

## ウォーターハンマー効果

### イントロダクション

この問題は、流路内の圧力波による流体圧力の変動を研究するものである。この課題では、主に、パイプ内の流量調整弁を速く閉じたり遅く閉じたりしたときに生じるウォーターハンマー効果を扱っている。

ここでは、非粘性の液体と、本質的に一次元である液体の流れのみを考慮している。流量調整弁を含むすべてのパイプは剛体であると仮定するが、液体は必ずしも非圧縮性であるとは限らない。圧力  $P_0$  で平衡状態にある体積  $V_0$  の液体に圧力の変化  $\Delta P$  が加わった場合、その体積の変化  $\Delta V$  は  $\Delta P$  に比例すると仮定し、次のようになる。

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1)$$

比例定数  $B$  は、液体の体積弾性率を表している。水の場合、平衡密度を  $\rho_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $B = 2.2 \text{ GPa}$  とする。

### パート A. 過剰な圧力と圧力波の伝播 (2.2 点)

長さ  $L$  の一様な円筒形のパイプの中を、水が水平速度  $v_0$ 、密度  $\rho_0$ 、圧力  $P_0$  で  $+x$  方向に向かって定常的に流れている。図 1 に示すように、パイプは深さ  $h$  の貯水槽に接続され、圧力  $P_a$  の大気に開放されている。

流量調整弁 T が瞬時に遮断され、弁に向かおうとする弁のすぐそばの液体に圧力変化  $\Delta P_s \equiv P_1 - P_0$  と速度変化  $\Delta v = v_1 - v_0$  ( $v_1 \leq 0$ ) が生じたとする。これにより、過剰圧力  $\Delta P_s$  の縦波が伝播速度  $c$  で上流側の  $-x$  方向に伝わっていく。

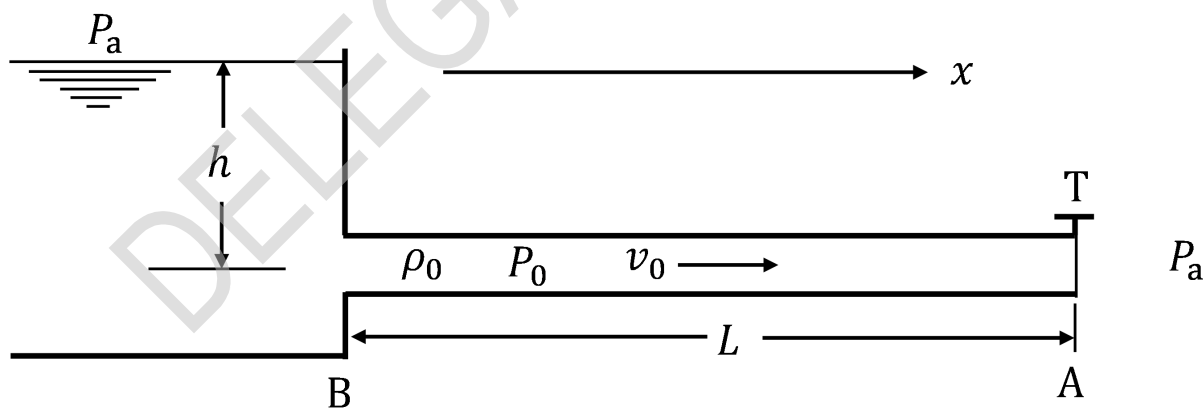


図 1: 均一なパイプ内の定常流。

**A.1** 過剰圧力  $\Delta P_s$  と速度変化  $\Delta v$  には  $\Delta P_s = \alpha \rho_0 c \Delta v$  という関係式が成り立つ。伝播速度  $c$  は、 $c = \beta + \sqrt{\gamma B / \rho_0}$  で与えられる。 $\alpha, \beta, \gamma$  を求めよ。 1.6pt

**A.2**  $v_0 = 4.0 \text{ m/s}$ ,  $v_1 = 0$  の水流の場合、 $c$  および  $\Delta P_s$  の値を計算せよ。 0.6pt

### パート B. 流量調整弁のモデル (1.0 点)

図 2 は、制御弁 T とそれを通る液体の流れのモデルである。流量調整弁は、配管の端 A 付近にある長さ  $\Delta L$ 、内半径  $R$  の短い部分とする。円錐形の出口には半径  $r$  の開口部があり、圧力  $P_a$  の大気に開放されている。流出に対する重力の影響は無視する。

流体は非圧縮性であり、流れは定常とみなし、調節弁入口の流体は速度  $v_{in}$ 、圧力  $P_{in}$ 、密度  $\rho_0$  であるとする。図 2 における流線と法線は流れのパターンを可視化するためのただの補助線である。

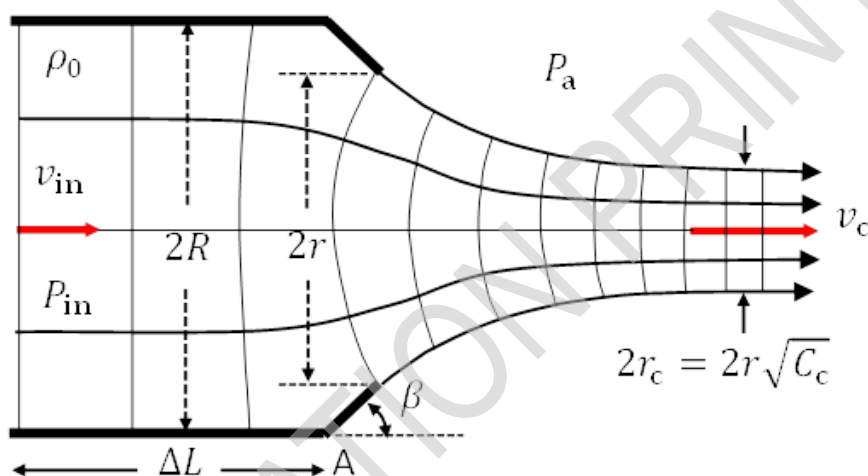


図 2：流量調整弁の寸法と噴流の収縮量

調節弁から大気中に出た後、流れの断面は、流線が再び平行になる最小点に達するまで収縮することが知られている。この最小点において、流速は  $v_c$  であり、流れの断面は半径  $r_c = r\sqrt{C_c}$  となる。ここで  $C_c$  は収縮係数と呼ばれ、表 1 に示すように比  $r/R$  と円錐角  $\beta$  に依存する。

$r/R$	$C_c(\beta = 45^\circ)$	$C_c(\beta = 90^\circ)$
0.00	0.746	0.611
0.20	0.747	0.616
0.30	0.748	0.622
0.40	0.749	0.631
1.00	1.000	1.000

表 1. 開口部の収縮係数

**B.1** 流線が平行している調節弁入口での過剰圧力  $\Delta P_{in} = P_{in} - P_a$  を求めよ。  $\rho_0, v_{in}, r, R, C_c$  を用いて答えよ。 1.0pt

パート C およびパート D のすべてのタスクにおいて、図 1 の貯水槽-パイプシステムを考え、以下の仮定を立てる。

- 液体の伝播速度  $c$  と密度  $\rho_0$  は流速に依存しない与えられた定数である。また、周囲の大気圧  $P_a$  と重力加速度  $g$  は一定である。
- 初期状態では調節弁は全開で、パイプ内の流れは流体圧力  $P_0$ 、速度  $v_0$  で定常状態である。
- 図 1 と図 2 のように、パイプは長さ  $L$  と半径  $R$  を持つ。調節弁 T は角度  $\beta = 90^\circ$  の可変半径  $r$  の円形開口であり、その長さ  $\Delta L$  は無視できるので、調節弁への流入口は実質的にパイプの端 A にある。噴出物に対する重力の影響は無視できる。
- 貯水槽内の液体は準静的であるため、パイプ入口 B 付近の圧力  $P_h$  は一定である。
- パート B で説明したモデルを使用して、調節弁入口の過剰圧力  $\Delta P_{in} = P_{in} - P_a$  を決定することができる。

### パート C. 流量調整弁の急速な閉鎖によるウォーターハンマー効果 (1.8 点)

図 1 の貯水槽・パイプシステムを参照せよ。調節弁の全閉または半閉によってパイプ内の液体の流れが妨げられると、圧力波が上流に向かって伝わり始める。圧力波は、パイプの貯水槽側で反射され、再び調節弁に戻り、そこで反射される。その後、別の圧力波が発生し、先ほどのプロセスが繰り返される。このようにして、調節弁の隣にある液体に突然の圧力の上昇、下降が連続して発生し、ウォーターハンマリングと呼ばれている。

**C.1** 図 1、図 2 を参照せよ。調節弁 T が全開 ( $r = R$ ) の時のパイプ内定常流の圧力  $P_0$  と速度  $v_0$  を  $\rho_0, g, h, P_a$  を用いて求めよ。 0.6pt

**C.2** 圧力  $P_0$ 、流速  $v_0$  の課題 C.1 と同じ定常流を考える。今、 $t = 0$  で、調節弁は瞬時に閉じられる ( $r = 0$ )。圧力波は伝搬速度  $c$  で貯水槽に向かう。 $P_h = P_0 + \rho_0 g h$  に注意せよ。 $\tau = 2L/c$  とする。 $t$  が各瞬間  $\tau/2$  と  $\tau$  に非常に近づいているとき、パイプ内の流体圧力  $P(t)$  と流速  $v(t)$  はどのようなになるか。 1.2pt

### パート D. 流量調整弁のゆっくりとした閉鎖によるウォーターハンマー効果 (5.0 点)

タスク C.1 と同じ、圧力  $P_0$ 、流速  $v_0$  の定常流を再び考える。ここでは、調節弁をゆっくりと閉めることとし、閉める過程をシミュレーションするために有限ステップのアプローチを採用する。

時刻  $t = 0$  から開始して、調節弁の半径  $r$  (図 2 参照) の瞬間的な縮小化を、時間間隔  $\tau = 2L/c$  で順次実施する。半径の瞬間的な縮小化の直後、調整弁領域の流れはパート B と同様に定常と近似できる。このとき、調整弁での圧力と速度は、配管内の残りの流れとは異なる。

各閉塞ステップ  $n$  について、その継続時間と調節弁開口部の半径  $r_n$  が、対応する流体圧力  $P_n$  と調節弁での流速  $v_n$  を表すために使用される記号とともに、表 2 に示されている。

調節弁を閉じる回数 $n$	各 $n$ ステップの継続時間	割合 $r_n/R$	$t = (n-1)\tau$ での調節弁における圧力	$t = (n-1)\tau$ での調節弁における流速
$n = 0$	$t < 0$	1.00	$P_0$	$v_0$
$n = 1$	$0 \leq t < \tau$	0.40	$P_1$	$v_1$
$n = 2$	$\tau \leq t < 2\tau$	0.30	$P_2$	$v_2$
$n = 3$	$2\tau \leq t < 3\tau$	0.20	$P_3$	$v_3$
$n = 4$	$3\tau \leq t < 4\tau$	0.00	$P_4$	$v_4 = 0$

表 2. 流量調節弁を閉じるステップ

流体密度  $\rho_0$ 、伝播速度  $c$  を一定とする。  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  とする。  $\Delta P_n = P_n - P_0$ 、  $\Delta v_n = v_n - v_0$  と定義する。  
 $P_n = P_0$  と近似して進める。

**D.1**  $\Delta P_n/(\rho_0 c)$  を、  $\Delta P_{n-1}/(\rho_0 c)$ 、  $v_{n-1}$ 、  $v_n$  で表す式を求めよ。それは表 2 で指定されたすべてのステップ  $n > 0$  に対して有効なはずである。また、  $n = 1, 2, 3$  の場合、  $v_{n-1}$  と  $\Delta P_{n-1}/(\rho_0 c)$  の両方が既知である場合に  $v_n$  を計算できる式を求めよ。 3.0pt

**D.2** タスク D.1 の結果を  $v_0 = 4.0 \text{ m/s}$  の水流に適用する。解答用紙にあるグラフ用紙を使って、  $\Delta P$  対  $\rho_0 cv$  のプロットをすべて作成せよ。線の交点がステップ  $n = 1, 2, 3, 4$  の  $\rho_0 cv_n$  と  $\Delta P_n$  の座標を与えるように線を引け。グラフには、各交点  $(\rho_0 cv_n, \Delta P_n)$  に対応する  $n$  の値を示せ。グラフから、  $n = 1, 2, 3, 4$  に対する  $\rho_0 cv_n$  と  $\Delta P_n$  (いずれも単位は MPa) の値を評価せよ。(注)ここでの線とは各  $n$  での直線と曲線を意味する。 2.0pt

DELEGATION