

惑星の物理 (10 点)

この問題は、惑星内部に関係する2つの独立した問題からなる。惑星の表面曲率の効果は無視できるとする。必要であれば、次の近似公式を用いてよい。

$$(1+x)^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon x, \text{ when } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Part A. 中央海嶺 (5 点)

一様な重力(重力加速度 g)の下に置かれた大きな容器に水が入っている。互いに平行な2枚の直立した長方形の板は、容器の大きさに等しく、板の両端は、容器の鉛直な壁と隙間なく接している。それぞれの板は、長さ h だけ水に浸るように容器に立てられている(図1)。板の y -軸方向の幅を w とする。板の両端と容器の壁の隙間を、流体は出入りしないと仮定する。水の密度は ρ_0 である。

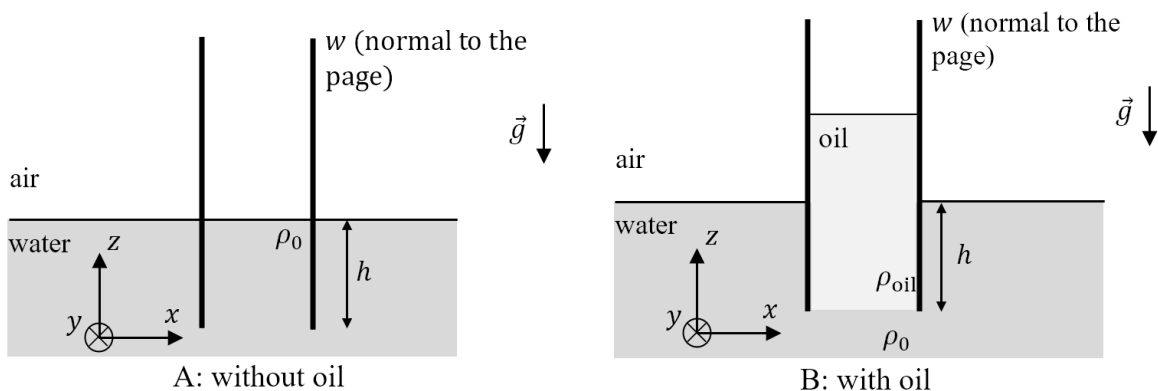


図1. 水中での平行な板.

密度 ρ_1 ($\rho_1 < \rho_0$) の油を、油の下底が板の下端に達するまで板の間に注入する。板と容器の端は十分に高く、油は板と容器の端を超えて溢れ出ることはないとする。流体の表面張力と流体間の混合は無視できる。

A.1 右側の板に作用する合力の x -成分 F_x の大きさと向きを求めよ。

0.8pt

図2は、中央海嶺の断面を示している。それはマントル、地殻、海洋水が層状に重なっている。マントルは地質学的な時間スケールで流動している岩石からなる。それゆえこの問題では、マントルは流体として扱われる。地殻の厚さは、 x -方向の特徴的な長さよりずっと小さく、地殻は自由に曲がる板である。高い精度でこのような分水嶺は、 y -軸(図2の紙面に垂直)方向への変化を無視して2次元系としてモデル化できる。 y -軸に沿った海嶺の長さ L は、この問題で導入される長さ比べてずっと長いとする。

海嶺の中心では、地殻の厚さはゼロである。地殻の中心から水平方向の距離 x が増えるにつれ、地殻の厚さは増加し、 $x \rightarrow \infty$ で一定の厚さ D に達する。対応して、海洋の底は海嶺の頂点 O より鉛直下方に h だけ沈んでいる。ここでは、頂点 O を座標系の原点とする(図2)。海水の密度 ρ_0 とその温度 T_0 は空間的にも時間的にも変化しない一定値とする。同様に、マントルの密度 ρ_1 とその温度 T_1 も一定値とする。地殻の温度 T は、時間的には変化しないが、位置に依存する。

地殻物質は、温度 T で線形に広がっていると高い精度で考えられている。海水とマントルの温度は一定であるため、熱膨張係数を変換して用いるのが便利である。 $l(T) = l_1 [1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$

ここで、 l は地殻物質のある部分の長さであり、 l_1 は温度 T_1 でのその部分の長さ、 k_l は変換された熱膨張係数(一定値とみなされている)である。

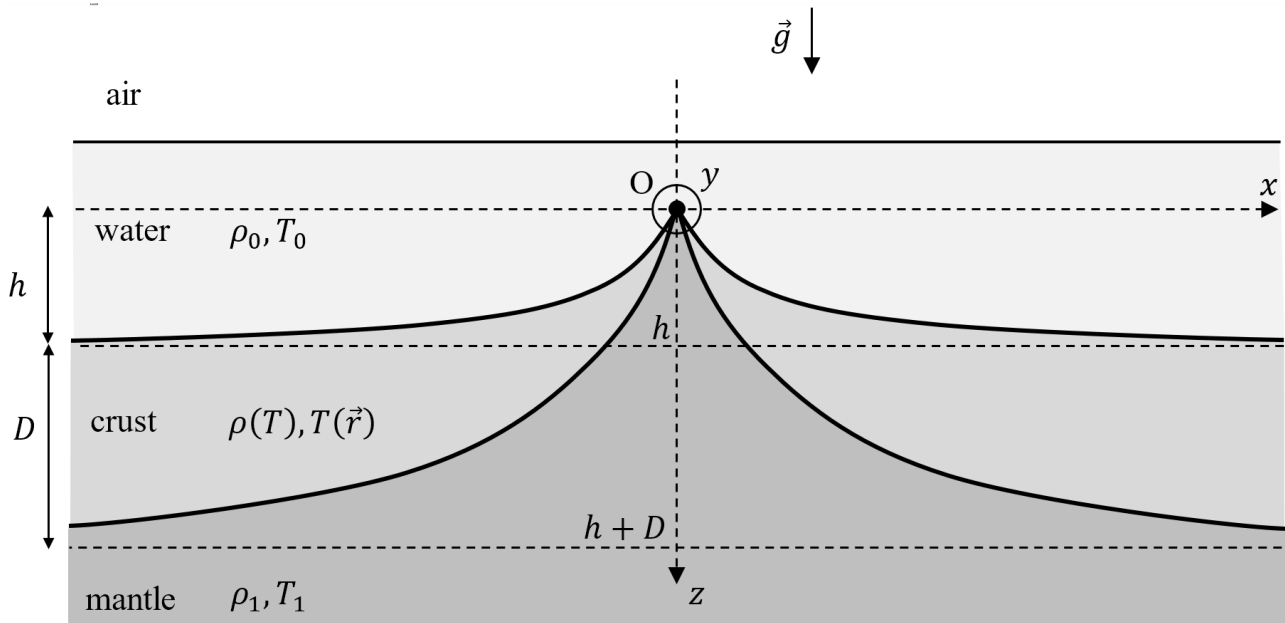


図2. 中央海嶺. z 軸は下方を向いている.

- A.2** 地殻は等方的と仮定する. 地殻の密度 ρ は温度 T にどのように依存するか. $|k_l| \ll 1$ 0.6pt
として, 近似的な式

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

で表すことができる. ここで, 2次の項 k_l^2 , および, それより高次の項は無視する. このとき定数 k を定めよ.

$k > 0$ であることが知られている. また, 地殻の熱伝導率 κ は一定であるとする. 結果として, 海嶺の軸から十分に遠く離れると, 地殻の温度は深さに線形に依存する.

- A.3** マントルと海水は非圧縮的であり, それらは静的平衡にあると仮定して, 遠く離れた地殻の厚さ D を, h, ρ_0, ρ_1 , および, k を用いて表せ. 物質の移動は無視できるとする. 1.1pt

- A.4** 右半分 ($x > 0$) の地殻に作用する水平方向の合力 F を, k の最も効果の大きい次数 (leading order) まで, ρ_0, ρ_1, h, L, k および g を用いて表せ. 1.6pt

地殻が地球の他の部分から熱的に遮断されているとする. そうすると熱伝導の結果, 地殻の上面と下面の温度は, 地殻が熱平衡に達するまで互いに近づいていく. 地殻の比熱は c であり, 一定であるとする.

- A.5** 次元解析, あるいは大きさの次数解析を用いることにより, 海嶺から遠く離れた地殻の上表面と下表面の温度差がゼロに近づく特徴的な時間 τ はどのように表されるか求めよ. ただし, τ は, はじめの地殻の2つの表面温度には依存しないとする. 0.9pt



Part B. 成層圏媒体中の地震波 (5.0 点)

ある惑星の表面で短い地震が発生したとする. x は水平座標を, z は地表からの深さを表すとして, $z = x = 0$ に位置する線状の波源から地震波が発生していると仮定する (図3). 地震波源は, この問題で考えられている他のどの長さよりもはるかに長いと仮定することができる.

地震の結果, $x-z$ 平面内で z 軸に沿って正の成分を持つすべての方向に, いわゆる縦波の P 波が一様に放射される. 固体中の波動理論は一般に複雑なので, この問題では, 地震によって放出された他のすべての波を無視する. 惑星の地殻は層を成しており, P 波の速度 v は深さ z に依存し, $v = v_0(1 + z/z_0)$ となる. ここでは, v_0 は表面での速度, z_0 は既知の正の定数である.

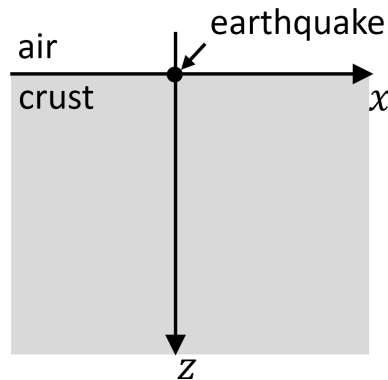


図3. Part B で使用する座標系

- B.1** 地震によって発せられた1つの地震波が, z 軸と初期角度 $0 < \theta_0 < \pi/2$ をなし, $x-z$ 1.5pt
平面上を進むと考える. この地震波が惑星の表面で検出される水平座標 $x_1(\theta_0) \neq 0$
はどのように表されるか? 波の経路は円弧で表されることが知られている. こ
こで, A と b を求めるべき定数として, $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ の形で答えよ.

A と b を求めることができなかつた場合, 以下の問題では, $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ という結果をそのまま使うことができる. 地震の際に地殻中に P 波として放出された震源の単位長さあたりのエネルギーの総量を E とし, 波が下から惑星の表面に到達したときに完全に吸収されると仮定する.

- B.2** 表面が吸収する単位面積当たりのエネルギー密度 $\varepsilon(x)$ が, 表面に沿った距離 x に 1.5pt
どのように依存するかを求めて, $\varepsilon(x)$ のプロットを描け.

ここからは, 波が地表に到達したときに完全に反射されると仮定する. $z = x = 0$ の位置に, 先ほどの地震源と同じ形状の装置があるとする. この装置は, 自由な角度分布で P 波を放射することができる. この装置に狭い範囲の放射角をもつ信号を放射させる. 具体的には, 信号が垂直に対してなす初期設定の角度は, $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ の範囲にあるとする. ここで, $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ であり, $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ である.

- B.3** 信号が到達しない最遠点は, 地震源から表面に沿ってどのくらいの距離 x_{\max} にあ 2.0pt
るか? 答は, $\theta_0, \delta\theta_0$ および上記の他の定数を用いて記述せよ.