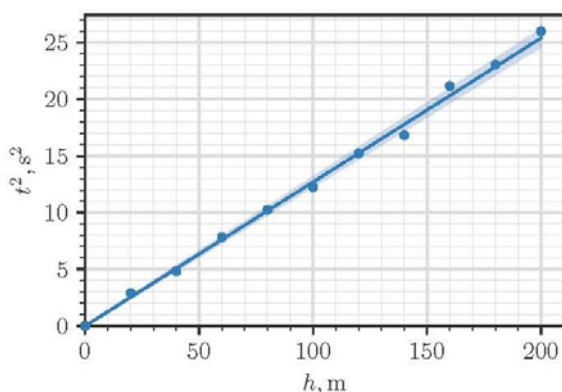


E1: 惑星 - 解答例
A.1: 重力加速度

自由落下加速度 g は、空気摩擦や惑星の曲率による影響が最小になるような低い位置から落下させることで求めることができる。また、ボールの半径と密度をできるだけ大きくして、空気摩擦の影響を最小にする。 $r = 50 \text{ cm}$ 、 $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$ とする。落下の高さは $h = gt^2/2$ で与えられるので、 t^2 vs h でのグラフの傾きから g を求められる。傾きは、 $2/g = 0.127 \text{ s}^2/\text{m}$ 、その不確かさ $\Delta(2/g) = 0.004 \text{ s}^2/\text{m}$ なので、 $g = 15.7 \text{ m/s}^2$ 、不確かさ $\Delta g = 0.5 \text{ m/s}^2$ となる。

表1

$r = 50 \text{ cm}$,		$\rho = 10 \text{ g/cm}^3$	
$h \text{ (m)}$	$s \text{ (m)}$	$t \text{ (s)}$	$t^2 \text{ (s}^2\text{)}$
0	0.0	0.0	0.0
20	0.0	1.7	2.9
40	0.0	2.2	4.8
60	0.0	2.8	7.8
80	0.1	3.2	10.2
100	0.1	3.5	12.2
120	0.2	3.9	15.2
140	0.0	4.1	16.8
160	0.1	4.6	21.2
180	0.1	4.8	23.0
200	0.1	5.1	26.0


 図1: h と t^2 のプロット

A.2: 惑星の半径

塔の上からどれだけ遠くを見ることができるといことから、惑星の半径は、次の図のような直角三角形で表される。この三角形にピタゴラスの定理を適用すると、

$$(R + H)^2 = L^2 + R^2 \text{ となる。}$$

$$R = (L^2 - H^2) / 2H = 13\,200 \text{ km.}$$

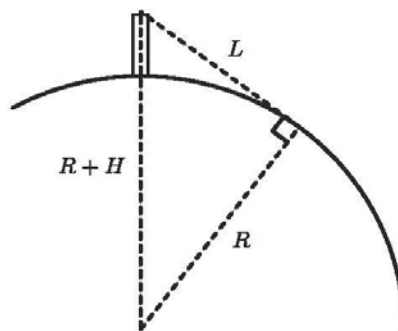


図2: 惑星の半径と塔の先端が見える距離の関係

A.3: 惑星の質量

ニュートンの重力の法則から $g = GM / R^2$ となる。したがって

$$M = gR^2 / G = 4.2 \times 10^{25} \text{ kg}$$

となる。

この不確かさを2乗和の平方根で計算すると (ΔR の項は極小である)、

$$\Delta M = (\Delta g / g) \times M = 0.2 \times 10^{25} \text{ kg}$$

となる。

自由落下加速度の推定には、自転による遠心力の寄与がある。このため、表面での加速度が小さくなり、惑星の質量の推定値が小さくなる。

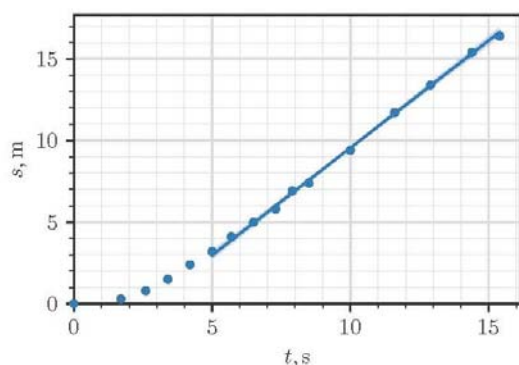
B.1: 風速

一般に、重力加速度の変動が小さい場合 (ここでは $H \ll R$) には、空気抵抗により、物体は正味の加速度がかからない終端速度になる。これは、大気中で風のない場合では、ある終端速度 v_t でまっすぐ落下することに対応する。実験室での現象と考えると、物体は水平速度と垂直速度、それぞれ u と v_t をもつ。

u を求めるには、物体ができるだけ速く終端速度に達するように、物体を落下させ、変位 s と落下時間 t の関係を観察する。終端速度に達したとき、 $s = s_0 + ut$ と予想できる。ここで、 s_0 は終端速度に到達するまでの変位を表す。空気抵抗の影響を最大にするために、半径と密度を最小にし、 $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$ 、 $r = 5 \text{ cm}$ 、 s と t をプロットすると、傾きは u になる。 $u = 1.31 \text{ m/s}$ 、不確かさは $\Delta u = 0.04 \text{ m/s}$ である。

表 2

$r = 5 \text{ cm}$,	$\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$	
$h \text{ (m)}$	$s \text{ (m)}$	$t \text{ (s)}$
0	0.0	0.0
20	0.3	1.7
40	0.8	2.6
60	1.5	3.4
80	2.4	4.2
100	3.2	5.0
120	4.1	5.7
140	5.0	6.5
160	5.8	7.3
180	6.9	7.9
200	7.4	8.5
240	9.4	10.0
280	11.7	11.6
320	13.4	12.9
360	15.4	14.4
400	16.4	15.4


 図 3 : 終端速度になる場合の s と t の関係

B. 2 : 空気密度

測定位置を空気密度が一様であると仮定できる地表面に近づける。次に、前と同様の推論を用いると、次のようになる。 $h = h_0 + v_{t0} t$ 、ここで、 h_0 は終端速度に達するまでの落下距離を表す。終端速度に達すると、抗力と重力加速度が釣り合う。

$$mg = 0.24A\rho_a v_t^2.$$

$m = 4\pi\rho r^3/3$ と $A = \pi r^2$ を用いると、次のようになる。

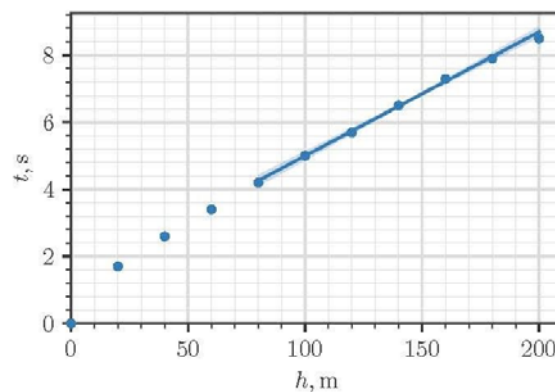
$$v_t(\rho_a) = \{\rho r g / 3 \cdot 0.24 \rho_a\}^{1/2}.$$

地表面上では、 $v_{t0} = v_t(\rho_a = \rho_{a0})$ である。前の課題の測定値を使用して、 t vs h をプロットすると、傾きは、 $1/v_{t0} = 0.037 \text{ s/m}$ である。不確かさは、 $\Delta(1/v_{t0}) = 0.002 \text{ s/m}$ で、 $v_{t0} = 27.0 \text{ m/s}$ 、 $\Delta v_{t0} = (1/v_{t0})/v_{t0}^2 = 2 \text{ m/s}$ となる。そして

$$\rho_{a0} = 4\rho r g / 3 \cdot 0.24 v_{t0}^2 = 0.60 \text{ kg/m}^3.$$

であり、不確かさは以下となる。

$$\Delta \rho_{a0} = 2\Delta v_{t0} / v_{t0} \cdot \rho_{a0} = 0.07 \text{ kg/m}^3.$$


 図 4 : 終端速度になった後の h と t の関係

B. 3: 大気の厚さ

大気の断熱プロファイルにより、上空に行くほど温度と空気密度は低下するが、終端速度は大きくなる。そこで異なる高さでのボールの終端速度を、落下時間の比較から求めることができ、最小の終端速度（ボールの最小の密度と半径により生じる）を推定することができる。このことから、大気の密度ひいては大気の高さを直接知ることができる。

ボールが瞬時に終端速度に達するのであれば、ボールを落とす高さ h_1 と h_2 ($>h_1$) の落下時間の差は、 $h_1 < h < h_2$ であることにより求まる。というのも、 $h < h_1$ の間では、どちらも同じ時間だけ落ちるのに要する（終端速度は高さには依存しないので）。次に、 $h_2 - h_1 \ll h_1$ であれば、以下の式になると推定できる。

$$v_t \left((h_1 + h_2)/2 \right) \approx (h_2 - h_1) / \{t(h_2) - t(h_1)\}. \quad (1)$$

現実には、ボールは終端速度に瞬時に到達することはないが、近似的にはこの効果を見捨てる。大まかな目安として、地上ではボールが経験する時間差 $v_{t0} / 2g = 0.8 \text{ s}$ が生じる。この差は、ボールが高いところから落下するにつれて大きくなるが、タワーの上部で大気が希薄でない限り（後で検証する）、ボールの落下時間に比べれば些細なものである。そこで、終端速度については式(1)で近似する。

計算された速度は、測定された量に大きく影響されるため、落下させる全ての高さにわたって繰り返し測定を行う。

表 3

h (m)	$r = 5 \text{ cm},$		$\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$			
	s_1 (m)	t_1 (s)	s_2 (m)	t_2 (s)	s_3 (m)	t_3 (s)
200	7.6	8.4	7.8	8.6	7.8	8.6
400	17.0	15.7	6.9	15.6	17.3	15.7
600	26.1	22.6	25.4	22.2	26.2	22.7
800	33.6	28.5	34.6	29.2	34.3	29.1
1000	41.1	34.3	43.0	35.7	43.3	35.8
1200	51.1	41.9	50.2	41.2	50.0	41.1
1400	57.9	47.2	58.8	47.8	58.7	47.8
1600	65.5	53.0	65.1	52.8	65.3	52.9
1800	70.9	57.1	72.2	58.2	71.4	57.5
2000	78.5	62.9	79.6	63.8	79.5	63.7

式(1)を用いて、速度を含む表を作成するが、地表面での速度を追加する ($h = 100 \text{ m}$ としたのは、測定範囲の中心であるため)。それらと以下の式を使って空気密度を求める。

$$\rho_a = 4\rho r g / 3 \cdot 0.24 v_t^2.$$

断熱的な大気の密度プロファイルから、

$$\rho_a^{r-1} = \rho_a^{0.4} = \rho_{a0}^{0.4} (1 - h/H_0).$$

したがって、 H_0 は、 $\rho_a^{0.4}$ を h に対してプロットし、直線にフィッティングすることで求まる。

表 4

h (m)	v (m/s)	$\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$	
		ρ_a (kg/m ³)	$\rho_a^{0.4}$ ((kg/m ³) ^{0.4})
100	27.0	0.599	0.814
300	28.0	0.556	0.791
500	29.3	0.510	0.764
700	31.1	0.452	0.728
900	31.6	0.438	0.719
1100	32.6	0.411	0.701
1300	32.3	0.420	0.707
1500	37.7	0.307	0.624
1700	42.6	0.241	0.566
1900	34.1	0.376	0.676

プロットから、傾きが $a = -\rho_{a0}^{0.4} / H_0$
 $= -1.1 \times 10^{-4} \text{ (kg/m}^3\text{)}^{0.4}/\text{m}$ であり、
 切片が、 $b = \rho_{a0}^{2.5} = 0.82 \text{ (kg/m}^3\text{)}^{0.4}$ なので
 $H_0 = -b/a = 7500 \text{ m}$ となる。

H_0 の最大推定値と最小推定値に対応する2つの直線から不確かさを計算する。

$$\Delta H_0 \approx 1/2 [-0.80 \text{ (kg/m}^3\text{)}^{0.4} / -8.4 \times 10^{-5} \text{ (kg/m}^3\text{)}^{0.4}/\text{m} + 0.83 \text{ (kg/m}^3\text{)}^{0.4} / -1.4 \times 10^{-4} \text{ (kg/m}^3\text{)}^{0.4}/\text{m}] \approx 2000 \text{ m}.$$

また、大気の密度は、タワーの上部でもあまり下がらないという仮定が正しいことも確認できる。

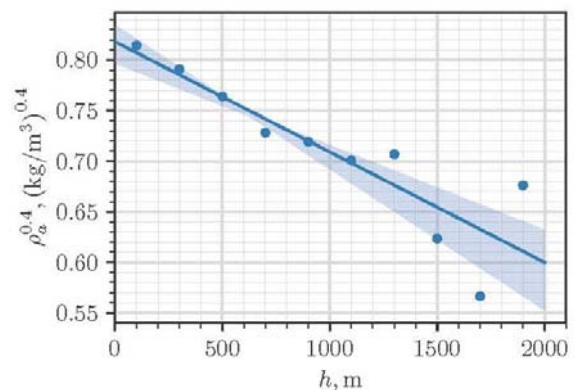


図5 : h と計算値 $\rho_a^{0.4}$ の関係

代替解答 (精度は低い) :

この方法では、空気抵抗が最大になるとき、ボールが終端速度 v_{t0} で落下すると仮定する。これにより、その値が得られる。

$$dh/dt = v_t(h) = v_{t0} \cdot (1 - h/H_0)^{-1/2(\gamma-1)}$$

この式を展開し、積分して、

$$t \approx 1/v_{t0} \int dh (1 - h/H_0)^{1/2(\gamma-1)}$$

ここまでは厳密解であるが、厳密解と異なるのは、「高速化」項で、上層に行くほど相対的な寄与が小さくなるものである。この積分を近似するために、一次の二項展開をすると以下になる。

$$t \approx h/v_{t0} \cdot (1 - 1/4 H_0(\gamma - 1) \cdot h)$$

$$t/h \approx 1/v_{t0} - 1/4 v_{t0} H_0(\gamma - 1) \cdot h$$

t/h を h に対してプロットし、先ほどと同様に H_0 を計算 (切片と傾きを計算) すると、 $H_0 \approx 6300$ m となり、誤差の範囲に収まる。しかし近似値であるため、この手法の評価は 3.0 点中 2.0 点までとする。

B4 : 空気のモル質量と大気圧

断熱的な大気の式から、以下が得られる。

$$H_0 = RT_0/\mu g \cdot \gamma/(\gamma - 1) \quad \text{そして}$$

$$\mu = RT_0/H_0 g \cdot \gamma/(\gamma - 1) = 72 \text{ g mol}^{-1}$$

$$\approx 70 \text{ g mol}^{-1}$$

および、

$$\Delta \mu = \{ \Delta H_0^2/H_0^2 + \Delta g^2/g^2 \}^{1/2} \mu$$

$$= 20 \text{ g mol}^{-1}$$

理想気体の法則から、

$$\rho_0 = \rho_{a0} RT_0/\mu = 20\,000 \text{ Pa}$$

そして

$$\Delta \rho_0 = \{ \Delta \mu^2/\mu^2 + \Delta \rho_{a0}^2/\rho_{a0}^2 \}^{1/2} \rho_0$$

$$= 6000 \text{ Pa}$$

C.1: 1日の長さ

正解を得るには、惑星の自転速度 Ω を求め

ることが必要であり、惑星の自転は、遠心力とコリオリ力によってボールの軌道に影響を与える。しかし、遠心力は $h \ll R$ の場合では、重力加速度から切り離すして解析することは出来ない。コリオリ力は、ボールに対して加速度 $a_{\text{cor}} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ の効果を与える。これはボールの速度と惑星の回転軸の両方に垂直である。従って、赤道に沿って、落下速度に比例して増加し、水平方向には、 $a_x = 2\Omega v_y + a_{\text{drag}}$ で与えられる。

手順としては、空気抵抗の影響を最小にし (ボールの半径と密度を最大にし)、コリオリ力の効果が水平方向の変位に十分寄与するような条件にする。空気抵抗を無視すれば、

$$a_x = 2\Omega v_y = 2\Omega g t \quad \text{なので、}$$

$$v_x = \int a_x dt = \Omega g t^2 \quad \text{であり、}$$

$$x = \int v_x dt = \Omega g t^3/3 \quad \text{となる。}$$

最終的な変位は、 $s = g\Omega t_f^3/3$ となり、落下時間は $h = gt_f^2/2$ を満たす。

これらをまとめると、次の式が得られる。

$$s = 2\Omega/3 \cdot [2h^3/g]^2$$

半径/密度を変化させることで、実際に数メートルのオーダーで、コリオリ力の影響が大きいことが確認できた。0~2000 m の範囲で適当な数の測定を行い、 s vs $h^{1.5}$ をプロットし、その傾き a を求める。

$$a = 2\Omega/3 \cdot [2/g]^2 = 5.3 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1/2}$$

そして不確かさは、

$$\Delta a = 1.1 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1/2}$$

そうすると、

$$T = 2\pi/\Omega = 4\pi/3a \cdot [2/g]^2 = 28\,000 \text{ s}$$

$$\approx 8 \text{ h}$$

および、

$$\Delta T = [(0.5\Delta g/g)^2 + \Delta a^2/a^2]^{1/2} = 0.2 \text{ h.}$$

表 5

$r = 50 \text{ cm,}$	$\rho = 10 \text{ g/cm}^3$	
$h \text{ (m)}$	$s \text{ (m)}$	$h^{1.5} \text{ (m}^{1.5}\text{)}$
0	0.0	0
200	0.2	2800
400	0.5	8000
600	0.8	14700
800	1.2	22600

1000	1.8	31600
1200	2.3	41600
1400	2.8	52400
1600	3.4	64000
1800	4.0	76400
2000	4.8	89400

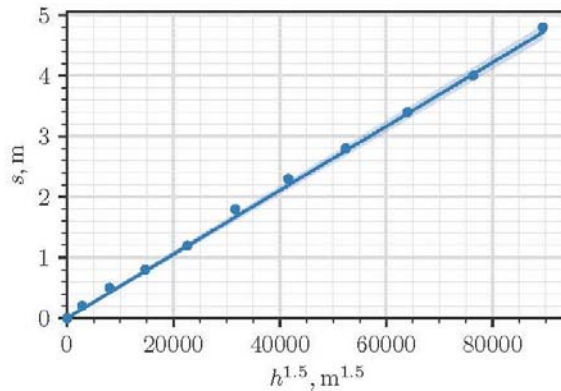


図6 : h の 1.5 乗と s の関係

代替解答 :

別のアプローチとして、この系を非回転座標系（架空の力を扱う必要がない）においてシステムを考える。このとき、ボールは速度 $v_0 = \Omega(R + h)$ でスタートする。角運動量保存則により、ボールが地面に向かって落下するにつれて、ボールの角速度は増加し始め、地面が遅れ始める。（地面が Ω で回転する）。高さ h において、ボールが角速度 ω で運動するとき、角運動量保存則は

$\Omega(R + h)^2 = \Omega(R + H)^2$ となり、ボールと地面の角速度の遅れは次のようになる。

$$\Delta\omega = \omega - \Omega = \Omega \left[\left(\frac{R + H}{R + h} \right)^2 - 1 \right] \approx 2\Omega(H - h) / R.$$

このとき、地面に沿った方向での速度は

$v_x = \Delta\omega R = 2\Omega(H - h) = \Omega g t^2$ となり、コリオリ力の式と同じ式が得られ、そこからは先ほどと同様に解を求められる。