

(これは解答例の主要部分の日本語訳である。採点基準、訳出していない別解などは英文を参照。)

T1: 永久磁石 (10点)

Part A: 2つの磁石の相互作用

(A.1)

Solution 1.

磁石間の距離が大きさに比べて大きいから、それぞれを次の大きさのモーメントをもつ双極子とみなせる。

$$m = \frac{\pi}{4} d^2 h J = 0.75 \text{ A m}^2.$$

双極子は互いに平行、それらを結ぶ直線にも平行で、相互作用エネルギーは一方がつくる場の中にもう一方があると

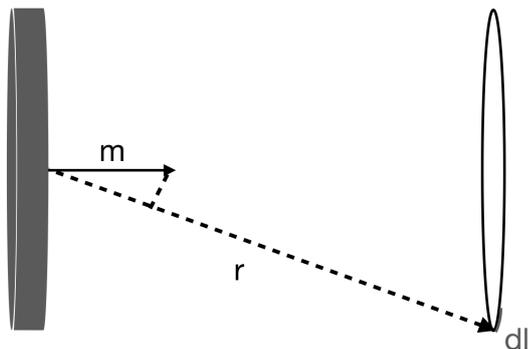
$$W = -\vec{B} \cdot \vec{m} = -\frac{\mu_0 m^2}{2\pi L^3},$$

これを微分して

$$F_1 = \frac{dW}{dL} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi L^4} \approx 0.21 \text{ mN}.$$

Solution 2.

円板を(超電導)電流のリングと置き換えると、その電流は $I = \frac{m}{A} = Jh$ 。リングの線要素 dl に他方のリングのつくる双極子場は、他方のリングの中心と dl を結ぶベクトルの動径方向成分と接線方向成分に分けられ、対称性によりリングに働く力は後者によるもので、大きさは $F = B_p I \pi d$ 、ここで B_p は接線成分(リング面内の成分)。双極子場の式から $|B_p| = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta) = \frac{3\mu_0 m \sin \theta \cos \theta}{4\pi r^3}$ 。 $\tan \theta = \frac{d}{2L}$ を代入し、 θ が小さいから $\sin \theta \approx \theta$ と $\cos \theta \approx 1$ を用いれば $F = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi L^4}$ 。



(A.2)

磁化が一樣な場合、磁性体内部では磁化電流は打ち消しあい、磁化に垂直でない表面(今の場合、円筒の側面)にだけ残る。円筒の高さは半径に比べて小さいから、この電流はリング電流 I とみなせる。リング電流の双極子モーメント $\pi d^2 I/4$ は磁石の全双極子モーメント $\pi d^2 h J/4$ と等しくなければならないので、 $I = Jh \approx 2.4 \text{ kA}$ 。

注意: 電流が円筒の側面をリング状に流れることが分かっていたら、どこかの点(例えばリングの軸上で遠方)で電流の磁場を双極子場と比べても I が求まる。ビオ-サバールの法則により軸上で $z \gg d$ の点では

$$\mathbf{B} = B \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I(d/2)d\theta}{z^3} \frac{d/2}{z} \hat{z} = \frac{\mu_0 I d^2}{8z^3} \hat{z}. \quad (1)$$

これから、上と同じ $I = Jh$ を得る。

(A.3)

磁石間の距離が直径より十分小さいので、長さ πd の直線電流 I が L 離れたときの力と近似できる:

$$F_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi L} \pi d = \frac{\mu_0 I^2 d}{2L} \approx 14 \text{ N}.$$

(A.4)

鎖にかかる荷重は上の鎖ほど大きいから、鎖は一番上で壊れる。磁石の数を $N+1$ 、一つの質量は $M = \frac{\pi}{6} \rho \delta^3 \approx 0.5 \text{ g}$ とすると、磁石の重さ $F = MNg$ が磁石の力

$$F = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi \delta^4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} = \frac{\mu_0 m^2 \pi^3}{60 \delta^4},$$

と釣り合う。ここで、 $m = \frac{\pi}{6} J \delta^3 \approx 78 \text{ mA m}^2$ であり、 $N \gg 1$ だから $N = \infty$ とおけることを用いた。釣り合いから

$$N = \frac{\mu_0 m^2 \pi^3}{60 M g \delta^4} \approx 1320;$$

したがって、全長は $N\delta = 6.6 \text{ m}$ 。また、 $N = 1320$ は確かに1より十分大きい。

(A.5)

Solution 1.

各球状磁石は双極子モーメント m の磁場をつくる。双極子と観測点の距離より十分小さい距離 s をとれば、この磁場は $\pm q$ の磁荷が距離 $s = m/q$ にあるときの磁場と同じである。 $s = \delta$ (したがって、 $q = m/\delta$) とすれば、途中の磁荷は打ち消しあい、両端の磁荷だけが残る。その内一方は十分遠いので、 P の磁場は O にある磁荷によるものであり

$$B = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi \delta r^2} = \frac{J \mu_0 \delta^2}{24r^2}.$$

Solution 2.

磁石の大きさに比べて考えている距離は十分大きいから、磁場は磁石の形に依らず、全磁気モーメントにより決まる。したがって、磁石を長さ δ の円柱とみなしてよい。その結果、鎖は断面積 $A = \frac{\pi}{6} \delta^2$ のつながった円柱となる。その結果、表面電流密度 J のソレノイドと同じ磁場が生じる。ソレノイドの中の磁場は $B_0 = \mu_0 J$ で、磁束は $\Phi = B_0 A = \frac{\pi}{6} \delta^2 \mu_0 J$ 。ソレノイドの両端では磁束は外に出る。マクスウェル方程式により、磁場(磁束密度)は回転(rot)が0なのでポテンシャルで表せ、発散(div)も0である。解は中心力場 $\vec{B} = f(r)\hat{r}$ (r は端からの距離で \hat{r} はその単位ベクトル)の形であり、ガウスの法則から $4\pi r^2 f(r) = \Phi = \frac{\pi}{6} \delta^2 \mu_0 J$ 、よって $B = \frac{J \mu_0 \delta^2}{24r^2}$ 。

Solution 3.(略)

Solution 4.(略)

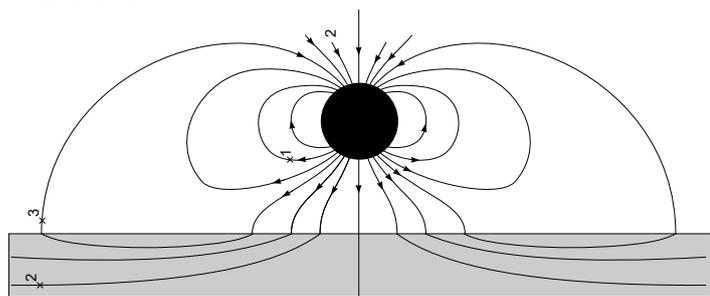
Solution 5.(略)

Part B: 強磁性体との相互作用

(B.1)

強磁性体表面における境界条件により、磁力線は強磁性体体ほとんど垂直に入る。アンペールの回路定理から \vec{B}/μ の接線成分が連続、ガウスの法則から磁束密度の法線成分が連続だから、表面での屈折の式は $\tan \alpha = \mu \tan \beta$ 、 α と β は法線との角、となるが、 $\mu \gg 1$ だから、 α が0に近いとき以外は $\beta \approx 0$ である。強磁性体板に入った磁力線はどこか

で強磁性体板から出るが、図のように磁石から遠いところで出ることになる。



(B.2)

この問題は磁石の映像-表面に関して対称で双極子の向きを反転-を用いて解ける。映像磁石をおけば、表面の境界条件が満たされ、磁力線は表面に垂直に入る。磁石に働く力やトルクは映像磁石から及ぼされると考えてよい。平衡になるのは双極子が映像磁石のつくる場に平行になる場合で、双極子モーメントが表面に垂直な場合である。答えは1行目および2行目の左端である。力の大きさは (A.4) で求めたものと同様であるが、その第1項のみである

$$F = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi\delta^4} = 5.9 \text{ N.}$$

(B.3)

Solution 1.

上で説明したように、磁力線は強磁性体板表面に垂直である。隙間は幅に比べて小さいので隙間の磁場はほぼ直線である。アンペールの回路定理により隙間の磁場は一様である。磁石の円板は側面に沿う密度 J の電流と等価である。図の磁力線に沿った回路定理は

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{r} \approx (B_1 + B_2)h/\mu_0,$$

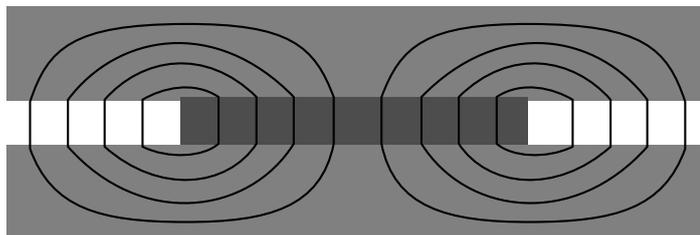
ここで、 B_1 と B_2 は磁石内と磁石外 (ただし隙間の中) の磁束密度。また、 μ が大きいから強磁性体板の中からの寄与を無視した。ガウスの法則により、 $\frac{\pi}{4}d^2 B_1 = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)B_2$ であり、 $D = 2d$ だから $B_1 = 3B_2$ 、したがって $B_2 = I\mu_0/4h = J\mu_0/4 = 0.375 \text{ T}$, $B_1 = 1.125 \text{ T}$.

強磁性体板に働く力を求めるには、力が磁場の原因にはよらないことに注意して、円板磁石を側面を流れる超電導電流 I のリングで置き換え、強磁性体板の間隔を dx だけ変化させる (仮想変位)。超電導リングの磁束は変化しないからこと、強磁性体板中の磁場のエネルギーは隙間の磁場のエネルギーに比べて約 $1/\mu_r$ であるから無視できることを用いて、

$$dW = \frac{\pi}{8\mu_0} [d^2 B_1^2 + (D^2 - d^2) B_2^2] dx = \left(\frac{3\pi}{2\mu_0} B_2^2 d^2 \right) dx$$

これから、力は

$$F = \frac{dW}{dx} = \frac{3\pi}{2\mu_0} B_2^2 d^2 = \frac{3\pi}{32} J^2 \mu_0 d^2 \approx 210 \text{ N.}$$



Solution 2.(略)

Solution 3.(略)

Solution 4. (Incorrect)(略)

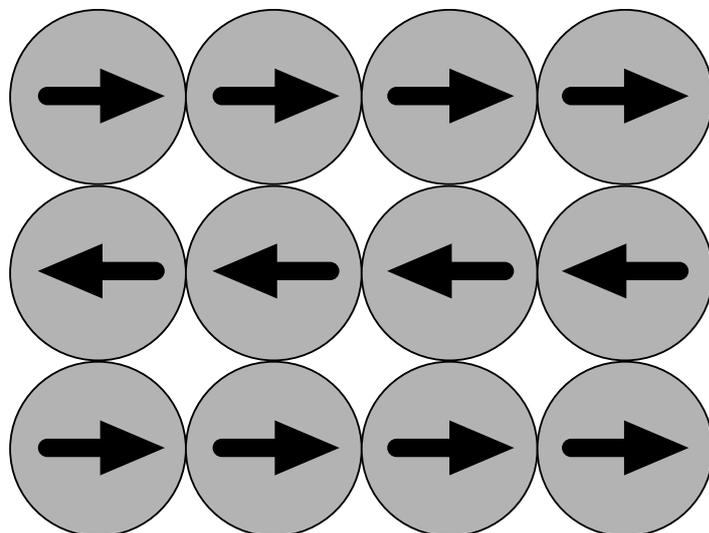
Part C: 強磁性体と反強磁性体のモデル

(C.1)

Solution 1,

双極子の一つの配置を見つけることだから、要請を満たす配置を試してみる。まず、A.4 で解析した鎖状の配置では、すべての双極子が互いに平行で鎖に平行なとき安定である。このような2つの鎖を平行または反平行に置いてみる。どちらの場合も回転に対しては安定である。左右の球から $\vec{B}_1 = \hat{x} \frac{\mu_0 m}{2\pi y^3}$ の磁場を受け、上下の球から $\vec{B}_2 = \pm \frac{1}{2} \vec{B}_1$ の磁場を受ける。 '+' は反平行の場合、 '-' は平行の場合である。 $B_2 < B_1$ だから、どちらの場合もこれらの力の和は \hat{x} 方向であり、回転に対して安定である。

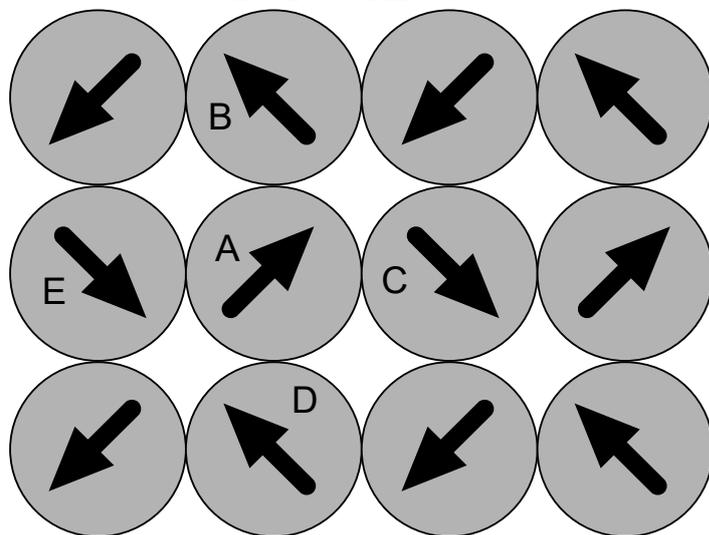
2つの鎖間の引力には垂直方向の最近接の対を考えればよい。距離が y のとき相互作用エネルギーは $W = \pm \frac{\mu_0 m^2}{4\pi y^3}$ で y 方向の力は $F_y = \frac{dW}{dy} = \mp \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi y^4}$, 即ち、 $F_y = \frac{dW}{dy} = \mp \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi y^4}$. よって、反平行のとき引力で、平行のとき斥力である。したがって、図のように、反強磁性体となる。



磁石の一つを取り出すのに必要な仕事は4つの最近接磁石との相互作用エネルギーに負号を付けたもので、 $W = \vec{B} \cdot \vec{m}$, ここで、 $\vec{B} = 2\vec{B}_1 + 2\vec{B}_2 = \frac{3\mu_0 m}{2\pi\delta^3} \hat{x}$. よって $W = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi\delta^3} = 29 \text{ mJ}$.

Solution 2,

下図のような安定な配位も可能に思われる。



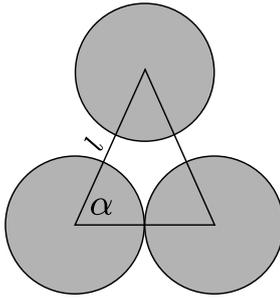
安定であることを示すために、磁石 A において、4つの最近接磁石 (双極子) からの磁場を考えよう。B と D による磁

場は共に $b(\hat{x} + 2\hat{y})$, \hat{x} と \hat{y} は水平, 垂直方向の単位ベクトル, である ($b = m\mu_0/4 \cdot 2^{1/2}\pi\delta^3$). 一方, C と E の磁場は共に $b(2\hat{x} + \hat{y})$ であるから, 合わせて $6b(\hat{x} + \hat{y})$ の磁場となり, A の双極子の方向となる。したがって, A にはトルクは生じない。

隣接する磁石間, 例えば A と B, の力を求めるには, 例えば, $\vec{m}_A = m_0(\hat{x} + \hat{y})$, $\vec{m}_B = m_0(-\hat{x} + \hat{y})$, $m_0 = m/\sqrt{2}$ と分解する。容易に分かるように $m_0\hat{x}$ と $-m_0\hat{x}$, $m_0\hat{y}$ と $-m_0\hat{y}$ は引き合う。他の対 ($m_0\hat{x}$ と $m_0\hat{y}$, $m_0\hat{y}$ と $-m_0\hat{x}$) の間には水平方向の力は働かない。水平方向の力が0であることは, 次のように考えてもよい。A が B に及ぼす B の中心に関するトルクを T_{AB} , B が A に及ぼす A の中心に関するトルクを T_{BA} とすると, 対称性から $T_{AB} = -T_{BA}$. 一方, 作用反作用の法則から, A の中心に関して, B が A に及ぼすトルクと A が B に及ぼすトルクの和は0である。これは, A が B に及ぼす水平方向の力を F_x とすれば, $T_{AB} + T_{BA} + F_x\delta = 0$ と表される。よって, $F_x = 0$ である。したがって, 隣り合う球は互いに引き合い, 全体の配位は安定である。 ($W = \vec{B} \cdot \vec{m} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi\delta^3} = 29mJ$)

(C.2)

磁石相互の配置が違うだけで, 前問と同じことを繰り返す。上の列の磁石は下の列の2つの磁石と正三角形をなして相互作用する。底辺は不変で, 底辺以外の2辺の長さ l が変化する仮想変位を考える。



下の2つの磁石(大きさ m のモーメントをもち, 水平方向)が上の磁石の位置につくる磁場は, 対称性から, 水平 (x) 方向である。下の左の磁石のモーメントをそれぞれの半径方向と半径に垂直方向に分ければ, $m_{\parallel} = m \cos \alpha$ と $m_{\perp} = m \sin \alpha$ となる。したがって磁場の x 成分は

$$B_{3x} = \frac{\mu_0}{4\pi l^3} (2m_{\parallel} \cos \alpha - m_{\perp} \sin \alpha) = \frac{\mu_0 m}{4\pi l^3} (3 \cos^2 \alpha - 1).$$

下の2つの磁石からの磁場は $2B_{3x}\hat{x}$.

回転に対する安定性を考える。各列の磁石の向きは列に平行に揃っていて, 隣り合う列は平行か反平行とすると, どちらの場合でも着目する磁石の上下の列では向きは同じである: x 方向とする。上下の列は着目する磁石の点では $2B_{3x}\hat{x}$ の磁場を及ぼす。また, 着目する磁石と同じ列の左右の磁石からの磁場は $\vec{B}_{4x} = \pm \frac{\mu_0 m}{2\pi\delta^3} \hat{x}$. ここで, ‘+’ は強磁性配列, ‘-’ は反強磁性配列の場合。 $l = \delta$ と $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ に注意すれば,

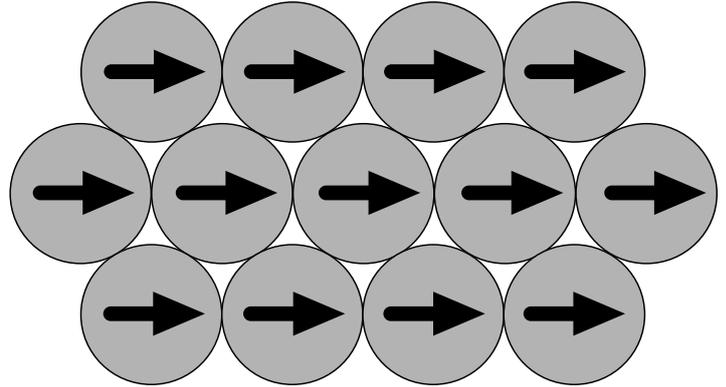
$$\vec{B}_5 = 4\vec{B}_{3x} + 2\vec{B}_{4x} = \frac{\mu_0 m}{2\pi\delta^3} \left(-\frac{1}{2} \pm 2 \right) \hat{x}.$$

‘+’, ‘-’にかかわらず着目する磁石と同じ向きであり, 安定である。

$\vec{m} = \pm \hat{x}m$ とし, y を2等辺三角形の高さとすると, 下の列の磁石から受ける力は

$$F_{5y} = \frac{d}{dy} \vec{B}_3 \cdot \vec{m} = \pm \frac{dl}{dy} \frac{d}{dl} \frac{\mu_0 m^2}{4\pi l^3} \left(\frac{3\delta^2}{4l^2} - 1 \right) = \mp \frac{d}{dy} \frac{3\mu_0 m^2}{16\pi\delta^3};$$

ここで, $\cos \alpha = \frac{\delta}{2l}$ を用い, 微分してから $l = \delta$ とおいた。この力が負であるためには ($\frac{dl}{dy} > 0$) だから) 負号が必要である。したがって下図のように強磁性秩序となる。



一つの磁石を取り出すのに必要なエネルギーは (C.1) と同じように, 次のように求まる:

$$W = \vec{B}_5 \cdot m\hat{x} = \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi\delta^3} = 15 \text{ mJ}.$$

T2: ジェームス・ウェッブ宇宙望遠鏡 (12点)

これから、回折(ボケ)を無視した値として

Part A: 星の像 (1.8 pt)

$$T_p = \left(\frac{A}{\pi f^2} \right)^{\frac{1}{4}} T_g \approx 530 \text{ K}. \quad (8)$$

回折を考慮すると星の像の面積はより大きくなる:

$$a' = \left(\frac{d_i + d_d}{d_i} \right)^2 a \approx 7.46a. \quad (9)$$

ここで2.の解を用いた。

したがって、像の位置の CCD の温度は

$$T_{p,\text{correct}} = \left(\frac{A}{(7.46)\pi f^2} \right)^{\frac{1}{4}} T_g \approx 320 \text{ K}. \quad (10)$$

1. 像の直径

$D_o \gg f$ の距離にある直径 d_o の物体の像の直径を d_i とすると、その比は

$$\frac{d_i}{d_o} = \frac{f}{D_o}, \quad (2)$$

よって

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{(1.7 \times 10^{11} \text{ m})(130 \text{ m})}{(89 \text{ ly})(3 \times 10^8 \text{ m/s})(365 \text{ d/y})(86,400 \text{ s/d})} = \\ &= 2.6 \times 10^{-5} \text{ m} = 26 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

2. 像のボケ(広がり)

ボケの角度の広がり(頂角の1/2)は

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (3)$$

題意により $\lambda = 800 \text{ nm}$. D は主鏡の口径の1/2だから $\frac{\pi}{4} D^2 = 25 \text{ m}^2$, 即ち

$$D = 5.6 \text{ m}.$$

像のボケは

$$d_d = 2\theta_{\min} f = 2.44 \frac{\lambda}{D} f = 1.22 \frac{\lambda f}{\sqrt{A/\pi}}. \quad (4)$$

数値は

$$\begin{aligned} d_d &= 2(1.22) \frac{(8 \times 10^{-7} \text{ m})}{(5.6 \text{ m})} (130 \text{ m}) = \\ &= 4.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 45 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

 $d_d = 37 \mu\text{m}$ も可(因子 1.22 の無視可)。

3. 像の位置における CCD の平衡温度

星から放射されるエネルギーは

$$P_g = 4\pi r_o^2 \sigma T_g^4. \quad (5)$$

望遠鏡の位置での強度は

$$I_g = \frac{P_g}{4\pi D_o^2} = \left(\frac{r_o}{D_o} \right)^2 \sigma T_g^4. \quad (6)$$

これが面積 A の鏡で集められ半径 r_i の像になる。入射パワーは

$$P_i = A \left(\frac{r_o}{D_o} \right)^2 \sigma T_g^4 = A \left(\frac{r_i}{f} \right)^2 \sigma T_g^4 \quad (7)$$

一方、像の温度を T_p とすれば

$$P_i = a\sigma T_p^4,$$

ここで $a = \pi r_i^2$. よって

$$a\sigma T_p^4 = \left(\frac{r_i}{f} \right)^2 A\sigma T_g^4.$$

Part B: 光子のカウント (1.8 pt)

1. 光源の温度

グラフの傾きは

$$\text{slope} = \frac{(3) - (-1)}{(0.111/\text{K}) - (0.151/\text{K})} = -100 \text{ K}.$$

これから

$$\left| \frac{\Delta E_g}{6k_B} \right| = \ln 10 \times 100 \text{ K} = 230 \text{ K}$$

よって、ピクセルに電子を励起することができる温度は

$$\frac{\Delta E_g}{k_B} = 6 \times 230 \text{ K} = 1380 \text{ K}.$$

2. 全計数の不確かさ σ_t

3つの不確かさはそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_r, \\ \sigma_d = \sqrt{i_d \tau}, \\ \sigma_p = \sqrt{p \tau}. \end{aligned}$$

よって

$$\sigma_t^2 = \sigma_r^2 + (i_d + p) \tau.$$

3. S/N 比 $S/N = 10$ のために必要な光子のカウント

温度 $T = 7.5 \text{ K}$ のとき、暗電流 (カウント) は $i_d = 5$ 電子/s だから、全暗電流 (カウント) は

$$i_d \tau = 5 \times 10^4.$$

$i_d = 5 \pm 1$ で可。

P を光子のカウントとすると

$$P = 10 \sigma_t.$$

よって

$$P^2 = 100 (\sigma_r^2 + i_d \tau + P) \quad (11)$$

これから $P \approx 2290$, $p = 0.229$ 光子/s.

4. 光源の強度

光子 (近赤外) のエネルギーは $E_g = 2.3 \times 6k_B T$, 即ち

$$E_\lambda = (1380 \text{ K})(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}) = 1.9 \times 10^{-20} \text{ J}$$

ここでは B.1 (大きさの程度) と違って数値が必要。

1秒間に受け取るエネルギーは $p = 0.229$ 光子/s を用いて

$$E = (0.23)(1.9 \times 10^{-20} \text{ J}) = 4.4 \times 10^{-20} \text{ J}$$

だから、主鏡への入射強度は

$$I = \frac{E/t}{A} = \frac{(4.4 \times 10^{-20} \text{ J/s})}{(25 \text{ m}^2)} = 1.8 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2.$$

Part C: 受動的冷却 (4.4点)

1. 1番目と5番目のシートの温度の表式

以下は「理想的な」解を整理したもの

Q_i を表面からの熱流, Q_{ij} を向かい合う2面の表面からの熱流の差とする。

次の3つの場合を考える必要がある。

太陽と第1番目のシート:

$$Q_{01} = \epsilon A \sigma \left(\frac{I_0}{\sigma} - T_1^4 \right) \quad (12)$$

が太陽からシート1への正味の熱流。

隣り合うシートでは:

$$Q_{ij} = \epsilon A \sigma (T_i^4 - T_j^4), \quad (13)$$

ただし、これは便宜的に定義したもので2シート間の正味の熱流ではない。

最後のシートと空間 (真空) の間では:

$$Q_{56} = \epsilon A \sigma (T_5^4), \quad (14)$$

これは最後のシートから出ていく熱流。

題意から、1つのシートから放射されて隣のシートに吸収されるのは

$$q_i = \alpha Q_i,$$

したがってシートを出て隣のシートに吸収されるのは

$$q_{ij} = \alpha Q_{ij},$$

2つのシートの間から空間に放出されるのは

$$q'_{ij} = \beta Q_{ij}.$$

(採点には関係ないが) 問題では β がどのシート間でも同じと仮定した。この近似により問題が解ける。

これらの表式

$$Q_{01} = \epsilon A \sigma \left(\frac{I_0}{\sigma} - T_1^4 \right) \quad (15)$$

$$Q_{12} = \epsilon A \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (16)$$

$$Q_{23} = \epsilon A \sigma (T_2^4 - T_3^4) \quad (17)$$

$$Q_{34} = \epsilon A \sigma (T_3^4 - T_4^4) \quad (18)$$

$$Q_{45} = \epsilon A \sigma (T_4^4 - T_5^4) \quad (19)$$

$$Q_{56} = \epsilon A \sigma (T_5^4) \quad (20)$$

を加えると

$$Q_{01} + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{45} + Q_{56} = \epsilon A I_0. \quad (21)$$

各シートについては次が成り立つ:

$$q_{i-1,i} = q_{i,i+1} + q'_{i,i+1} \quad (22)$$

即ち、シート $i-1$ からシート i への熱流はシート i からのシート $i+1$ への熱流と空間への放出の和である。

Q_{ij} を代入して、

$$\alpha Q_{i-1,i} = \alpha Q_{i,i+1} + \beta Q_{i,i+1}$$

つまり

$$Q_{i-1,i} = \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right) Q_{i,i+1}. \quad (23)$$

シート1, 5に対しては少し違った表式となる:

$$q_{0,1} = Q_{0,1} = \alpha Q_{1,2} + \beta Q_{1,2}, \quad (24)$$

$$q_{4,5} = Q_{5,6}. \quad (25)$$

最も重要なのは

$$Q_{5,6} = \frac{\alpha^4}{(\alpha + \beta)^4} Q_{0,1}. \quad (26)$$

Eq. 21 に漸化式 Eq. 23 を代入して和を求めると

$$kQ_{0,1} = \epsilon AI_0, \quad (27)$$

ここで k は

$$k = 1 + \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^3} + \frac{\alpha^3}{(\alpha + \beta)^4} + \frac{\alpha^4}{(\alpha + \beta)^4} \quad (28)$$

したがって, Eq. 12 により

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{I_0}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{k} \right)} = \sqrt[4]{\frac{I_0}{k\sigma} (k - 1)}. \quad (29)$$

Eq. 26 と Eq. 14 により

$$T_5 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \sqrt[4]{\frac{I_0}{k\sigma}} \quad (30)$$

即ち

$$T_5 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \sqrt[4]{\frac{1}{k - 1}} T_1.$$

2. α と β の値

ヒントのモデルから

ギャップの面積:

$$A_{\text{gap}} = 4h\sqrt{A_{\text{sheet}}} \quad (31)$$

シートの面積 A_{sheet}

1つのシートで吸収される割合は実効的な面積の比と仮定して

$$\alpha = \frac{\epsilon A_{\text{sheet}}}{2\epsilon A_{\text{sheet}} + A_{\text{gap}}}. \quad (32)$$

これから $\alpha = 0.3$.

放射の割合は次の実効的な面積の比と仮定して

$$\beta = \frac{A_{\text{gap}}}{2\epsilon A_{\text{sheet}} + A_{\text{gap}}} \quad (33)$$

これから $\beta = 0.4$ This result yields $\beta = 0.4$.

3. シート1とシート5の温度の数値

太陽光の強度は $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$, 空間(背景)の温度は $T_b = 20 \text{ K}$ で無視できる。

C.1 と $2\alpha + \beta = 1$ から

β	α	T_1 (K)	T_5 (K)
0.3	0.35	383	120
0.4	0.3	380	102
0.5	0.25	376	83
0.6	0.2	373	65
0.7	0.15	369	48

$\alpha + \beta = 1$ とすれば

β	α	T_1 (K)	T_5 (K)
0.3	0.7	370	189
0.4	0.6	368	165
0.5	0.5	365	140
0.6	0.4	363	114
0.7	0.3	361	87

これらの値は理論的な値 $T_1 = 320\text{K}$, $T_5 = 90\text{K}$ と合う。違いの主な原因は、面による表面のコーティングの違い、シート1の太陽側で赤外を放射し可視光を反射するよう設計された放射・吸収係数の温度・波長依存性、シートにおける温度の不均一、である。

Part D: 極低温冷却 (4点)

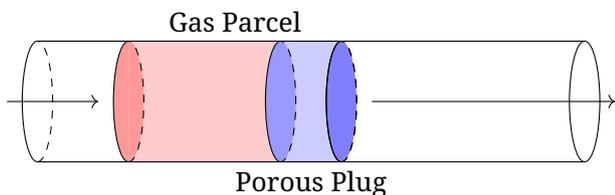
1. 状態変数がどう変化するか?

- (a) 抵抗のあるプラグ (栓) に気体を通すために $P_1 > P_2$ であり, この差が気体を通す力となる。
- (b) プラグの抵抗のためにプラグを通るときエネルギーが散逸するが, 散逸したエネルギーはどこにも行かないので気体の内部エネルギーは増加して $U_1 < U_2$.
- (c) 熱の出入りはないが, この過程は不可逆仮定でありエントロピー一定ではなく $S_1 < S_2$.
- (d) 圧力勾配があるところを通過するから運動エネルギーが与えられ, 右側の気体のバルク速度は左より大きいはずである: 問題にあるように僅かに大きい。質量保存則からモル当たりの体積は増加する $V_1 < V_2$.
- (e) 正しいのは $T_1 ? T_2$. 理想気体ならば $U \propto T$ だから $T_1 \leq T_2$ だが, 理想気体でなければ U は温度と密度の関数であり, T_1 と T_2 の関係は分からない。このことは問題の要点であり, (かつて) ヘリウム液化の鍵となった。

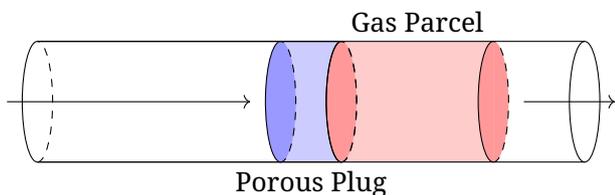
2. P_1, V_1, T_1, U_1 の1モルの気体プラグの左側から右側に通過し, P_2, V_2, T_2, U_2 となったとする。

体積変化から考える方法

下はプラグを通る1モルの気体の図である; 着目する1モルの気体をピンク色で示す。ピンクの気体より左側の気体は一定の力 $P_1 A$ でピンクの気体を体積 V_1 だけ押す。



着目する1モルの気体はプラグを通過し, 右側の気体を一定の力 $P_2 A$ で体積 V_2 だけ押す。



領域1で左側の気体が着目する1モルの気体にした仕事は圧力一定で体積 V_1 だから

$$W_1 = P_1 V_1,$$

同様に, 領域2では右側の気体は体積 V_2 だけ排除されるから

$$W_2 = -P_2 V_2,$$

正味の仕事は

$$W_{net} = P_1 V_1 - P_2 V_2. \tag{34}$$

熱の出入りはないから

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q + W_{net} = P_1 V_1 - P_2 V_2, \tag{35}$$

よって

$$\Delta U = U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2,$$

$$U_2 + P_2 V_2 = U_1 + P_1 V_1.$$

したがって

$$U + PV$$

が保存される。

別の考え方

プラグを通過する気体の微小部分に着目する方法

微小部分 δm の全エネルギーは内部エネルギー δU と (並進運動の) 運動エネルギー δK の和である。体積は δV である。以下の誤解されないところでは δ を略す。

簡単のために δm を底面積 δA 長さ dx の円筒形とする。働く力は両端に働く圧力と側面に働く摩擦力である。

両端の圧力による力は

$$F_{ends} = -V \frac{dP}{dx}$$

(δ) V は円筒の体積。

しかし, この力は側面からの摩擦力 F_{walls} とほぼ釣り合っている: 圧力の勾配を生じさせているのは摩擦力である。

また, (並進運動の) バルク運動エネルギーはほとんど変化しない: プラグを通過しても気体のバルク速度はほとんど変わらない。

このような考え方の問題点は系が熱平衡にないことである: 過程は不可逆であり, 状態変数は厳密には定義できない。したがって

$$dU = TdS - PdV \tag{36}$$

と書いても, 積分して U を求めることはできない: ここまで分かるように $dS \neq 0$ であり, $VdP = -TdS$ とおく根拠はない。これを解決するには, 上に述べた体積変化から考えることが必要である。

一方, (状態変数が熱力学的に厳密には定義されなくても) エネルギー保存則は成り立つ:

$$dU = -PdV - VdP.$$

何故なら, $-VdP$ は (バルクの) 運動エネルギーを変えずに気体の内部エネルギーとなるからである。

よって

$$dU = -d(PV)$$

即ち

$$U + PV$$

が保存される。

3. このグラフから圧力が次のように求まる。

$$dU = TdS - PdV$$

において $dS = 0$ を要求すれば

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \quad (37)$$

即ち、 $U - V$ 図の等エントロピー線の勾配に負号を付けたものが圧力である。

別の方法は U 一定の条件で

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U$$

保存量は

$$U + PV = U - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S V$$

だから、 (U_1, V_1) で等エントロピー線の接線を引けば、勾配は $(\partial U / \partial V)_S$ であり、接線が U 軸 ($V = 0$) を切るところが保存量である。

(同じことだが) H を

$$H = U + PV$$

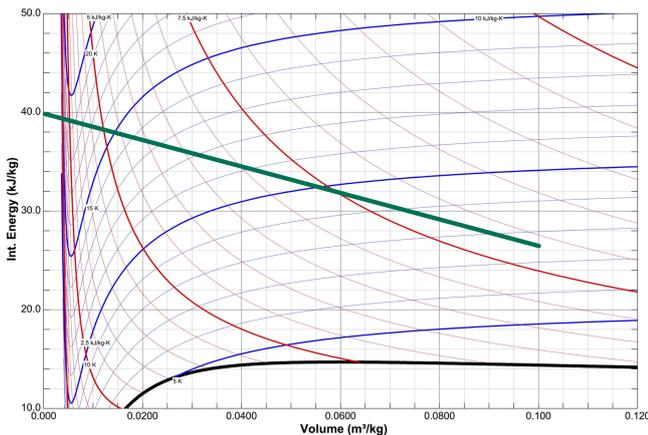
で定義すると

$$U = H_2 - P_2 V$$

$$U = H_2 + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \Big|_{S_2} V \quad (38)$$

が接線の方程式で、 $V = 0$ のとき $U = H_2$ である。

おおよその値は、次のように求まる (下図)。 $V_2 = 0.120$, $T_2 = 7.5$ を通る等エントロピー線を推定して、これに接線を引くと 40 付近で U 軸を切る (緑の線)。

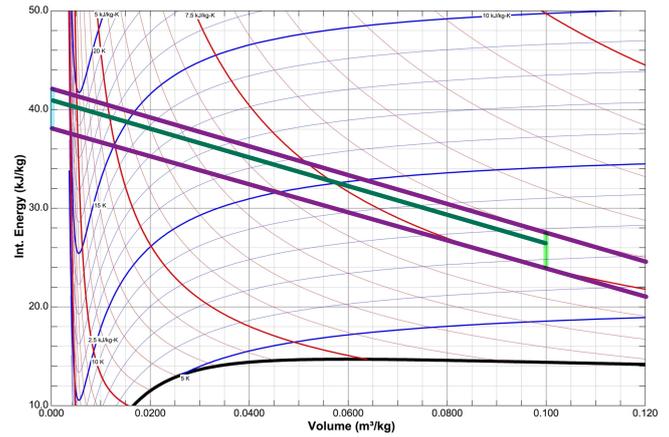


精度を上げるには次のようにする。

$V_2 = 0.100$, $T_2 = 7.5$ を通る等エントロピー線に近い2つの等エントロピー線に接線を引く (下図, 紫色)。これらの U 切片はそれぞれ 39, 41.

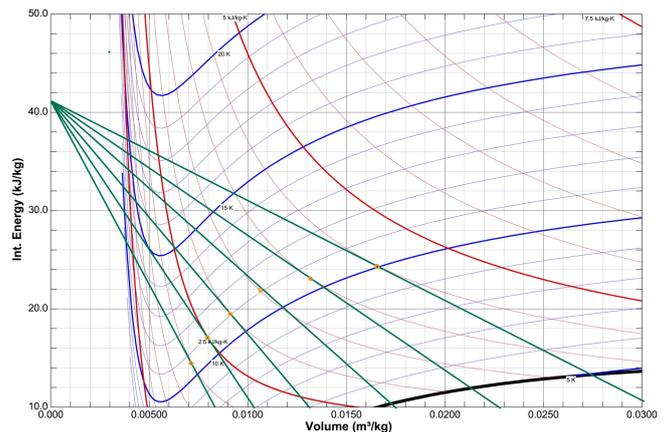
物差しで測ると、 $V_2 = 0.100$, $T_2 = 7.5$ の点は、これらの2つの紫線と $V_2 = 0.100$ の交点の下から約 75% のところにある (明るい緑線)。したがって、保存量 (U 切片) は下から 75% である (明るい青線)。

よって、保存量は約 41 kJ/kg, 正確には $U + PV = 40.7$ kJ/kg.



4. 縦軸の保存量の値 40.7 kJ/kg から等エントロピー線に接線を引き、接点 (小さなオレンジ色の点) をつなぐと、 V_1 の関数としての U_1 が得られる。これと交わる等温線のうち、最も温度の高いものを探す (定規を当てればわかるから、必ずしもすべての接線を実際に引かなくてもよい)。

結果は $T_1 = 11$ K である。 T_1 がこれより高いと、 $T_2 = 7.5$ K まで冷やせない。



5. 縦軸の保存量 40.7 kJ/kg から温度最大の点への直線の傾きから圧力を求める。

以上の結果から

$$P_1 = - \frac{(41) - (10)}{(0) - (0.0170)} \frac{\text{kJ/kg}}{\text{m}^3/\text{kg}} = 1.8 \text{ MPa}$$

T3: スケーリング則 (8点)

Task A: スパゲッティ (2点)

スパゲッティの左半分に着目する。

(着目部分の) 右端において、重力によるトルク $\tau \propto ml \propto d^2 l^2$ と右端に作用するトルクが釣り合う。後者は水平応力の勾配から生じる。水平応力の大きさを σ とすると、力は $F \propto \sigma d^2$ でトルクは $\tau \propto Fd \propto \sigma d^3$ 。よって、

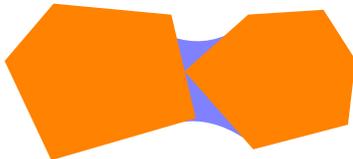
$$\sigma d^3 \propto d^2 l^2 \Rightarrow l \propto \sqrt{d},$$

即ち

$$l' = \sqrt{\frac{d'}{d}} l = \sqrt{10} \cdot 50 \text{ cm} = 158 \text{ cm}.$$

Task B: 砂の城 (2点)

大きな表面張力により、砂粒の表面を濡らす水は砂粒に対して糊の働きをする。このためには全ての砂粒が空気と水の境界面に接している必要があり、水の量は少なすぎても多すぎてもいけない: 少なすぎれば大部分の砂粒は水と接しない、多すぎるとほとんどの砂粒は水に浸かってしまい、やはり表面張力は働かない。砂の城の強度は水の量に依存する。どちらも水の量は適切なもので、砂粒の形は統計的に同じとする。水のメニスカス (以下、「首」と呼ぶ) でつながれた2つの砂粒を考えよう。首は紙面に垂直方向に遠くまで伸びているであろうが、紙面の部分を指すとする。



砂粒を結び付けているのは2つの力である。一つは表面張力 $F_s = \gamma l$, γ は定数, l は首の周囲の長さ。 $l \sim r_g$, r_g は砂粒1個の大きさだから, $F_s \sim \gamma r_g$. もう一つは界面の曲率による大気圧からの圧力の減少で, $F_p = \Delta p A$, A は首の断面積で, $\Delta p \sim \gamma/r_g$. 2つの力は同程度の大きさなので、どちらに着目しても正しいスケーリング則を得る。これらの力は砂粒を押しつけあう。したがって、法線成分も摩擦も F_s および F_p と同程度である。

Solution 1:

上記から、砂粒1個を動かすのに必要な力は $F_g \propto r_g$. 水平な1つの層を動かすのに必要な力は $\propto F_g N_l$, ここで $N_l \sim A/r_g^2$ は1つの層の砂粒の数。円柱を壊す力は、

$$F \propto F_g N_l \propto r_g/r_g^2 = r_g^{-1} \propto V_g^{-1/3},$$

よって

$$F_{fg} = (1/10)^{-1/3} \cdot F_{cg} = 21.5 \text{ N}.$$

Solution 2:

仮想的な面を考えると、面に働く単位面積当たりの力は $\Delta p \sim \gamma/r_g$ である。砂粒を動かすには同程度の大きさの力が必要である。どちらの円柱の場合も力を掛ける面の面積は同じだから、必要な力は $F \propto 1/r_g \propto V^{-1/3}$.

Solution 3:(略)

Solution 4:(略)

Task C: 恒星間旅行 (2点)

宇宙飛行士の全旅行時間を $T = 50 \text{ yrs}$ とする。最も遠くに達するために、一定の固有加速度 $a = g$ で固有時間 $T/4$ だけ飛行し, $d/2$ だけ移動する。それから, $a = -g$ で固有時間 $T/4$ だけ減速してさらに $d/2$ だけ移動して静止する。次に逆に繰り返して、地球に帰還する。

(相対論を無視すれば, $d \propto \frac{1}{2}gt^2 \propto g$ だから答えは1.5になる。もちろんこれは正しくない。)

Solution 1:

一つの方法は、宇宙船の固有座標系で加速度一定ということは、地球の座標系でも一定の力が働くことを意味することをを用いる方法である。これは、例えば、 x 方向に動く座標系にローレンツ変換しても電場の x 成分は変わらないことから導かれる。静止質量 m 電荷 e の加速している粒子に働く力は実験室系と同じである。 t において粒子の速度が v のとき, v で動く慣性系 (瞬間静止系) での加速度はいつでも eE_x/m_0 である。

上記は電磁場のローレンツ変換によらないでも、次のように導くことができる。(i) を実験室系, (ii) を瞬間静止系 (物理量に' を付ける) とし, $t = t' = 0$ のとき, (i) で宇宙船の速度は v とする。微小時間後には, $p' = F't'$, $x' = 0$, $m' = m_0$ である。ローレンツ変換により $t = \gamma t'$ and $p = \gamma(F't' + m_0 v) = tF' + \gamma m_0 v$. 一方, (i) では, $p = \gamma m_0 v + Ft$ であるから, 比較して $F = F'$ (力はローレンツ不変)。

いずれにしても、宇宙船の速度は旅行時間より十分短い時間でほとんど c となる。 $c = 1$ の単位系では, t までの移動距離は精度よく $x = t$ と書ける。

t と固有時間 τ の関係は

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + m_0^2 g^2 t^2}};$$

積分して

$$\tau = \text{asinh}(gt)/g \Rightarrow x \approx t = \sinh(gt)/g \approx \exp(gt)/2g.$$

よって

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{g}{1.5g} \exp(1.5g\tau - g\tau) = \frac{2}{3} \exp(gT/8) \approx 480.$$

x と t の関係は、宇宙船のエネルギー $m = m_0 + m_0 gx$, 運動量 $p = m_0 gt$ から、ローレンツ不変な $(m_0 + m_0 gx)^2 - (m_0 gt)^2 = m_0^2$ を用いて $x(x + 2/g) = t^2 = \sinh^2(gt)/g^2$, よって $x = [\cosh(gt) - 1]/g$ としても求まる。

Task D: That sinking feeling (2点)

半分沈んだ球の振動は重力により駆動される。減衰なしの角振動数は重力加速度の大きさと特徴的な長さ、今の場合 r , により

$$\omega_0 \propto \sqrt{g/r}$$

これが次元的に正しい唯一の式である

抵抗力 F_d は球の速度 v [m/s], 大きさ r [m], と液体の粘性係数 η に依存する。次元解析により $F_d \propto \eta r v$. したがって, 減衰率は

$$\beta = \frac{F_d}{2mv} \propto \frac{\eta r}{m}.$$

質量は r^3 に比例するから

$$\beta \propto \frac{1}{r^2}.$$

したがって,

$$\frac{\beta^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

から

$$\frac{\beta^2}{\omega_0^2} \propto \frac{1}{r^3}$$

振動するのは $\beta/\omega_0 < 1$ の場合であるから

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{1 - (0.99)^2} = 0.271$$

Notes:

- 次元解析なしに $\omega_0 \propto 1/\sqrt{r}$ を得るには, y だけ微小変位すると水中の体積が $\Delta V \propto r^2 y$ だけ変わり, 浮力が $F \propto r^2 y$ 変化するから $\omega_0 = \sqrt{k/m} \propto \sqrt{r^2/r^3} = \sqrt{1/r}$.
- 次元解析なしに $F_d \propto \eta r v$ を得るには, 速度場の変化の特徴的な長さ l は r に比例するから粘性応力は $F_d \sim A\sigma \propto \eta r v$. したがって粘性抵抗は A を球が水に接する面積として, $F_d \sim A\sigma \propto \eta r v$.
- $F_d \propto \eta r v$ を得るには, ストークスの式で, 球が無限に広がった一様流体の中にあるのではないことを無次元定数 K により考慮して $F_d = 6\pi\eta K r v$ を用いてもよい.

Solution 2: 振動の復元力は浮力の変化だから, x を変位とすれば $F_r \propto r^2 x$.

Solution 1のように, 抵抗は $F_d \propto r v = r \dot{x}$. 振動するつ資料は $m \propto r^3$. よって, 運動方程式は

$$k_1 r^2 \ddot{x} + k_2 \dot{x} + k_3 r x = 0,$$

ここで, k_1, k_2, k_3 は定数。抵抗がないときは $k_2 = 0$ で振動数は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_3}{k_1 r}}.$$

抵抗があるときは $x = e^{\alpha t}$ を代入して振動数は $\omega = \text{Im}\alpha$. これから,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_2^2}{4k_1^2 r^4}},$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{k_2^2}{4k_1^2 r^4 \omega_0^2}\right) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{k_2^2}{4k_1 k_3 r^3}\right).$$

$r = r_{min}$ のとき $\omega = 0$ だから

$$\frac{k_2^2}{4k_1 k_3} = r_{min}^3,$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{r_{min}^3}{r^3}\right),$$

よって $\frac{r_{min}}{r_0} = 0.271$.