

理論 第1問 ISS の軌道の低下 [10 点]

イントロダクション



図 1: 地球を周回する ISS (International Space Station)

ISS は現在、最小高度 370 km、最大高度 460 km で、赤道面から $\theta = 51.6^\circ$ 傾いたほぼ円軌道を描いている。軌道は地表からの距離がゆっくりと変わる螺旋 (らせん) で、1 回転の間の高度の変化はごく小さい。

ISS の質量は $M_S = 4.5 \times 10^5$ kg、全体の長さは $L_S = 109$ m である。大きな幅 $W_S = 73$ m をもつソーラーパネル (太陽電池) が ISS の電力を賄っている [NASA Official Report (2023)].

全ての太陽電池と他の構造物を含むと、ISS の実効的な断面積は約 $S \approx 2.5 \times 10^3$ m² である [European Space Agency, SDC6-23].

ISS の軌道の低下は ISS から軌道運動のエネルギーを奪ういくつかの原因による。主要なものは次である:

- 軌道の高度における気体分子と ISS の頻繁な衝突,
- 地球の磁場磁場の中を ISS という導体が動くことにより生ずる力 (アンペールの力と呼ばれる),
- 酸素原子のイオンとの相互作用による力.

「2008 年 5 月には高度 350 km であったが、高度 4.5 km を失い、プログレス 60 により加速されて 5.5 km を回復したが、再び高度 5.5 km を失い...」 [<https://mod.jsc.nasa.gov>]

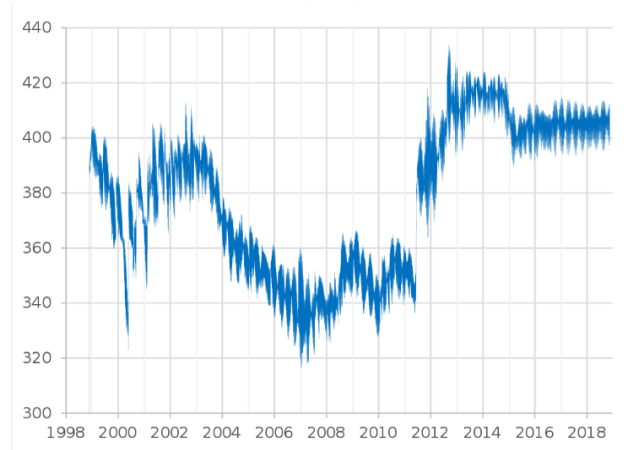


図 2: ISS の高度 (km) の年ごとの変化.

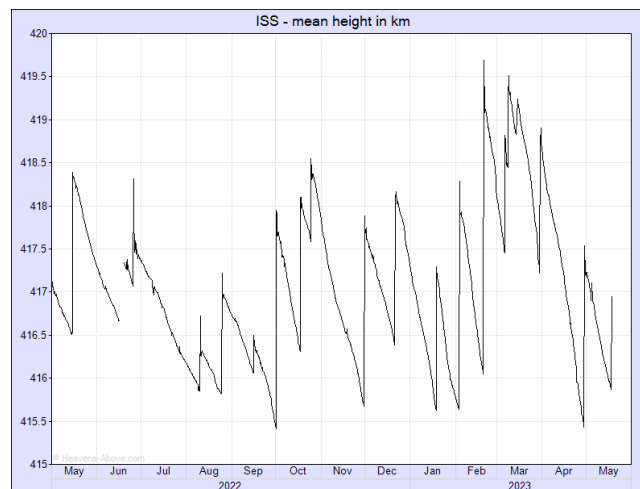


図 3: 2022-2023 年の ISS の平均の高度 (km) in 2022-2023.

「... ISS は毎日 330ft (100 m) もの高度を失う...」 [NASA Control Data (2021)]. 2023 年には, ISS は高度 410 km を周回し, 1 日に 70m 高度が低下し (ひと月では ~ 2 km), 磁気嵐のときには 1 日の低下は 300 m になる。ISS は自身の推進力や ISS にやってくる飛行体の推進力を利用して低下に対する対策を講じている [International Space Station Transition Report (2022)].

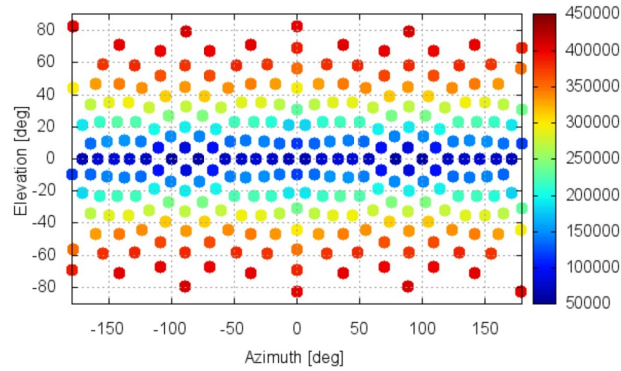


図4: いろいろな角度から見た ISS のモデルの断面積 (単位は $\text{dm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$). CROC によると断面積は 2481 m^2 .

物理定数

気体定数	R	$=$	$8.31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
アボガドロ定数	N_A	$=$	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
空気のモル質量	μ	$=$	$0.029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
地球の質量	M_E	$=$	$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
地球の半径	R_E	$=$	$6.38 \times 10^6 \text{ m}$
重力定数	G	$=$	$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$
地表での空気の密度	ρ_0	$=$	1.29 kg/m^3
地表における重力加速度	g_0	$=$	$9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
地磁気の平均の大きさ	B	$=$	$5.0 \times 10^{-5} \text{ T}$
電子の電荷の絶対値	e	$=$	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Part A: 気体圧力の式の修正 [2.0 点]

大気は主に O_2 分子と N_2 分子からなり, その圧力は理想気体の状態方程式 (Clapeyron-Mendeleev の式) $pV = \frac{M}{\mu} RT$ で与えられる: $pV = \frac{M}{\mu} RT$. ここで, p, V, T, M, μ は, 圧力, 体積, 絶対温度, 空気の質量, 空気のモル質量であり, R は気体定数である.

圧力を高さの関数として表す 2 つの式がある. 一つは温度が高さとともに変わる対流圏 ($h < 100 \text{ km}$) に適用できるものである.

もう一つは, 温度はほとんど高さによらない熱圏 ($h > 250 \text{ km}$) に適用できるものであり, これが ISS に適用できる.

また, 圧力は静水圧で, 向きによらない.

- A.1** ISS のある高さ h における圧力 p_h の一般式を積分形で導け. この式は一般的な大気圧の式 (general barometric formula) と呼ばれる. ヒント: 温度と重力加速度は高さ h に依存することに注意せよ. 0.5pt

注意 1. 300 – 600 km の高さの地球の熱圏では温度変化は小さく，太陽側で平均 800 – 900 K である [NASA data]。したがって，ISS の軌道の高さでは $T_h = T = const$ とおいてよい。特に，周回の半分の時間を急激に温度が下がる地球の影の部分で過ごすので，これらの高度における温度の平均値として $T = 425K$ を用いてよい。この温度は $h = 400$ km における空気密度 $\rho_h \sim 10^{-12}$ kg/m³ [MSISE-90 Model of Earth's Upper Atmosphere] と矛盾しない。

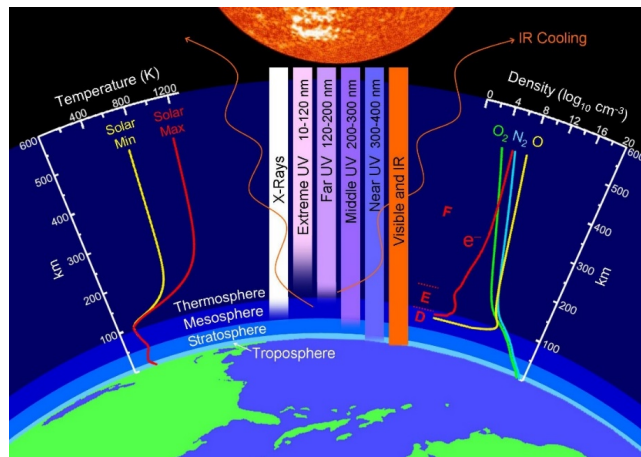


図 5: 地球の熱圏.

A.2 温度と重力加速度 g_h が高さ h に依存しないときの大気圧の式 (理想気体の状態式, standard barometric formula) p_h^{sta} を書き下せ。 $T = 425K$ に対してパラメータ $h_0 = \frac{RT}{\mu g_0}$ を計算せよ。 0.3pt

A.3 温度は一定だが重力加速度が高さ h により変化するときの修正された大気圧の式 (improved barometric formula) p_h^{imp} を求めよ。ヒント: 精度が $O(z_h^2)$ である, 補正の最低次でよい。飛行する高度 h は地表からの高さであり, 地球の半径に比べて十分小さい: $z_h = h/R_E \ll 1$. 0.6pt

A.4 標準大気圧の式 p_h^{sta} と修正された大気圧の式 p_h^{imp} の比 p_h^{imp}/p_h^{sta} を書き下せ。また, $h = 4.0 \times 10^5$ m のときの比の値を求めよ。ここからは, 修正された大気圧の式を用いよ。 0.4pt

A.5 $O(z_h^2)$ の精度で, 高さ h における空気密度 ρ_h と中性空気分子の濃度を求めよ。 0.2pt

Part B: 軌道上の減速と ISS の高度低下 [3.0 点]

一定の摩擦力 \vec{F}_{drag} を受ける質量 M_S の衛星の軌道の低下率を考えよう。高度の低下 dh は高度 h に比べて十分小さいとする: ($dh \ll h$).

B.1 高さ h の軌道にある時の衛星の速度の大きさ v_h と周回周期 τ_h を書き下せ。 0.5pt

B.2	半径 $R_E + h$ の円軌道にある衛星の全エネルギー E_S を書け。	0.5pt
B.3	一定の質量の衛星を減速させる力が制動力 \vec{F}_{drag} により与えられる。その結果、ISS は微小な時間 dt の間に高度が dh 下がる。 F_{drag} が与えられたとして、ISS のエネルギー収支の式を書け。	1.0pt
B.4	衛星の降下の速さ u_h を求めよ。ヒント: 降下の速さは制動力、衛星の高度、衛星の質量に依存する。	0.5pt
B.5	摩擦により高度 h から衛星が1回の周回で落ちる高さ H_h と地表に落ちるまでの時間 T_h を求めよ。 ヒント: $h_0 \ll h \ll R_E$ を考慮せよ。	0.5pt

Part C: 大気による摩擦 [1.0 点]

$h \approx 300 - 400$ km の高度にある衛星の速さ v は大気分子の熱運動の平均の速さ (数百 m/s) より十分大きい。したがって、ISS と衝突する前には、分子は静止しているとみなせる。摩擦力を大まかに評価するために、分子は衝突後は ISS と同じ速度を得ると仮定する。

C.1	大気による制動力 F_{air} , 降下速度 u_h^{air} , および1回の周回での降下 H_h^{air} を求めよ。	0.5pt
C.2	大気による摩擦で高度 h から地表に落ちるまでの時間を求めよ。ヒント: $h_0 \ll h \ll R_E$ であることを考慮せよ。	0.5pt

Part D: 酸素原子のイオンによる摩擦 [1.0 点]

熱圏においては、紫外やX線の太陽放射や宇宙線の影響で、大気がイオン化する (極光, オーロラ)。 O_2 と違い、 N_2 は太陽の放射により強く解離することはない。したがって、一般に、地球の大気の上層では原子の形の N は原子の形の酸素に比べて少ない。250 km 以上の高度では原子の形の O が圧倒的である。電子とイオン化した酸素原子からなる層が大気の太陽側に現れる。この場合、原子の形の O の濃度は $n_{ion} \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$ に達する。

D.1	これらの粒子の衝突による24時間平均の制動力 F_{ion} を求めよ。夜間にはこれらの粒子の層は無視できることを考慮せよ。イオン化した酸素原子の密度を ρ_{ion} と表せ。	0.3pt
D.2	イオン化した酸素原子との衝突による減速で衛星の降下する速さ u_h^{ion} を求めよ。この効果による1周回当たりの降下 H_h^{ion} を求めよ。ヒント: $h_0 \ll h \ll R_E$ を考慮せよ。	0.7pt

Part E: 地球の磁場による減速 [2.0 点]

衛星の運動に対する地球の磁場の影響を考える。地表近くでは磁場の大きさは $(3.5 \sim 6.5) \times 10^{-5} \text{ T}$ であり、平均値は $B = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ である。

衛星が磁場中を高速で動くと、衛星を構成する導体に電磁誘導起電力による電流が流れる。そのため電荷の再配置が起き、衛星の周りに電場が生じ、周囲の荷電粒子の動きに影響を与える。周囲の電子は衛星の中央に対して正の電位をもつところにひきつけられ、周囲の正イオンは負の電位をもつところにひきつけられる。電子は金属中を電流として流れる。一方、衛星の表面にぶつかる正イオンはその電子と再結合して中性原子になる。このように衛星は運動しながら、周りから電子とイオンを集め、これらと衝突する。

衛星の導体部分を流れる電流の大まかな評価のために、電荷を集めるのは衛星の断面積 S と仮定し、集まった全ての電子とイオンが電流に寄与するとしてよう。

E.1 誘起される電流の大きさ I_{ind} を近似的に求めよ。 0.6pt

E.2 衛星の運動と反対方向に働く制動力 (アンペールの力) を近似的に求めよ。0.6pt
(地球の) 経線方向に沿う地磁気 \vec{B} と (衛星の速度) の角を ϕ とする。簡単化のために衛星の長さ L を S の平方根とする。さらに、 $\sin(\phi)$ の平均値を計算する代わりに、 $\sin(\pi/2 - \theta)$ で近似してよい。また、平均値の計算はいくつかの点について行えばよい。

E.3 地磁気の効果による衛星の降下の速さ u_{ind} を求めよ。また、1回の周回当たりの降下率 H_h^{ind} を求めよ。0.8pt
ヒント: $h \ll R_E$ であることを考慮せよ。

Part F: 数値的結果と結論 [1.0 点]

F.1 解答用紙の表 1 に数値を記入せよ。 0.4pt

F.2 解答用紙の表 2 に数値を記入せよ。 0.4pt

F.3 これらの3つの減速過程について、380 km 以上の高度の ISS の軌道に与える影響を順位付けせよ。0.2pt
380 km 以上の高度を周回する ISS の軌道低下に最も大きな影響を与えるのは何か。