子レンジの物理

本問では、電子レンジにおけるマイクロ波発生、および、それを利用した食品加熱について議論する。マイクロ波は「マグネトロン」と呼ばれる装置で発生させられる。Part A はマグネトロンの作動に関わる内容であり、Part B では食べ物のマイクロ波吸収を扱う。

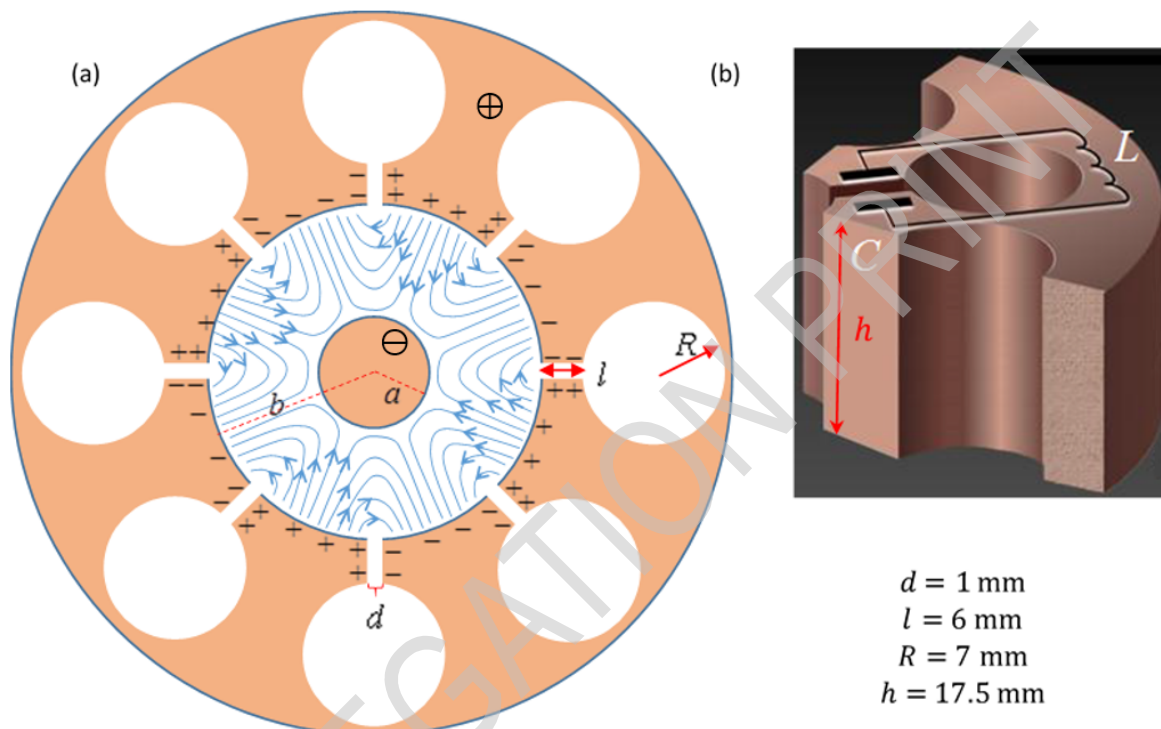


Figure 1

Part A : マグネトロンの構造と動作 (6.6 points)

マグネトロンとは、マイクロ波をパルス（用途：レーダーなど）または連続波（用途：電子レンジなど）として発生させるための装置である。マグネトロンは自己増幅振動モードを持つ。マグネトロンに一定電圧（直流電圧）を印加することにより、このモードが素早く励起される。このようにして生成されたマイクロ波がマグネトロンの外に伝えられる。

電子レンジ中のマグネトロンで典型的なものは、銅製で円柱状の陰極（半径 a ）と、それを取り囲む陽極（半径 b ）から成る。後者は、肉厚の円筒状の殻から円柱状の空洞をいくつか削り出した形状をしている。各空洞は「共振器」と呼ばれる。共振器の1つは、マイクロ波を電子レンジの外に伝えるアンテナと繋がっているが、以後このアンテナは無視する。内部の空洞は全て真空である。Figure 1(a) に示されているような、8つの共振器がある典型的なマグネトロンを考える。1つの共振器の3次元構造が Figure 1(b) に示されている。図中に示されているように、8つの空洞の各々がコイル-コンデンサー（LC）共振回路として振る舞い、その動作周波数は $f = 2.45 \text{ GHz}$ である。

静的で一様な磁場がマグネトロンの軸方向（Figure 1(a) で紙面を奥から手前に貫く方向）にかけられている。さらに、一定の電圧が陽極（正のポテンシャル）と陰極（負のポテンシャル）の間にかけている。陰極から放出された電子は陽極に達して陽極を帯電させ、ある振動モードを励起する。この振動モードは、隣り合う2つの共振器を互いに逆符号に帯電させるようなモードである。空洞における共振によって、この振動が増幅される。



印加された一定電圧に由来する静電場に加え、上で説明された過程によって、前述の振動数 $f = 2.45$ GHz の交流電場が陰極と陽極の間の空間に発生させられる (Figure1(a) に交流電場による電気力線が青い線で示されている。静電場によるものは描かれていない)。定常状態において、陽極と陰極の間の交流電場の典型的な振幅は、その場所の静電場の $\frac{1}{3}$ である。陰極と陽極の間の空間における電子の運動は、静電場と交流電場の双方の影響を受ける。その結果、陽極に達する電子は、静電場から得るエネルギーの約 80% を交流電場に受け渡してしまう。陰極から放出された電子のうちの一部は陰極に戻って、電子を追加で放出させ、交流電場をさらに増幅する。

それぞれの共振器は、Figure1(b) に示されているようにコンデンサーとコイルとみなせる。静電容量は共振器表面の平面状の部分から主に生じており、インダクタンスは円柱状の部分に由来する。共振器中の電流は、円柱形の空洞の表面に非常に近いところを流れており、この電流によって生じる磁束密度の大きさは理想的な無限長ソレノイドの場合の 0.6 倍であると仮定する。共振器の各部分の長さのパラメータは Figure 1(b) で与えられている。真空の誘電率と透磁率はそれぞれ $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$, である。

- A.1** 上で与えられたデータを用いて、1つの共振器の周波数 f_{est} を求めよ。(本問で得られる答えは、本来の値 $f = 2.45$ GHz と異なっていて差しつかえない。ただし、以降の問題では、**本来の値**の方を使用せよ。) 0.4pt

以下の問題 A.2 は、マグネトロンそのものを扱っておらず、関連する物理の導入を目的としている。 y 軸負方向を向いた一様な電場 $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$ と z 軸正方向を向いた一様な磁束密度 $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ のもとで自由空間中を運動する電子を考える (E_0 と B_0 は正の値であり、 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ は右手系をなす単位ベクトルである)。電子のドリフト速度 \vec{u}_D とは、電子の平均の速度のことである。 m と $-e$ は電子の質量と電荷をそれぞれ表す。

- A.2** 以下の2つの場合のそれぞれについて \vec{u}_D を求めよ。さらに、 $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$ の間に電子が動く (実験室系における) 軌道も解答用紙に描け。 1.5pt
- $t = 0$ での電子の速度が $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$ である場合。
 - $t = 0$ での電子の速度が $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$ である場合。

再びマグネトロンについての議論に戻る。陰極と陽極の間の距離は 15 mm である。先に述べた交流電場へのエネルギー損失のために、各電子の最大の運動エネルギーが $K_{\text{max}} = 800$ eV を超えないことを仮定する。一定磁束密度の強さは $B_0 = 0.3$ T とする。電子の質量と電荷はそれぞれ $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C とする。

- A.3** 電子のこのような軌道運動が円形とみなせるような慣性系で見たとき、この円形軌道の半径 r がとりうる値の最大値を数値的に見積もれ。 0.4pt

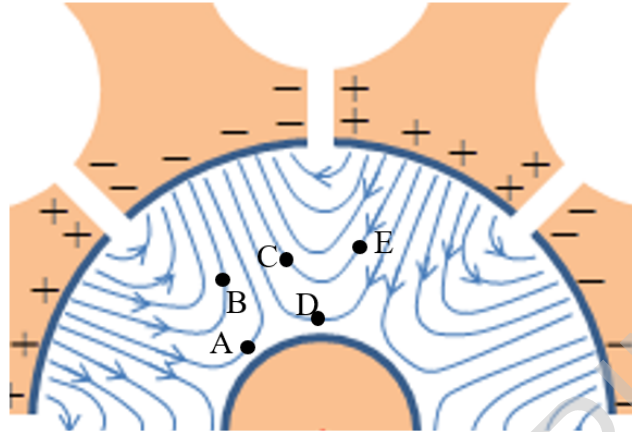


Figure 2

- A.4** Figure 2 は、陽極と陰極の間の交流電場による電気力線のある特定の時刻において描いたものである（静電場によるものは描かれていない）。この時刻において、A, B, C, D, E の位置にいるそれぞれの電子は、陽極方向にドリフトするか、陰極方向にドリフトするか、動径方向と完全に垂直な方向にドリフトするか。解答用紙の表の対応する箇所にチェックマークを書いて答えよ。 1.2pt

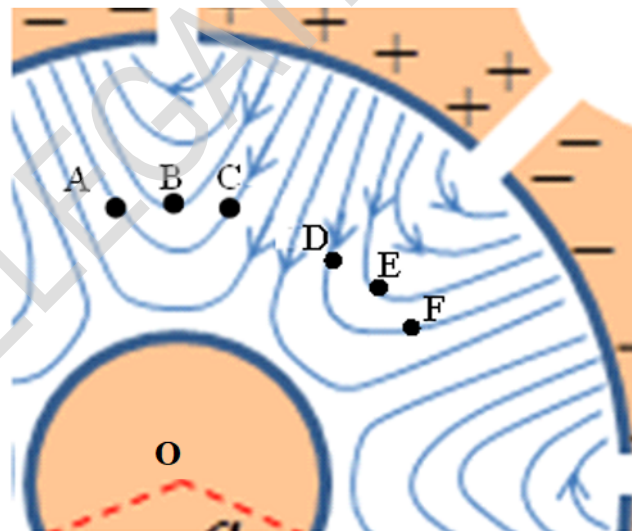


Figure 3

Figure 3 は、陽極と陰極の間の交流電場の電気力線のある特定の時刻において描いたものである（静電場によるものは描かれていない）。この時刻において、6 個の電子の位置が A, B, C, D, E, F で示されている。全ての電子は陰極から等距離にある。

- A.5** Figure 3 に示された状況を考える．電子のペア AB, BC, CA, DE, EF, DF のそれぞれについて，2つの電子の位置ベクトル（陰極の中心 O が基準）がなす角度は，ドリフトによって増加するか，減少するか，決められないか．解答用紙の表の対応する箇所にチェックマークを書いて答えよ． 1.2pt

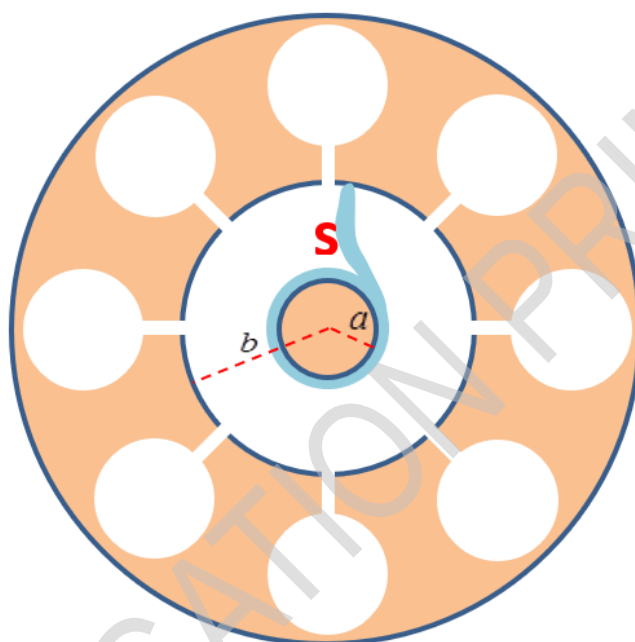


Figure 4

問題 A.5 で見出された電子たちの動きのパターンは，陰極と陽極の間の空間にある電子たちを車輪のスポークのような形状へと集中させる機構として働く．そのようなスポークの1つが，Figure 4 に示されている（Sと書かれた部分）．

- A.6** 同じ時刻における他のスポークたちを解答用紙に描け．スポークたちが回転していく方向を矢印で示し，その回転の平均の角速度も計算せよ． 0.8pt

陰極と陽極の間のちょうど中間の位置における全電場の値が，陰極と陽極を結ぶ動径方向に沿った静電場の平均値に等しいものと近似する．また，その領域ではスポークが近似的に動径方向を向いているとする．陰極と陽極の半径（それぞれ a , b ）は Figure 4 に示されている．

- A.7** ここまでに説明されたやり方でマグネトロンを動作させるために印加する必要がある一定電圧の近似的な表式を求めよ．（求まる表式は，マグネトロンを動作させるために必要な最低限の電圧の近似値であり，現実的に最適な値はもう少し高い．） 1.1pt

Part B : マイクロ波と水分子の相互作用 (3.4 points)

この Part では，（マグネトロンのアンテナから電子レンジの調理室へと放出される）マイクロ波の料理への応用を扱う．すなわち水などの，エネルギーの散逸を生じる誘電性の物質を温めるために使用することを考える．純粋な水，または，薄い食塩水（スープ）が対象である．



電気双極子は、同じ大きさで逆符号の2つの電荷 q と $-q$ が短い距離離れて配置されたものである。電気双極子ベクトルとは、負の電荷から正の電荷に向かう方向に大きさ $p = qd$ を持つベクトルである。

大きさが $p_0 = |\vec{p}(t)|$ で一定のモーメント $\vec{p}(t)$ を持つ1つの双極子に、時間変化する電場 $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ がかけられている。双極子と電場のなす角度を $\theta(t)$ とする。

- B.1** 電場が双極子に与える力のモーメント $\tau(t)$ の大きさの表式、および、電場から双極子に単位時間あたりに与えられるエネルギー（仕事率）の表式を、 p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ とそれらの微分を用いて書け。 0.5pt

水分子は極性分子であるから、電気双極子とみなすことができる。液体の水では分子間に強い水素結合が働いているため、各水分子を独立した双極子と扱うことはできない。それよりも、分極ベクトル $\vec{P}(t)$ 、すなわち双極子モーメント密度（水分子集団における双極子モーメントの体積平均）、を用いる方がよい。分極 $\vec{P}(t)$ は（マイクロ波の）交流電場の局所的な値 $\vec{E}(t)$ に平行であり、交流電場の振幅に比例する振幅で振動するが、その位相は δ 遅れている。

水中のある場所における交流電場は $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$ で与えられ、分極 $\vec{P}(t) = \beta\epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$ を生じる。ここで、 $\omega = 2\pi f$ であり、無次元量 β は水の物性値である。

- B.2** 単位体積あたりの水によって単位時間あたりに吸収されるエネルギーの時間平均 $\langle H(t) \rangle$ を求めよ。ただし、時間に依存する周期関数 $f(t)$ の周期 T についての時間平均は以下の式で定義される。 0.5pt

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

さて今度は、電磁波の水中における伝播を考える。（ある振動数における）水の比誘電率は ϵ_r であり、対応する水の屈折率は $n = \sqrt{\epsilon_r}$ である。単位時間あたりの電場のエネルギー密度は $\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2$ で与えられる。エネルギー密度を時間平均したものは、電場と磁場について等しい。

- B.3** 電磁波のエネルギー流束密度の時間平均（単位時間あたりに単位面積あたりを通過するエネルギーの平均）を $I(z)$ で表すことにする。 z は水への侵入の深さであり、電磁波は z 方向に伝播するものとする。エネルギー流束密度 $I(z)$ の z 依存性の表式を求めよ。水面におけるエネルギー流束密度 $I(0)$ が結果に現れていて良い。 1.1pt

位相の遅れ δ は水分子同士の相互作用の結果である。 δ は無次元の誘電損失係数 ϵ_ℓ と比誘電率 ϵ_r に $\tan \delta = \epsilon_\ell / \epsilon_r$ の形で依存する（ ϵ_ℓ と ϵ_r は電磁波の角周波数 ω と温度に依存している）。 δ が十分に小さければ、深さ z における電場の値は次の式で与えられる：

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2}nk_0z \tan \delta} \sin(nk_0z - \omega t) \quad (2)$$

ここで $k_0 = \omega/c$ であり、 $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ は真空中の光速である。

- B.4** 近似 $\tan \delta \approx \sin \delta$ を利用し、問題 B.2 で定義された係数 β を他のパラメータを用いて表せ。 0.6pt

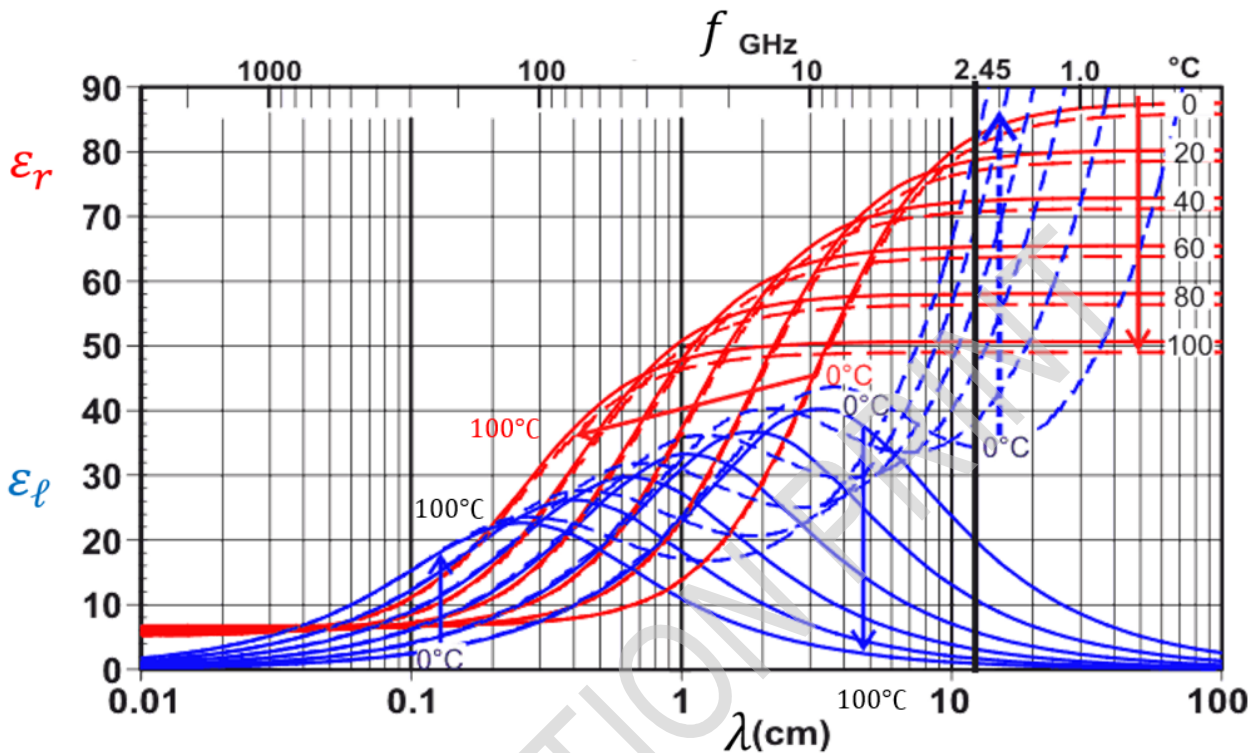


Figure 5. 矢印は、温度を 0°C から 100°C にあげていったときに、曲線がどのように変化していくか（各曲線がどの温度に対応しているか）を示している。

Figure 5 は、 ϵ_l （青い線）と ϵ_r （赤い線）を、純粋な水（実線）と薄い食塩水（破線）の両方について、波長または振動数の関数としていくつかの異なる温度について描いたものである。角周波数 $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ は太い垂直な線で示されている。以下では、この角周波数のマイクロ波のみを考える。

B.5 以下の問題に取り組む際には Figure 5 を用いよ。

0.7pt

- 20°C の水について、エネルギー流速密度の値が $z = 0$ における値の半分になる長さである侵入長 $z_{1/2}$ の表式を求めよ。
- マイクロ波の水への侵入長は、水の温度を増加させたときに増加するか、減少するか、変化しないか。解答用紙の表の対応する箇所にチェックマークを書いて答えよ。
- マイクロ波のスープ（薄い食塩水）への侵入長は、スープの温度を増加させたときに増加するか、減少するか、変化しないか。解答用紙の表の対応する箇所にチェックマークを書いて答えよ。