

第17回全国物理コンテスト 物理チャレンジ2021

第1チャレンジ 実験課題レポート

レポート表題

二種類の方法による運動の法則の検証

第1チャレンジ番号 : 2128045

氏名 : 山本 裕太

学校名または

学校のある

卒業校名 : 灘高等学校

都道府県名 : 兵庫県

学年 : 高等学校1年生 (中等教育学校4年生、高等専門学校1年生)

実験をした

主な場所 : 自宅・友人宅・寮など (私的な場所)

補足

(その他の場合) :

共同実験者1 氏名

第1チャレンジ番号

共同実験者2 氏名

第1チャレンジ番号

実験課題に取り組んだ感想

実験自体とても楽しめましたが、今回の実験では誤差について少し深掘りして考えており、そちらもとても楽しかったです。

方法を考え始めた時期

1月

実験を始めた時期

5月

実験に取り組んだ期間

約 30 日間

二種類の方法による運動の法則の検証

灘高等学校 1 年 山本裕太

1 要約

今回の一つ目の実験では、円錐振り子を用いて運動方程式が成り立っていることを示した。鉄、銅、真鍮、アルミニウムの四種類の金属球を用いて、円錐振り子の角度を様々に変えてそれぞれの場合の周期を測った。次に円錐振り子の中心方向の運動方程式の各因子に測定した値を代入して、Excel を用いてグラフ化した。この方法により、加速度と力の間には比例関係があることを確認した。また、得られた比例係数は誤差 10 % 程度で金属球の質量 m に一致した。ただしデータを線形近似する際は最小二乗法を用い、円錐振り子の振れ角の測定にも工夫を凝らした。誤差の原因については、周期を測る際のブレだけでなく振り子と測定に使用したカメラとの位置関係や空気抵抗も考え、論理的に議論した。これは金属球の種類によって誤差の大きさに違いがあることに気づき、不思議に思ったためである。

二つ目の実験では、三種類の慣性モーメントの異なる物体を用意した。斜面上で物体を転がし、その様子を動画にとって加速度を求めて、回転運動方程式と運動方程式を連立させて得られる方程式に合致する結果が得られるか調べた。実際に満足できる誤差の範囲内で一致を確認した。ここで、斜面上を転がる物体が滑ることがないように斜面上の素材にも気を使って、比較実験も行っている。

第 I 部

円錐振り子による運動の法則の検証

2 実験の目的

今回の実験は、運動方程式 $F = ma$ に従う、力と加速度の比例関係およびその比例係数が m になることを確認することを目的としている。今回は円錐振り子を用いた。円錐振り子の中心向き成分の運動方程式は、

$$ma_r = F \quad (1)$$

ただし、 F を遠心力、 a_r を向心加速度、 θ を振れ角、 r を回転半径、 l を円錐振り子の長さとして、

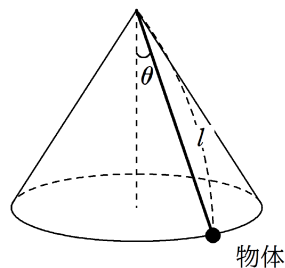


図 1 円錐振り子 ([1] より)

$$F = mg \tan \theta \quad (2)$$

$$a_r = r\omega^2 = l \sin \theta \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \quad (3)$$

である。 l, θ, T, m は測定することができるので、 a_r, F は理論的に計算で出すことができる。何回か振れ角 θ を変えて実験する事で F の値を変化させ、測定値が式 1 を満たすかどうかを調べることで、力と加速度の関係を明らかにすることができる。当初は通常の振り子あるいはばねによる物体の単振動の運動の様子をビデオカメラで撮影し、各時刻における物体の変位を調べることで、加速度と力の関係を調べようとしたが、円錐振り子であれば等速円運動であるために測定が容易で、摩擦の影響を考えなくてよいためこちらのほうが精度を上げることができると考え、円錐振り子に変更した。ここがこの実験における一つの独創性である。また、振れ角 θ の測定精度を上げるため、二方向から角度を測定する、1 周目と 9 周目の平均を取る、(詳細は **3 実験手法** で述べる) などといった自分なりの工夫を加えた。また実験結果の評価には最小二乗法を使用している。

3 実験手法

3.1 実験で使用した器具，材料

今回の実験で使用したものは，以下のようである．

- ・鉄球（直径 1.0 cm）
- ・銅球（直径 2.0 cm）
- ・真鍮球（直径 2.0 cm）
- ・アルミ球（直径 2.0 cm）

同じ条件下にするため，できるだけ球の直径は揃えた．（鉄球に関しては直径 2.0 cm のものが手に入らなかったため，1.0 cm とした．）



図2 実験に用いた金属球（左から鉄球，銅球，真鍮球，アルミ球）

- ・糸（裁縫用）
- ・電子ばかり
- ・セロハンテープ
- ・ストップウォッチ
- ・ビデオカメラ

今回は PC の液晶上部にあるフロントカメラを用いた．二台使用した．以後”カメラ”と呼ぶ．

また，実験データの解析は表計算ソフト Excel を用いて行う．

3.2 実験方法

以下に今回の実験の手順を示す。

1. 円錐振り子の長さ $l = 50 \text{ cm}$ とするために、裁縫用の糸を $50 \text{ cm} + 10 \text{ cm}$ 程余分に切り取る。これを4本用意する。
2. 切り取った糸のどちらか一方の端をセロハンテープを用いて鉄球、銅球、真鍮球、アルミ球にしっかりと固定する。今後、この糸、セロハンテープと金属球を接着したものを”振り子本体”と呼ぶ。(下の写真は銅球の場合)

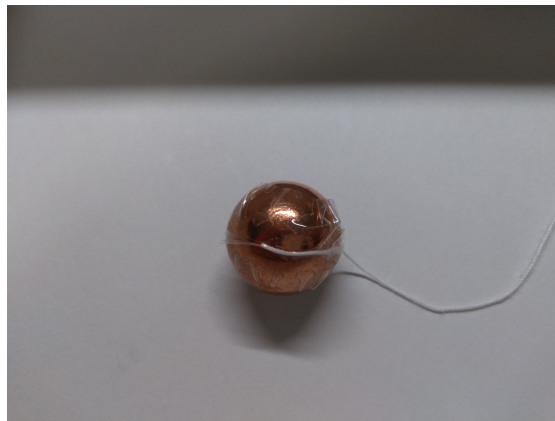


図3 糸と球の固定方法(銅球の場合)

3. 振り子本体の質量 m (鉄, 銅, 真鍮, アルミの4種類) を電子ばかりで測定する。
4. 振り子本体に対して、糸を真っ直ぐ伸ばし、金属球の中心から測って 50 cm のところに下の写真のようにセロハンテープとペンを使って印をつける。

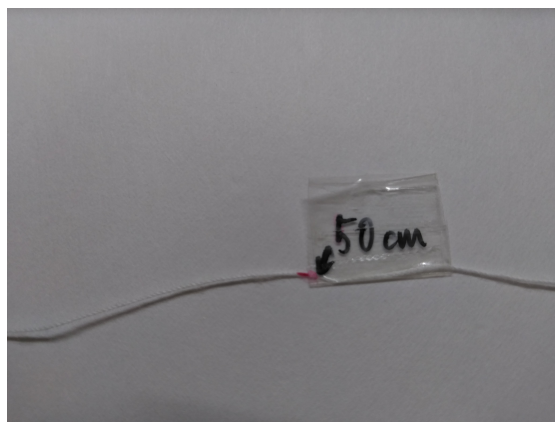


図4 セロハンテープとペンでつけた印

5. 4 でつけた印の部分が円錐振り子の支点となるように手で糸を持って円錐振り子を回し、回転が安定してきたら振り子の9周分の周期 $9T$ をストップウォッチで測る。この時、手の位置はできるだけ動かさないようにする。また、この様子を互いに 90° 隔たった二方向からそれぞれ別のカメラで動画を撮っておく。これを、円錐振り子の振れ角を適当に変えて、1種類の金属につき5回、計20回行う。(ここで、円錐振り子の支点を手で持つことによる支点の位置の微小な振動は、円錐振り子自身の運動に影響をほとんど及ぼさないと推測されるため、支点の固定は行わなかった。これは実験準備中に分かったことだが、寧ろ支点を固定してしまうと、金属球の運動を円軌道に保つことが難しくなってしまう。)

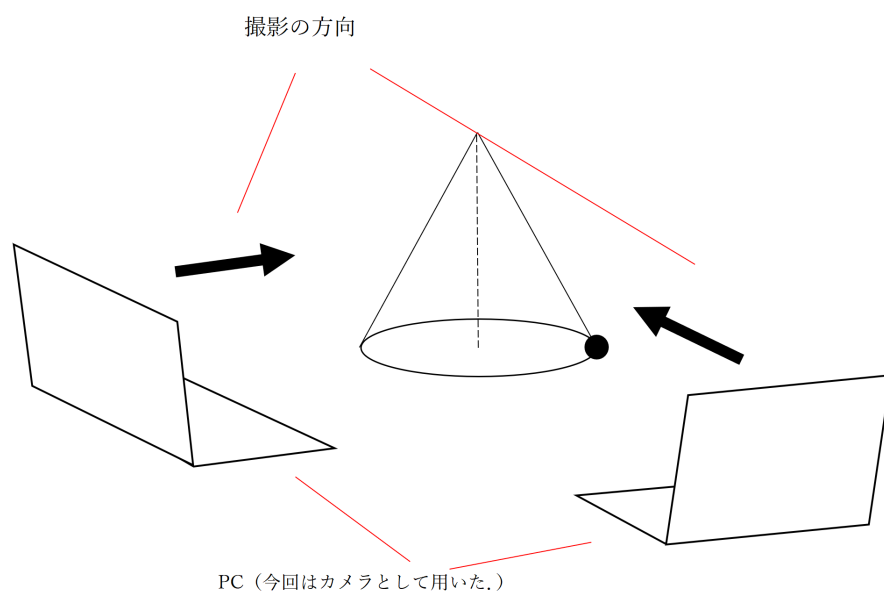


図5 撮影方法

6. 撮った動画をコマ送りで見て、測定を始めて1周目にカメラの映像内で最も右にふれたときの振り子の鉛直からの振れ角、最も左にふれたときの振れ角をそれぞれ分度器で測り、それらの平均を計算する(下図6)。これにより、回転が左右のどちらかに傾いていた場合測定結果を補正できる。続いて、これと同様に9周目でも振れ角の平均を計算し、それら1周目と9周目の振れ角に対して平均を計算する。これらの計算を2台のカメラそれぞれで行い、更にそれらの平均をとる。これを1回の測定の結果とする。これを実験回数の20回分行う。

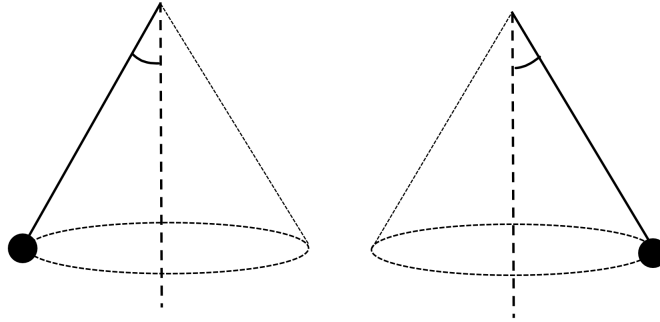


図6 左の振れ角（左図），右の振れ角（右図）

3.3 測定の原理

以下には，前章で説明した実験方法において得られたデータから結論を導き出す方法を記す．

この円錐振り子における向心加速度 a_r は，式3のように $a_r = r\omega^2$ で与えられる．これは，等速円運動に関する考察により，下図から

$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AC}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega = r\omega \cdot \omega = r\omega^2 \quad (4)$$

と求められる． F は式2のように $F = mg \tan \theta$ で与えられる．

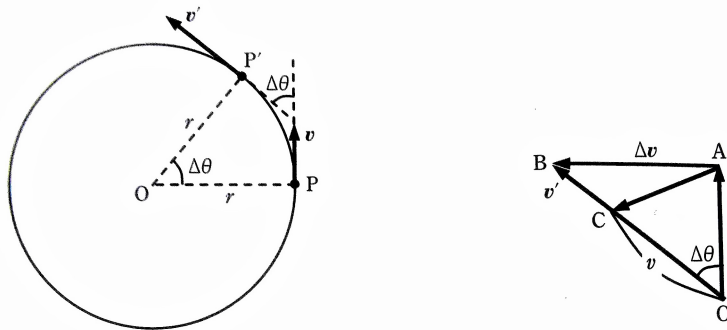


図7 向心加速度 ([2] より)

従って，以下のような計算から実験結果を吟味することができる．まず，前章6で行った20回の実験それぞれについて，ストップウォッチで測った $9T$ の値から T を計算した後，式2, 3と前章3, 6で測った m, θ の値を用いて F, a_r を計算する．ただし，計算に用いる重力加速度 g の値は，

$$g = 9.807 \text{ m/s}^2$$

とする．次に，求めた F, a_r について，対応関係があるのか，また対応関係があるならばどのような関係なのかを考察する．これにより，力と加速度について何らかの結論を導き出すことができる．

4 実験結果

4.1 質量測定の結果

電子ばかりで振り子本体の質量 m を測定した結果は、以下のようになった。

鉄： $m_{ir} = 4.2\text{ g}$

銅： $m_{co} = 37.4\text{ g}$

真鍮： $m_{br} = 35.2\text{ g}$

アルミニウム： $m_{al} = 11.9\text{ g}$

4.2 円錐振り子による θ の測定結果

まず、 θ の測定結果を記す。それぞれの金属球の実験 5 回分の測定結果を以下に示す。ただし、1 台目のカメラで撮影した一周目の左の振れ角を、”1,1,left”，1 回分の θ の測定結果の全体平均（2 台のカメラそれぞれの値を平均して算出した最終的な 1 回分の測定結果）を”全体平均”などと略記することとし、測定した θ の値は有効数字 2 桁、全体平均は Excel を使って算出された値をそのまま記載するものとする。ただし、単位は省略している。

表 1 鉄球の実験（5 回）における各 θ の値の測定結果

	1,1,left	1,1,right	1,9,left	1,9,right	2,1,left	2,1,right	2,9,left	2,9,right	全体平均
1 回目	58	63	49	51	61	56	53	51	55.25
2 回目	29	28	22	22	22	26	21	24	24.25
3 回目	75	74	75	72	77	64	52	57	68.25
4 回目	52	52	40	38	45	48	38	38	43.875
5 回目	67	68	55	55	68	66	53	52	60.5

表 2 銅球の実験（5 回）における各 θ の値の測定結果

	1,1,left	1,1,right	1,9,left	1,9,right	2,1,left	2,1,right	2,9,left	2,9,right	全体平均
1 回目	66	63	59	58	66	62	56	58	61
2 回目	42	33	32	27	34	37	25	31	32.625
3 回目	65	61	57	52	65	55	58	53	58.25
4 回目	52	44	43	37	48	45	39	40	43.5
5 回目	70	70	65	62	82	68	66	64	68.375

表3 真鍮球の実験(5回)における各 θ の値の測定結果

	1,1,left	1,1,right	1,9,left	1,9,right	2,1,left	2,1,right	2,9,left	2,9,right	全体平均
1回目	31	29	29	26	28	33	28	28	29
2回目	45	49	43	44	46	47	43	42	44.875
3回目	75	75	70	71	78	69	71	66	71.875
4回目	58	56	56	53	60	55	55	54	55.875
5回目	46	47	43	38	48	44	43	39	43.5

表4 アルミ球の実験(5回)における各 θ の値の測定結果

	1,1,left	1,1,right	1,9,left	1,9,right	2,1,left	2,1,right	2,9,left	2,9,right	全体平均
1回目	81	80	78	77	81	72	81	70	77.5
2回目	62	60	56	56	64	62	56	55	58.875
3回目	44	45	41	38	45	44	37	38	41.5
4回目	30	29	23	23	26	28	25	26	26.25
5回目	63	65	54	53	64	59	53	52	57.875

4.3 θ, T および F, a_r の計算結果

以下に、3.2で計算した θ と測定した T 、そしてそれらに対応する F, a_r をExcelで計算し有効数字3桁で表にまとめた。加えて、 F を縦軸、 a_r を横軸にとった散布図及び近似直線の方程式を示している(Excelで作成)。ここで、近似直線の傾きは、近似直線が $(a_r, F) = (0, 0)$ を通るように設定して、ExcelのLINEST関数を用いて算出し、有効数字は2桁としている。ただし、表においては単位は省略している。また、計算の簡略化のため質量の単位にはgを使用しており、グラフにkgが使っているように書かれているのは自分の誤りである。

表5 鉄球の実験(5回)における測定値の計算結果

	θ	T	a_r	F
1回目	55.3	1.12	12.9	59.4
2回目	24.3	1.35	4.42	18.6
3回目	68.3	0.979	19.1	103
4回目	43.9	1.25	8.8	39.6
5回目	60.5	1.06	15.3	72.8

表 6 銅球の実験 (5 回) における測定値の計算結果

	θ	T	a_r	F
1 回目	61	1.02	16.6	662
2 回目	32.6	1.31	6.21	235
3 回目	58.3	1.09	14	593
4 回目	43.5	1.26	8.54	348
5 回目	68.4	0.9	22.7	925

表 7 真鍮球の実験 (5 回) における測定値の計算結果

	θ	T	a_r	F
1 回目	29	1.19	6.78	191
2 回目	44.9	1.1	11.4	344
3 回目	71.9	0.822	27.8	1050
4 回目	55.9	1.03	15.5	509
5 回目	43.5	1.12	10.9	328

表 8 アルミ球の実験 (5 回) における測定値の計算結果

	θ	T	a_r	F
1 回目	77.5	0.728	36.4	526
2 回目	58.9	0.99	17.2	193
3 回目	41.5	1.15	9.89	103
4 回目	26.3	1.27	5.45	57.6
5 回目	57.9	0.997	16.8	186

以下には, 各金属球における, F を縦軸, a_r を横軸にとった散布図及び近似直線の方程式を示す.

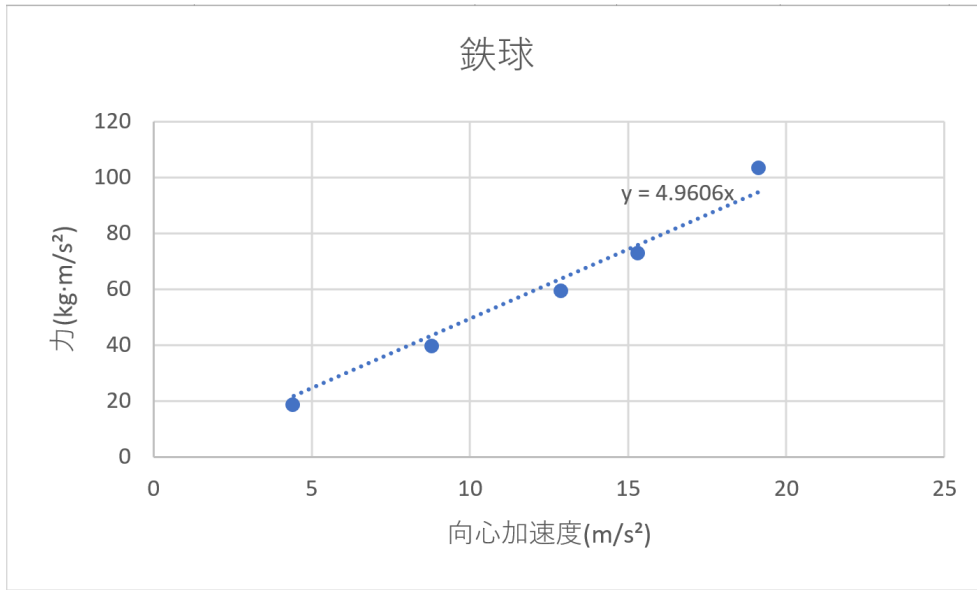


図8 鉄球 ($m_{ir} = 4.2\text{ g}$)

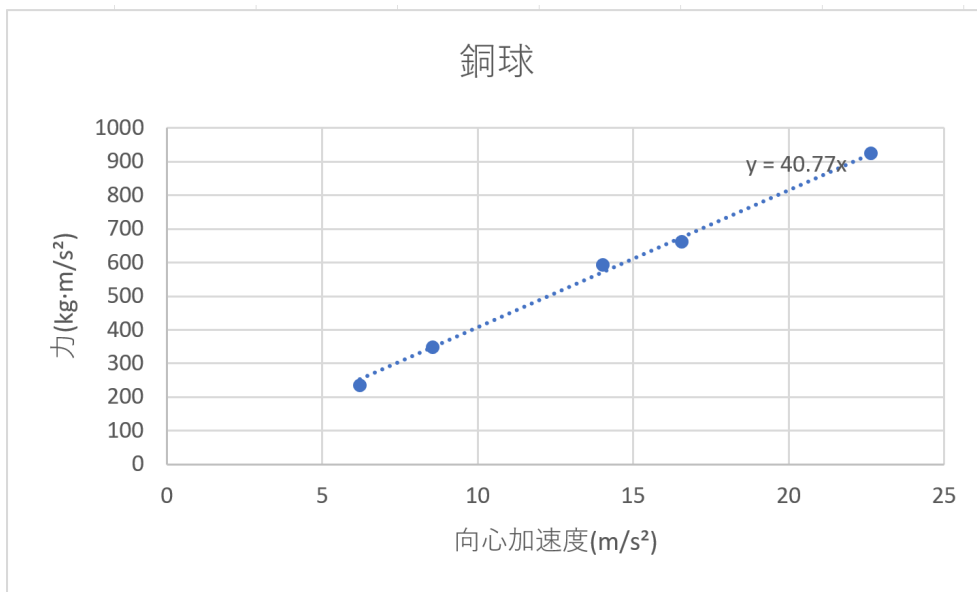


図9 銅球 ($m_{co} = 37.4\text{ g}$)

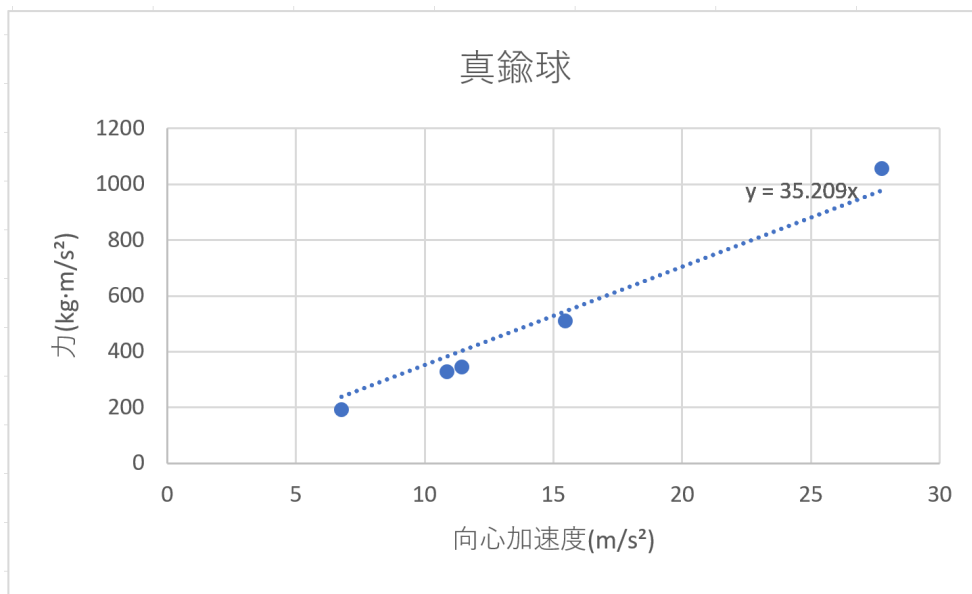


図 10 真鍮球 ($m_{br} = 35.2\text{ g}$)

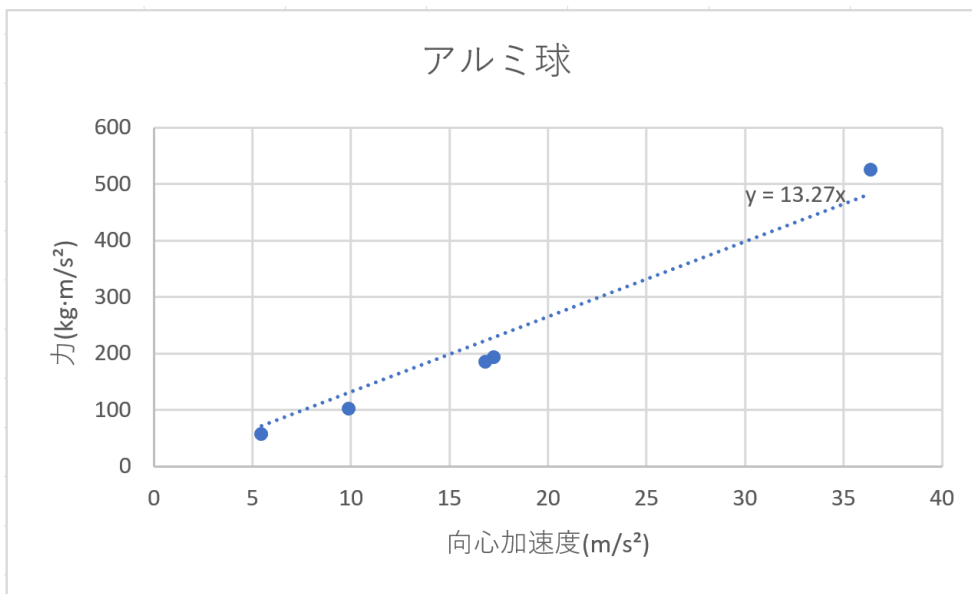


図 11 アルミ球 ($m_{al} = 11.9\text{ g}$)

5 考察

5.1 力と加速度の関係

前章の結果より、向心加速度 a_r 、力 F の間には明確な比例関係が存在すると結論付けられ、鉄球、銅球、真鍮球、アルミ球全てについて、その比例係数は物体の質量 m に近い値となっていると推測される。実際、比例係数のそれぞれの金属球における m の値との誤差は、以下のものである。

鉄球では、比例係数は有効数字 3 桁で 4.96 とおけて、差は

$$\frac{(4.96 - 4.2)}{4.2} 100 = 18.09$$

より約 18.09 % である。

銅球では、比例係数は有効数字 3 桁で 4.08・10 とおけて、差は

$$\frac{(40.8 - 37.4)}{37.4} 100 = 9.09$$

より約 9.09 % である。

真鍮球では、比例係数は有効数字 3 桁で 3.52・10 とおけて、これは、真鍮球の質量 $m_{br} = 35.2 \text{ g}$ と一致する。

アルミ球では、比例係数は有効数字 3 桁で 1.33・10 とおけて、差は

$$\frac{(13.3 - 11.9)}{11.9} 100 = 11.76$$

より約 11.76 % である。

よって、比例係数を m と置くことは妥当であると考えられる。従って、

$$F = ma$$

が成り立つと考えられる。また、この結果から F が一定であるような状況であれば m と a は反比例の関係にあるという推測もできるだろう。

5.2 理論値とのずれの要因について

ここで、求めた比例係数と m の値のずれについて考える。詳しく見てみると、どの金属球でも m よりもやや大きな値が算出されていることがわかる。すなわち、

$$\frac{F}{a_r} = \frac{mg \tan \theta}{l \sin \theta \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{mg}{4\pi^2 l \cos \theta} \frac{T^2}{1} \quad (5)$$

の値が理論値よりも大きく出ている。これについては大きく 2 つの原因が考えられる。この式 5 の中で、実験で直接測定したものに關わる因子は、 $T^2 \cdot \frac{1}{\cos \theta}$ のみである。 T に関しては、9 周分を平均した後 2 乗しているため、ストップウォッチで測る際の誤差を $\pm 0.1 \text{ s}$ とすると、 T の真の値を t とし、誤差 Δt は、 $t \gg 0.1/9 \cong 0.01$ と考えて、

$$\Delta t = (t \pm 0.01)^2 - t^2 \cong \pm 0.02t$$

程度と見積もられる。これが、考えられる一つめの理論値と実験値とのずれの要因である。

もう一つは、 $\frac{1}{\cos \theta}$ に付随して生じる誤差である。実験結果 (例えば表 1) を見ると、どの場合も、振り子が 9 周する間に、 10° 程度振れ角が減衰している。これについては平均を取ることで誤差をなくそうと努めたが、この部分で誤差が生じた可能性がある。また、カメラと振り子の角度が水平でなかった可能性なども考えられ、 θ の測定そのものでも誤差が生じていた可能性がある。今回カメラとして使用したのは、(機材環境、操作の利便性などから選んだものであったが) ノート PC であった。すなわち、下の図 12 のように撮影の方向がずれていた可能性がある。

式 5 の値が理論値よりも大きく出ていることを考えると、 $\frac{1}{\cos \theta}$ の測定値が真の値より大きかった、すなわち θ の値を実際の値よりも大きく測定してしまっていたと考えられる。実際、PC と振り子の位置関係のずれによって実際の角度よりも大きく測定してしまったと予想され、実験結果と適合する。

振り子 PC

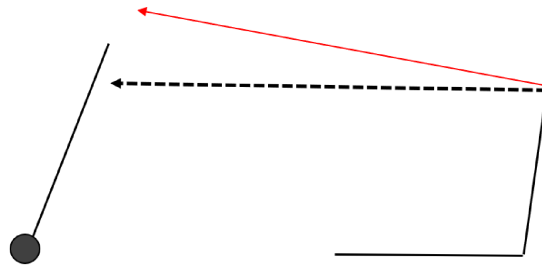


図 12

実際に生じているずれの大きさから推測すると、より影響を強く与えた誤差は前者ではなく θ の測定値の誤差のほうであろう。実際、 θ は撮った動画をコマ送りにしながら分度器で測ったものであり、先ほども述べたように、カメラと撮影対象である振り子とが水平になっておらず、角度が大きくなってしまった可能性は高い。また、振り子の振れ角の誤差も影響を与えている可能性がある。cos という関数について考えてみると、例えば $\cos 30^\circ \cong 0.866$ であるが、 $\cos 35^\circ \cong 0.819$ 、 $\cos 40^\circ \cong 0.766$ などといったように、今回の測定値の範囲である、 10° の範囲内であっても無視できない誤差を十分に生じさせていたであろうことが推測される。従ってより精度を上げるためには、解決策として、振り子の振れ角 θ の測定に関する誤差を軽減する方法が必要になるだろう。先ほど述べたように、ここで考えるべき誤差は、振り子の減衰、カメラと撮影対象との位置関係の二種類ある。振り子の減衰については、実験空間を真空にする設備を整えることができれば解決されるだろう。カメラと撮影対象との位置関係の改善については、ビデオカメラを使用して、振り子の支点とビデオカメラの高さをできる限り正確に合わせる、等が考えられる。

5.3 空気抵抗を考えた各金属球の比較

計算結果を見てみると、質量の比較的小さい鉄球、アルミ球の理論値とのずれが特に大きい事がわかる。特に鉄球は最も誤差が大きく、18.09% となっている。この理由を考えてみよう。ここで、空気抵抗に注目してみる。空気抵抗について考えるときは、物体の体積、形がまったく等しい環境で比較するほうが考察が簡潔であるため、ここでは他の金属球と半径の同じアルミ球から考えてみることにする。まず、円錐振り子について、物体の回転する速さ v の式を知る必要がある。これは、式 1 が成り立っているとすると、

$$\begin{aligned}
 mg \tan \theta &= ml \sin \theta \omega^2 \\
 \frac{v^2}{l \sin \theta} &= g \tan \theta \\
 v &= \sqrt{gl \sin \theta \tan \theta}
 \end{aligned} \tag{6}$$

であるから、物体の運動エネルギー K は、

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgl \sin \theta \tan \theta \tag{7}$$

で与えられる。物体の運動の角速度自体は物体の質量によらないから、受ける空気抵抗を粘性抵抗力とすると、その大きさは $f_v = 6\pi a\eta v$ (ただし a は球状物体の半径、 η は空気の粘性係数) であるからどの金属球で

も一定であったと推測される。微小時間 Δt の間に距離 Δx だけ物体が円軌道上を移動したとして、その間に物体が空気抵抗にされる仕事は $f_v \Delta x$ であるから、その間 θ は不変として運動エネルギーは

$$K' = K - f_v \Delta x = \frac{1}{2} mgl \sin \theta \tan \theta - 6\pi a \eta \sqrt{gl \sin \theta \tan \theta} \Delta x \quad (8)$$

まで減少する。 $A = \frac{1}{2} gl \sin \theta \tan \theta$, $B = 6\pi \eta \sqrt{gl \sin \theta \tan \theta} \Delta x$ とおくと、式 8 は、

$$K' = Am - Ba \quad (9)$$

となる。 a が一定の時、 v は $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ で与えられるから、

$$v' = \sqrt{\frac{2K'}{m}} = \sqrt{\frac{Am - Ba}{m}} = \sqrt{A - B \frac{a}{m}} \quad (10)$$

の根号の中身は m が小さいほど小さくなり、 v の値も小さくなる。結果円軌道 C 上で座標 x を取ると線積分

$$T = \oint_C \frac{dx}{v(x)} \quad (11)$$

で与えられる T の値は大きくなる。よって式 5 の T が真の値より大きくなるので、 m が小さいほうが誤差が大きくなる、と考えられる。従って、アルミは他の球より質量が小さいので、誤差が大きくなっているのである。これで質量の軽いアルミが他の球よりも比較的誤差が大きいことが説明された。ただし、ここで θ が不変であるとしたが、これは振り子が一周回る間でも成り立つとしていいのだろうか。結論としては、そのままでもよい。実際の実験のデータを見ると、振れ角の減衰は一周分では高々 2° 程度であるから、 m の値の影響に比べれば無視しうるだろう。

鉄球に関しては、 m だけでなく a も他の球より小さいので一概にいうことはできないが、式 10 はその場合でも成り立つので、実際に v' を計算すると、式 10 のようになるから、結局 $\frac{a}{m}$ の値が大きいほど T への影響が強くなって誤差が大きくなる。各球でこの値を計算すると、

$$\text{鉄} : \frac{10}{4.2} \cong 2.38$$

$$\text{銅} : \frac{20}{37.4} \cong 0.53$$

$$\text{真鍮} : \frac{20}{35.2} \cong 0.56$$

$$\text{アルミ} : \frac{20}{11.9} \cong 1.68$$

となり、鉄が最も大きい。よって実際の計算結果によく適合する値が得られた。

6 結論

以上のような考察から、物体の加速度 a_r と物体の加速度ベクトル方向（今回の実験では円の中心方向）にかかる力 F の間には比例関係が成立し、その比例係数は物体の質量 m に等しい。すなわち、

$$F = ma \quad (12)$$

が成立することが確認された。また、この結果から F が一定であるような状況であれば m と a は反比例の関係にあると推測することもできる。これは力学の基本法則の一つである運動方程式に一致している。

また、副産物的に空気抵抗によって生じる誤差の大きさは、 $\frac{a}{m}$ というパラメータを用いてある程度予測できる、ということもわかった。

第II部

斜面を使った回転対称性を持つ物体の落下運動と慣性モーメントを用いた考察

7 実験の目的

今回の実験では、斜面を滑らず転がりながら自然落下する回転対称性を持つ物体が、運動の法則に従っていることを示すことを目的とする。ここでの運動の法則とは、重心の並進運動方程式と回転運動方程式を連立させることで得られる以下の式を示す。ただし、回転軸の周りの物体の慣性モーメントを $I = Mk^2$ (ただし M は物体の質量) とおいている。

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg \sin \theta - F$$

$$F = \frac{k^2}{a^2 + k^2} Mg \sin \theta$$

ここで、 F は斜面から物体に働く摩擦力である。これらを連立して、同値な式

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} Mg \sin \theta \quad (13)$$

を得る。本実験では、斜面で球や円筒などの物体を転がし、その運動を観察して式 13 を満たすかどうかを調査することで、加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ と力 $\frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} Mg \sin \theta$ との関係性を調べる事を目的とする。単純な運動方程式だけでなく、回転運動方程式の影響との整合性も確認しようとしているのが、この実験の独創的な部分であると考えられる。また、回転運動方程式による結果への寄与の比較がしやすいように、転がす物体として輪や円柱も用意した。

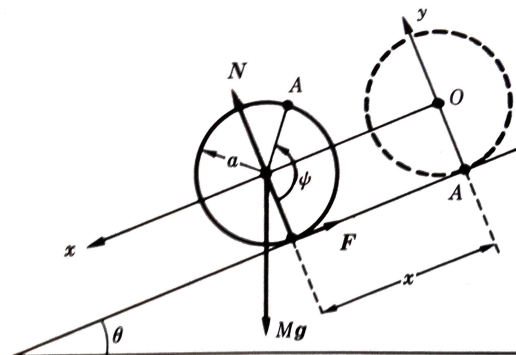


図 13 斜面を転がる物体 ([3] より)

8 実験手法

8.1 実験で使用したもの

今回の実験で使用したものは、以下のようである。

- ・銅球（直径 1.5cm）

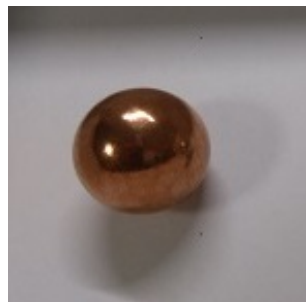


図 14 用いた銅球

- ・厚紙製の輪（外径 10.5cm, 9.6cm）
- ・分銅（200g, 直径 3cm）



図 15 厚紙製の輪

- ・発泡スチロール板（95cm × 45cm × 3cm）
 - ・ガムテープ
 - ・ビニールテープ
- ・分度器
- ・鉄球（直径 1.0cm）
- ・メジャー（紙製, 長さは 1m）
- ・金属板

- ・スマートフォン（カメラとして用いた）

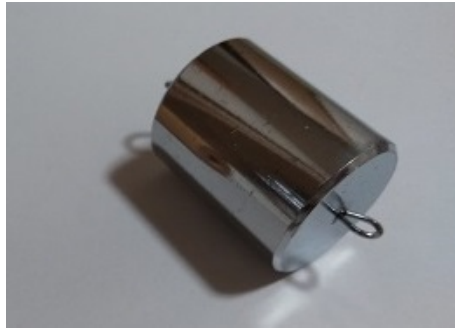


図 16 分銅（円柱形）



図 17 用いた発泡スチロール板



図 18 用いた金属板（アルミニウム製）

・電子ばかり

8.2 実験の方法

以下に今回の実験の手順を示す。

8.2.1 斜面の性質の評価

まずは斜面で球ができるだけ滑らないようにするために、用いる斜面の表面の静止摩擦係数を調べる。

1. 用意した発泡スチロールの板の表面に、下の写真のようにガムテープ（茶色の部分）、ビニルテープ（黒い部分）を貼る。また、メジャー（写真の中では一番上部にある）も板に沿って貼り付ける。



図 19 実験に用いる斜面

2. 分度器と糸、鉄球を使って、下の図 20 のような装置を作り、図 21 のようにセロハンテープを用いて斜面に取り付ける。この装置は今後、斜面の傾斜を測定するのに用いる。

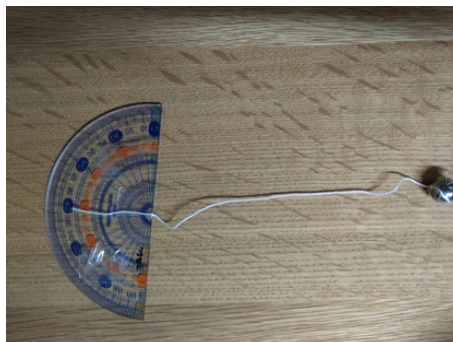


図 20 斜面の傾斜を測る装置

3. 完成した斜面上で、何も貼っていない部分、ガムテープを貼った部分、ビニルテープを貼った部分それぞれについて、金属板を上に乗せ、斜面の傾斜を上げていき、金属板が動き出した瞬間の斜面の傾斜を記録する。（下図 22～24）

8.2.2 質量測定

4. 用意した 3 つの物体（銅球、厚紙製の輪、分銅）それぞれの質量を電子ばかりで測定する。



図 21 斜面への取り付け方法



図 22 発泡スチロールの部分での実験の様子



図 23 ガムテープの部分での実験の様子



図 24 ビニルテープを貼った部分での実験の様子

8.2.3 本実験

ここから先は,”斜面”はビニルテープを貼った部分を指す事とする。

5. 斜面の傾斜が 15° となるようにしたのち、家具や本などで斜面の位置、傾斜を固定する。下図 25 は斜面の固定の方法を示すものである。(傾斜は 15° ではない)

6. 斜面を、銅球、厚紙製の輪、分銅をそれぞれ 3 回ずつ転がす。その様子を動画に撮る。

7. 撮った動画をコマ送りにして再生し、各時刻での物体の位置をメジャーの数字から読み取る。また、スマートフォンの動画のシャッター回数が 1 秒に 30 回である (すなわち一コマが $1/30$ 秒に相当する) ことを用いて、物体の各時刻の速さを求める。

8. 同様のことを斜面の傾斜 30° でも行う。



図 25 実験装置の全体写真

9. ここまでで求めた速度のデータから、加速度を求める。求めた加速度が、式 13 から理論的に予測される結果と十分に整合するか調べる。

8.3 測定値の扱い

測定値を用いてどのように実験結果を評価するか以下に示す。図 26 のように斜面にそって x 軸を取り、回

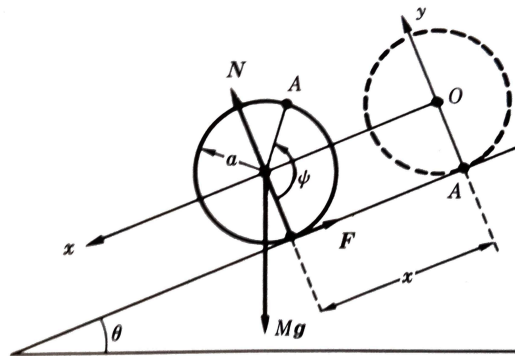


図 26 斜面を転がる物体 ([3] より)

転角を φ 。この時、運動方程式と回転運動方程式は、それぞれ以下ようになる。ただし、物体の慣性モーメントを $I = Mk^2$ (ただし M は物体の質量)、斜面からはたらく静止摩擦力 (物体は滑らず転がっているとす) の大きさを F 、物体の半径を a とおいた。

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \theta - F \quad (14)$$

$$Mk^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = aF \quad (15)$$

である。これらを辺々足して、 $x = a\varphi$ とすると

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{a}{a^2 + k^2} g \sin \theta \quad (16)$$

となる。よって、式 15 より、

$$F = \frac{Mk^2}{a} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} Mg \sin \theta \quad (17)$$

となるから、式 14 より、

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} Mg \sin \theta \quad (18)$$

となる。ここで、実験結果から $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} Mg \sin \theta$ の値を計算し、比例関係があるかどうか、またその比例係数と M の値とを比較することで、測定結果を評価することにする。ここで、 k^2 の値として、各物体の慣性モーメントの表式から、

$$\text{銅球} : k^2 = \frac{5}{7}$$

$$\text{輪} : k^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\text{分銅} : k^2 = \frac{2}{3}$$

を得る。これを用いて計算する。輪で用いた a , b はそれぞれ外径と内径である。また、加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ は運動の様子を動画にとり、各時刻での物体の変位を求めて（時刻、変位）のグラフをつくり、線形近似して傾きを加速度に同定することとする。

9 実験結果

以下に実験の結果を記す。

9.1 斜面の性質の評価の結果

まず、斜面の静止摩擦係数を求める実験の結果から示す。

表 9

	発泡スチロールそのまま	ガムテープ	ビニルテープ
動き出した角度 (°)	15	12	38

この結果から、ビニルテープを貼った部分が最も滑りにくいと言えよう。

9.2 質量測定の結果

以下に質量測定の結果を有効数字 3 桁で記す。

表 10 各物体の質量

	銅球	輪	分銅
質量 (g)	37.2	62.7	200

9.3 本実験の結果

以下では、各物体ごとにデータを纏めた。

9.3.1 銅球

実験の方法で述べた方法で加速度を求めた。その結果、速さと時刻の間に線形的関係が見られたので、最小二乗法を用いて一次関数の係数を求め、加速度として用いた。以下には例として 15° の際のグラフを載せた。このグラフの場合、加速度は 3.23m/s^2 となる。

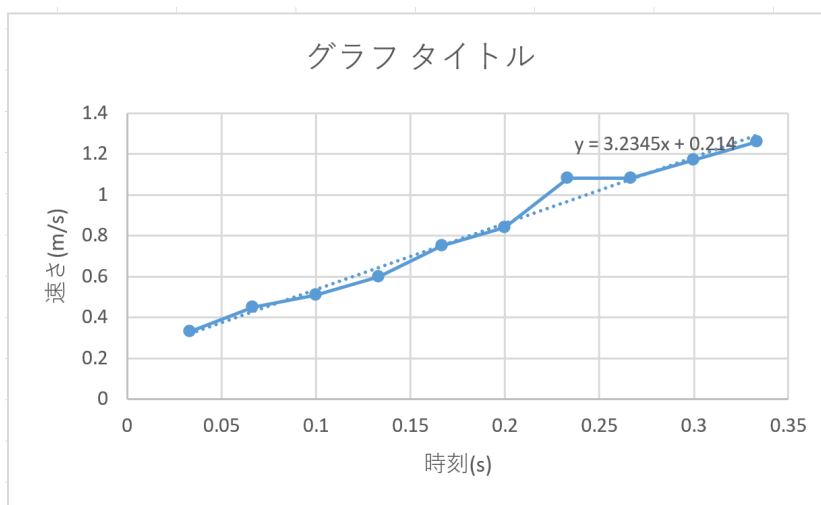


図 27 速さと時刻の関係

その他の加速度のデータは、以下の表に纏めて載せた。また以下の表には、対応する力 $\frac{1}{1+\frac{kz}{\sigma^2}} Mg \sin \theta$ の値も計算して載せた。ともに有効数字は3桁とした。単位は省略してある。

表 11 加速度と力の関係

	加速度	力
斜面の角度 15° (1 回目)	1.96	67.4
斜面の角度 15° (2 回目)	1.75	67.4
斜面の角度 15° (3 回目)	1.10	67.4
斜面の角度 30° (1 回目)	2.34	130
斜面の角度 30° (2 回目)	2.81	130
斜面の角度 30° (3 回目)	3.23	130

9.3.2 輪

銅球の時と同様に計算して、加速度と力の関係をまとめた表は以下のよう。

表 12 加速度と力の関係

	加速度	力
斜面の角度 15° (1 回目)	1.18	90.0
斜面の角度 15° (2 回目)	1.54	90.0
斜面の角度 15° (3 回目)	1.29	90.0
斜面の角度 30° (1 回目)	2.47	160
斜面の角度 30° (2 回目)	2.48	160
斜面の角度 30° (3 回目)	2.37	160

9.3.3 分銅

銅球の時と同様に計算して、加速度と力の関係をまとめた表は以下のよう.

表 13 加速度と力の関係

	加速度	力
斜面の角度 15° (1 回目)	1.18	338
斜面の角度 15° (2 回目)	1.70	338
斜面の角度 15° (3 回目)	1.53	338
斜面の角度 30° (1 回目)	3.32	653
斜面の角度 30° (2 回目)	3.25	653
斜面の角度 30° (3 回目)	3.33	653

9.4 グラフ

以下に、ここまでで求めた加速度と力を Excel の散布図にプロットして近似直線の方程式を書き込んだものを示す。(以下図 28~30) 各物体ごとに纏めた。ただし、近似直線は (0,0) を通るように設定し、その係数は最小二乗法を用いて求めている。

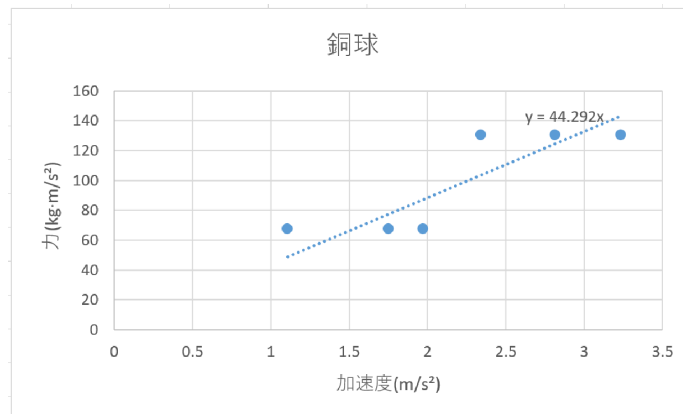


図 28

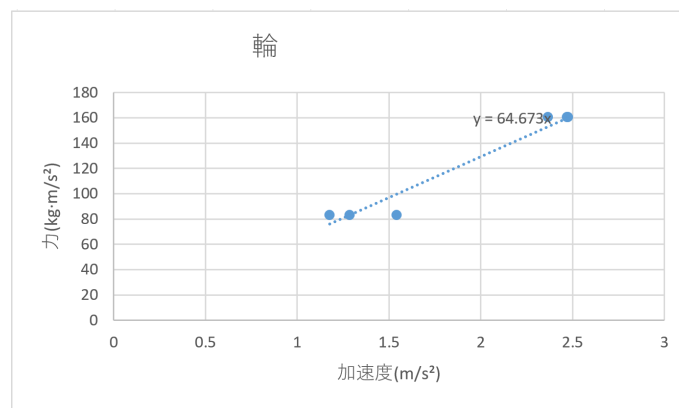


図 29

10 考察

10.1 実験値の評価

まず各物体での加速度と力の比例係数を有効数字三桁で示すと、

銅球：4.4310

輪：6.4710

分銅：2.0210

となり、各々の質量に近い値を取っている。その差の割合を計算すると、

銅球： $(44.3 - 37.2) \div 37.2 \times 100 = 19.08 (\%)$

輪： $(64.7 - 62.7) \div 62.7 \times 100 = 3.18 (\%)$

分銅： $(202 - 200) \div 200 \times 100 = 1 (\%)$

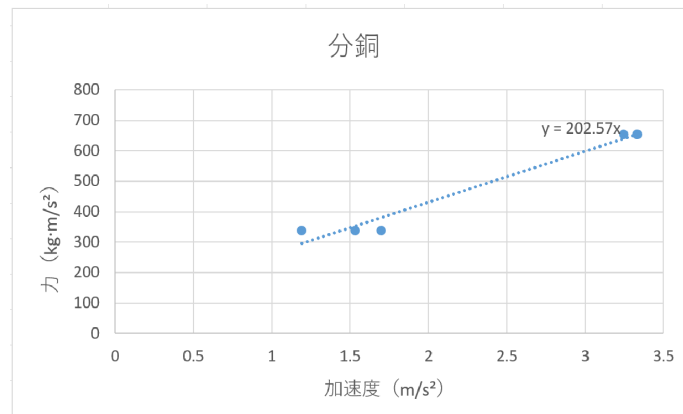


図 30

となり、銅球以外はかなり良い一致が見られる。従って、加速度と力には比例関係が見られ、その比例係数は物体の質量 M とおけるから

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} Mg \sin \theta \quad (19)$$

が成り立つと考えられる。

また、いずれの比例係数も質量より大きな値をとっている。次節でこの原因について考える。

10.2 誤差の原因

まずは、図 28～30 に注目する。これらを見ると、同じ力座標の値（すなわち角度）を持つ三つの点が横軸方向にばらけている。特に銅球ではこのばらつきが大きく、大きな誤差の原因となっていると考えられる。これは動画のコマ送りにより物体の位置を読み取った際に生じたと考えられる誤差である。確かに読み取りには各々 5mm 以上の誤差が生じると考えられる。定量的な見積もりは難しいが、精度をより上げるための改善策としては実験回数を多くするなどがあるだろう。

次に、比例係数が質量の値よりも大きかった原因を考える。これはすなわち $\frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} Mg \sin \theta$ の値が真の値よりも大きかったことが原因であろう。つまり、 $\sin \theta$ の値が真の値より大きい、すなわち θ が大きく測定されていたことと、 $\frac{k^2}{a^2}$ の値が真の値より小さかった事が原因である。しかし、 $\frac{k^2}{a^2}$ の値は物体の形状でほぼ決定するので、実質的な原因は θ が大きく測定されていたことであると推測される。実験の間に斜面が沈み、角度がだんだん小さくなった事が原因だろう。精度を上げるためには、こまめな角度チェックが必要と思われる。

11 結論

以上の議論から、質量と加速度の間には比例関係があり、その比例係数は物体の質量 M に等しく、

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{a^2}} Mg \sin \theta \quad (20)$$

が成り立ち、それに加えてここでは回転運動方程式による効果も考慮されるべきである、ということがわかった。

12 謝辞

今回の実験では、自分の所属する物理研究部の顧問である濱口先生に全体的な助言をしていただきました。ありがとうございました。

参考文献

- [1] Physicmath, “ [基本] 円運動演習 1 円錐振り子,” Physicmath, 2021-03-28, <https://physicmath.net/5378/>, (2021-06-04)
- [2] 杉山忠男『物理チャレンジ独習ガイド』丸善出版 (2016)
- [3] 藤原邦男 『物理学序論としての力学』 東京大学出版会 (1984)