相転移の力学的モデル

半径 R のリングに、大きさを無視できる質量 m のビーズを通した。リングは図 1 に示すように、角速度 ω で垂直軸の周りを回転する。これと並行して、ビーズには垂直抗力 N に比例した反対方向の力 F_f があり、$F_f = fkN$ で与えられる（f は 1 または-1)。極座標 $\{r,\ \theta\}$ を用いることが奨励される。可能な限り、$\omega_c = \sqrt{g/R}$ を用いて解答を表せ。ここで、g は重力による加速度である。

相転移では、自由エネルギー $V(\mathcal{M})$ [力学におけるポテンシャルエネルギーと同等] は磁化 $\mathcal{M}$ に次のように依存する。

$$V(\mathcal{M}) = a(T)\mathcal{M}^2 + b(T)\mathcal{M}^4$$

T は温度, $b(T) > 0$ であり、$a(T)$ は温度で符号を変える。ここで、相転移の現象を上記のリングのモデルを使用して理解することを試みる。

注 1：半径 R の円運動については、極座標における速度は $\dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$ で、加速度は $\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$ と表される。ここで、$\hat{r}$ と $\hat{\theta}$ は、それぞれ、動径方向と接線方向の単位ベクトルである。

注 2：反対方向の力 $\vec{F}_f$ の向きを f とする。ここで、ビーズが反時計回りに（増加する）θ 方向に動いていれば f = +1 、時計回りに動いていれば f = -1、すなわち、f = $sgn(\dot{\theta})$ 。ここで sgn は引数が正か負かで +1 か-1 になる関数である。

注 3：次の展開がこの問題のいくつかの個所で役に立つ。

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \theta - \theta^3/6 + ..\\
\cos(\theta) &= 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24 + ..\\
(1+x)^n &= 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + n(n-1)(n-2)x^3/6 + ..
\end{aligned}$$

(ここで、θ はラジアンで表し、$|x| << 1$)

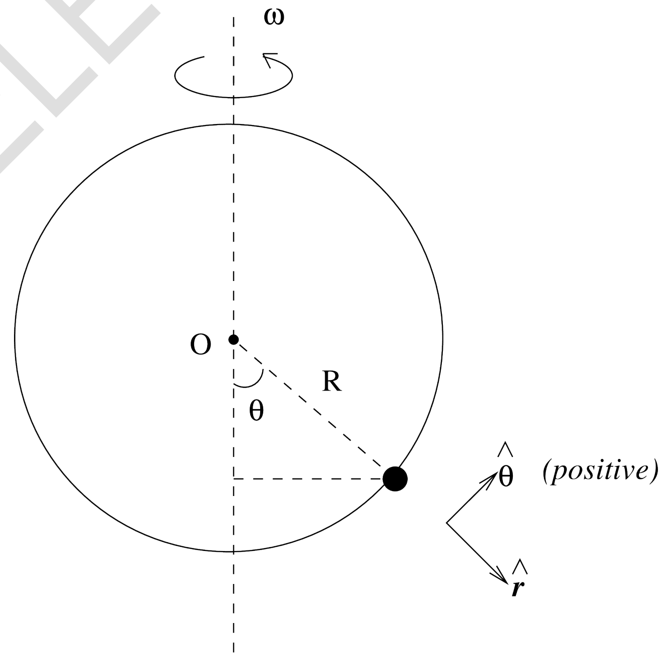

図 1：回転するリングの上のビーズ

DELEGATION PRINT

以下では、回転するリングのフレームで、角度 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ の範囲におけるビーズのダイナミクスを理解することにする。ビーズの自由体ダイアグラムは図 2 に示してある。この自由体ダイアグラムに示された以外のすべての力は無視してよい。

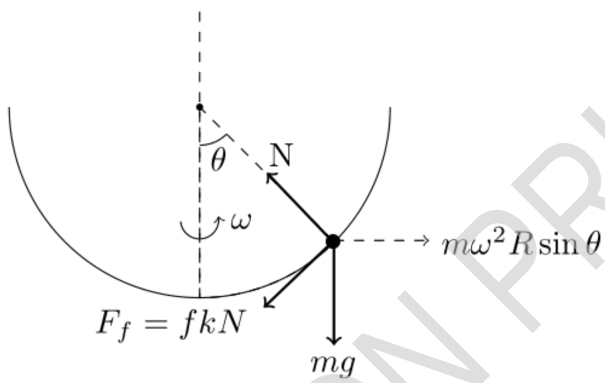

図 2：自由体ダイアグラム

A.1 ビーズにかかる力の半径方向 F_r 成分と接線方向 F_θ 成分の運動方程式を書き下せ。反時計回りに θ が増加するものとする。 0.5pt

以下のパート B.1 から B.9 については、$k = 0$ とする。

B.1 平衡角 θ_0 の関係を $\{\omega, \omega_c\}$ を用いて論ぜよ。 1.0pt

B.2 ω/ω_c (x-axis) の関数として θ_0 (y-axis) の定性的なスケッチをせよ。 0.5pt

B.3 安定な平衡のとき、ビーズに働く垂直抗力の大きさを ω/ω_c の関数として定性的にスケッチせよ。 0.5pt

B.4 接線方向の力 F_θ に対応するポテンシャルエネルギーを定義する。すなわち、 1.0pt

$$F(\theta) = -\frac{1}{R}\frac{d}{d\theta}V(\theta)$$

ポテンシャルエネルギーのゼロを $\theta = 0$ にとる。もし、$V(\theta)$ が $P + Q\cos(\theta) + S\sin^2(\theta)$ と表されたら、P, Q, S を求めよ。

B.5 $V(\theta)$ を小さな θ のときに展開し、$V(\theta) = a(\omega)\,\theta^2 + b(\omega)\,\theta^4$ と表すことができる。係数 $a(\omega)$ と $b(\omega)$ を求めよ。 1.0pt

DELEGATION PRINT

B.6	$V(\theta)$ の θ に対する代表的なプロットをせよ。すなわち、ω/ω_c の値が 1.0 よりわずかに小さいとき (例えば 0.9) と ω/ω_c が大きいとき、例えば 5.0 のときに。ただし、定性的なスケッチだけで、プロットに対する詳細な計算は必要ない。	1.0pt

B.7	2 次相転移のランダウ理論では、単純な磁性体系を 2 つの相に分類する。臨界温度 T_c より高い温度 T では、系は常磁性状態になる。$T < T_c$ では系は強磁性状態になり、磁化 $\mathcal{M}$ は $$\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}_0(1 - T/T_c)^{1/2} \quad T < T_c$$ で与えられる。指数 $1/2$ を β で表すことにしよう。このふるまいを上記で議論したビーズの問題と比較しよう。我々の問題の場合に、$\mathcal{M}, T_c, T/T_c$ に対応するものは何か？β と等価な量は我々の場合に何か？	1.0pt

B.8	平衡位置 θ_0 からずれたときのビーズの微小角振動数 Ω_0 を決定せよ。微小な振動については、$$\Omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{V''(\theta_0)}{m}}$$ であることに注意せよ。	1.0pt

B.9	ω の関数として、Ω_0 の定性的なスケッチをせよ。	1.0pt

以下の C.1, C.2 では、$k \neq 0$ とする。

C.1	$f = 1$ として、$k = \tan\alpha$ を表せ。平衡角 θ_0 の条件として $$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \frac{\tan(x)}{\sin(y)}$$ のように表すことができる。x と y を求めよ。	1.0pt

C.2	f =1、$k = 0.05$ とする。次のような場合に、平衡角 θ_0 を求めよ。 1. $\omega/\omega_c = 0.50$ 2. $\omega/\omega_c = 0.70$	0.5pt

DELEGATION PRINT