

理論 第3問 キャビテーション [10.0 points]

はじめに

キャビテーションとは、圧力低下により液体中に蒸気泡や空洞が発生する現象である。これは、温度上昇によって蒸気泡が発生する沸騰とは大きく異なる。キャビテーションは、圧力が下がると崩壊し、衝撃波や超音速の噴流を発生させるため、油圧機器や船舶など液体の流れに関わる装置では、破損や大惨事の原因となることがしばしばある。一方、化学工業や洗浄、腎臓結石の治療など、積極的な応用も数多く見出されている。

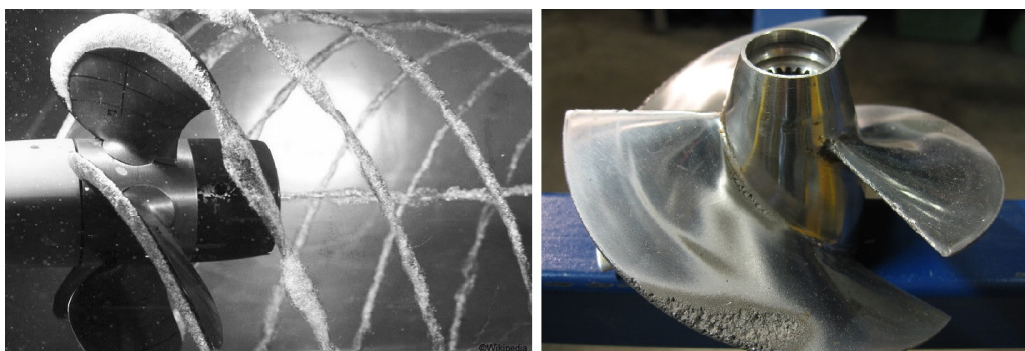


図1 (a) キャビテーションプロペラ (b) キャビテーション損傷 (出典：Wikimedia Commons)

一般にキャビテーションは、液体中にあらかじめ存在する核と呼ばれる微細な気泡から成長すると理解されている。この微細な気泡は数ミクロンの大きさで、水蒸気や非凝縮性ガス（普通の水では空気）を含んでいる。液体中の圧力が十分に低くなると、この核が巨視的な大きさに成長し、キャビテーションが発生する。このような核を取り除いた液体は、キャビテーションを起こさず、負圧に耐えることもできる。これは通常、張力のかかった固体に例えられる。固体の場合も空洞や亀裂がなければ簡単には破裂しない。

この問題では、キャビテーションに関連するさまざまな理想化された現象を扱う。よくあることだが、単純な次元解析から重要な情報を得ることができる。しかし、より精密な研究を行うには、ニュートンの第二法則やフィックの拡散法則などの基本法則を統合した微分方程式が必要である。

まず第一に知りたいのは、いわゆる臨界圧（または閾値）、即ち、核が巨視的な気泡に成長することなく、微小な状態を維持するための水圧の最小値である。臨界圧力は、与えられた温度における蒸気圧とほぼ等しいが、正確な値は表面張力と核に含まれる空気の量によってわずかに低くなる。

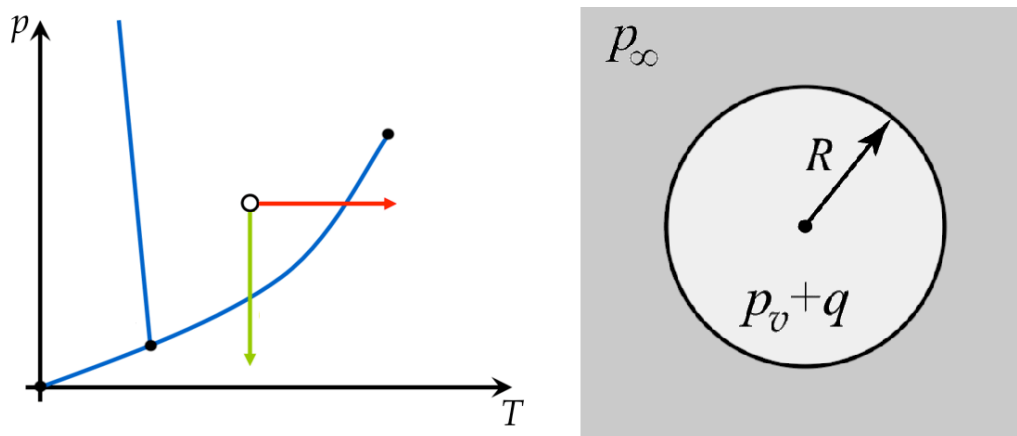


図2 (a) 相図上のキャビテーション（下矢印）と沸騰（右矢印）(b) 典型的な気泡（表記は表1参照）。

外圧が突然、核の臨界圧力以下になると、その核は膨張を始め、その結果、膨張率はすぐに安定した値になる。

この状況をモデル化するため、平衡状態にある巨視的な気泡を考え、その周りの圧力が突然上昇したと考えよう。実際には、気泡が巨視的な大きさになった後、一般的に、圧力は元の値に戻り、気泡は崩壊を始める。ここでは、平衡状態にある巨視的な気泡の外圧が突然上昇すると仮定し、何が起こるか考えてみよう。

崩壊した気泡は、気泡に空気が入っていた場合、最小の大きさに達した後、反発する。一方、純粋な水蒸気の気泡は完全に溶解し、気泡の半径がゼロになると収縮率は無限大に大きくなる。実際には、崩壊の終盤になると、気泡は球形を失い、水の圧縮性が重要になる。

ただし特定の問題で明確に着目する場合を除き、ここでは、それらの影響を無視することにする。

もう一つの興味深い問題は、気泡を含んだ水の中を音波が伝わるとどうなるかということである。

研究の結果、圧力振動に追従して気泡が脈動するだけでなく、音波が気泡の並進運動を引き起こすことが判明した。これらの効果を利用すると、音響波の助けを借りて気泡を操作することができる。例えば、音響キャビテーションでは、高強度の超音波を利用してキャビテーションを発生させたり、気泡を崩壊させたりすることができる。

最後に、そもそも核の存在に関する一種のパラドックスがある。理論的には、溶解した空気の水が飽和していない限り、核から気体-液体界面を通じて水中に空気が拡散すると、数秒のうちに核が完全に崩壊すると予測される。

しかし、実際にはマイクロサイズの核が水中に存在し、その除去は実際上、極めて困難である。ここでは、このパラドックスを解決するいくつかの可能性の一つを考えてみる、すなわち、固体壁の小さな隙間や、水によって運ばれる固体粒子が、空気や水蒸気のマイクロポケットとして機能するという提案である。

役立つと思われる情報

蒸気圧

例えば、水と空気が入った密閉された瓶があるとする。空気が乾燥しすぎていると、水の蒸発により湿度が上昇する。一方、空気が湿りすぎていると、結露して湿度が下がる。平衡状態では、空気中の水蒸気分圧は温度の関数 $p_v = p_v(T)$ となる。

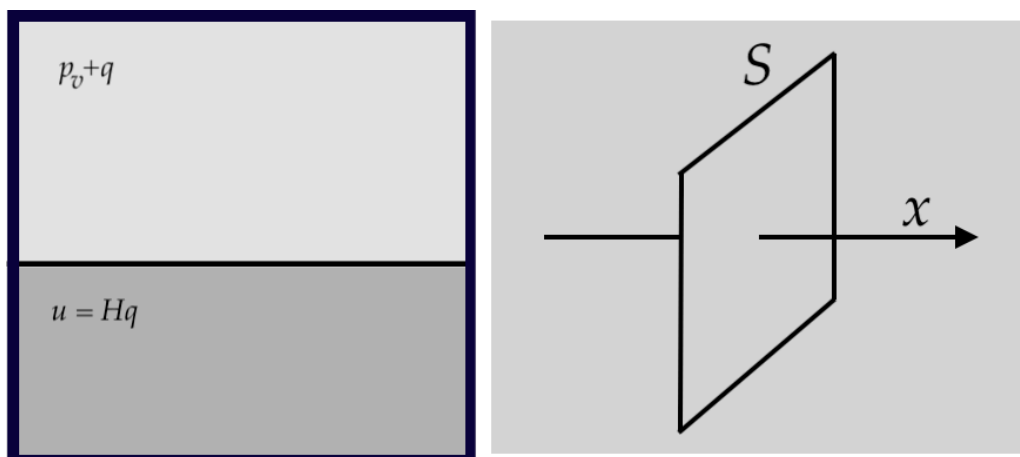


図3 (a) 空気と水が平衡状態にある密閉された瓶 (b) 表面 S を通る拡散の流速は、 S を横切る濃度勾配に比例する。

今、気泡が一瞬にして体積を変えたとすると、気泡内の湿度は周囲の水との平衡を失うので、結露か蒸発によって新しい平衡に達する必要がある。しかし、実際にはこのプロセスは非常に速く、常に平衡状態にあると考えるのが妥当であろう。また、この過程で周囲の水が失う熱や得る熱はごくわずかなので、温度は一定に保たれる。したがって、気泡に含まれる水蒸気分圧は常に p_v に等しいと仮定する。

ヘンリーの法則

蒸気圧の概念で気泡中に存在するの水蒸気量を知ることができるのに対し、ヘンリーの法則は水の中の空気の含有量を知る上で少なくとも部分的な手段を与える。水と空気が入った密閉された瓶を考えると、平衡状態では、水中の溶存空気の濃度は次式のように水上の空気の分圧に比例することがわかる。

$$u = Hq$$

ここで u は、水中の空気の濃度で、 H はいわゆるヘンリー定数、 q は水に接している空気の分圧である。上と同様、ヘンリーの法則の意味での空気の含有量は、少なくとも気泡のごく近傍では常に平衡状態にあり、温度も変化することはない。

フィックの法則

ヘンリーの法則を補完するためには、水中の溶存空気が濃度の高い場所から低い場所へとどのように移動するかを知る必要がある。ここで登場するのがフィックの法則である。フィックの法則によれば、ある面積要素 S における拡散流束は、 S に垂直な方向の濃度勾配に比例する。(図3参照)

$$J = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}$$

ここで、 J は拡散フラックス (単位面積・単位時間あたりに表面を移動する空気の量)、 κ は拡散係数、座標軸 x は S に垂直であると仮定した。 u が x の関数であり、場合によっては他の変数の関数であるとき、 $\frac{\partial u}{\partial x}$ は、他のすべての変数を一定にして、変数 x に関する微分を取ることを意味する。

拡散方程式

第一象限 $Q = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$ において、微分方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\text{および条件} \begin{cases} w(x, 0) = f(x) & \text{for } x > 0, \\ w(0, t) = 0 & \text{for } t > 0, \end{cases}$$

を、満たす関数 $w = w(x, t)$ の値は

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty (e^{-(x-y)^2/(4t)} - e^{-(x+y)^2/(4t)}) f(y) dy.$$

で与えられる。

ガウス型の積分

以下の積分が有用だろう。

$$\int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}, \quad \int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4b\sqrt{b}} \quad (b > 0).$$

パラメータの表記と典型的な値

問題で使用した物理量の表記と、いくつかの重要な定数の典型的な値を表 1 に列挙する。

記号	表現する物理量	典型的な数値
ρ	水の密度	997 kg/m ³
p_∞	気泡から十分離れた所での水圧	101 kPa
p_v	蒸気圧	2340 Pa
σ	表面張力	72.8 · 10 ⁻³ N/m
R	気泡の半径	
R_0	気泡半径の初期値	10 ⁻⁵ m
δ	空気の密度	1.29 kg/m ³
q	気泡内の空気の分圧	
q_0	q の初期値	
γ	空気の断熱係数	1.4
u	水に溶けた空気の濃度	
κ	水中の空気の拡散係数	2 · 10 ⁻⁹ m ² /s
H	水中の空気のヘンリー定数	0.24 · 10 ⁻⁶ s ² /m ²
t	時間	
f_0	自然/共鳴振動数	

仮定

特に指定がない限り、この問題を通して、以下のように仮定する。

- 水は非圧縮性で粘性をもたず、均質である
- 水は全空間を満たしている
- 重力による圧力変化は無視できる

- 温度の時間的・空間的な変化はない
- 気泡はただ一つだけ存在する
- 気泡は球対称で、並進運動はしない
- 気泡キャビティと周囲の水の間で空気の移動はない
- 空気は理想気体である

Part A: 予備的な分析 [1.5 points]

以下は、現象の最初の感触を得るためのウォームアップの設問である。

A.1 簡単な次元解析を行い、気泡の初期半径 R_0 、水の密度 ρ 、水圧 p_∞ 、蒸気圧 p_v から、純粋な水蒸気の気泡の崩壊時間 T を求める式を導け。さらに、 $R_0 = 1 \text{ mm}$ とし、 ρ, p_∞ , and p_v には表 1 の典型的な数値を用いて、式の値を求めよ。ただし、表面張力はないとせよ ($\sigma = 0$)。 0.5pt

A.2 空気と水蒸気からなる半径 $R_0 = 10^{-5} \text{ m}$ の核が、外圧 $p_\infty = 101 \text{ kPa}$ のときに平衡状態にあるとする。泡の中の空気の分圧 q_0 を求めよ。ここで、外圧 p_∞ を徐々に下げるとき、気泡内の空気は等温過程をたどるとする。もし、 $p_\infty < p_c$ で気泡のサイズが際限なく増大するとした条件で定義される臨界圧 p_c を求めよ。 p_v と σ には上の表 1 の典型的な数値を用いよ。 1.0pt

Part B: 主要な動力学 [6.0 points]

ここでは、空気と水蒸気の混合物からなる球状の気泡の詳細な動力学を研究しよう。気泡の壁を通過する空気の移動はなく、したがって全体の動力学は圧力のみによって支配されると仮定する。しかし、これまで述べてきたように、気泡壁では水蒸気の蒸発と凝縮により気泡内の蒸気圧 p_v が維持されることに注意せよ。

B.1 空間を均一に満たす水の中に球状の気泡が 1 つ存在し、外圧 p_∞ などの変化により、球状のまま気泡の大きさが変化することがあるとする。気泡の半径 $R(t)$ とその時間微分 $R'(t)$ 、 $R''(t)$ 、及び表面張力 σ 、水の密度 ρ 、気泡から遠くの圧力 p_∞ 、気泡内の圧力 p を関係づける方程式を導出せよ。 1.5pt

次に、気泡の中に水蒸気（分圧を p_v とする）と空気の両方があり、空気は指数 γ の断熱過程に従うと仮定して圧力 p を 2 つの項に分割せよ。基準点を与えるために、気泡の大きさが R_0 に等しいとき空気の分圧は q_0 でなければならない。蒸発、凝縮、または気泡の空洞と周囲の水との間の空気の移動は、水量に影響を与えないと仮定せよ。

B.2 $p_\infty = 101 \text{ kPa}$ の外圧下にある水槽で半径 $R_0 = 10^{-5} \text{ m}$ の核が最初は平衡状態にあった。この水槽が、突然真空にさらされた（つまり突然 $p_\infty = 0$ になった）とき、成長速度 R' の終端値（漸近値）およびこの終端値に到達する時間を概算せよ。 1.0pt

B.3 半径 $R_0 = 10^{-5} \text{ m}$ の気泡をひとつ含む水槽が、外圧 $p_\infty = 1,600 \text{ kPa}$ のもとで平衡状態にあった。この水槽の周りの圧力が突然大気圧 $p_\infty = 101 \text{ kPa}$ に変化したとき、気泡の再反発 (rebound) する直前の最小半径を概算せよ。 1.0pt

- B.4** 気泡の中に水蒸気以外の気体が存在しない場合、気泡は有限時間で完全に崩壊する。0.5pt
 スケーリング則
 $R(t) \sim (T-t)^\alpha$, における特性指数 α を決定せよ。ここで T は崩壊時間である。

- B.5** B.3 で導いた式に基づき、半径 $R_0 = 0.1 \text{ mm}$ の気泡の球面振動の固有振動数を求めよ。1.0pt

- B.6** Part A で説明した気泡が、 x -軸に沿った定在音波を受け、その圧力場が次式で与えられるとする。1.0pt
 $p(x, t) = p_0 + A \sin\left(\frac{2\pi f}{c}(x+a)\right) \sin(2\pi ft)$,
 ここで、 f は振動数、 c は音速である。
 p_0, A と a は定数であり、これらの意味は式から明らかであろう。

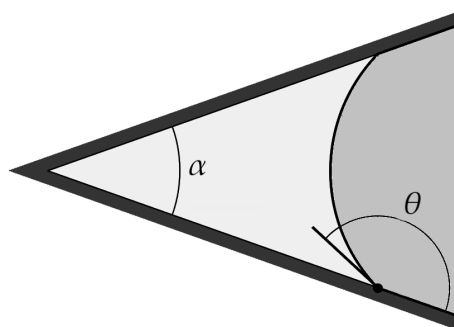
気泡にかかる平均的な力を求めよ。気泡は座標系 xyz の原点に位置し、その大きさは音の波長よりずっと小さい。

Part C: 拡散による核の崩壊 [2.5 points]

この最後のセクションでは、Part B を補完し、気泡壁を横切る拡散の効果に注目する。

- C.1** 空気と水蒸気からなる半径 $R_0 = 10^{-5} \text{ m}$ の核を、溶け込んだ空気が水面上の大気と平衡状態にある水中に置いたとする。泡の中の空気の分圧は $q = 1.70 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, であり、蒸気圧は無視できる。このとき気泡が完全に水に再吸収されるまでに要する時間を概算せよ。2.0pt
 p_∞, κ, δ and σ は表 1 に与えてある。気泡の周囲で空気の拡散が起こる領域は、速やかに気泡そのものよりもはるかに大きくなると仮定する。

- C.2** 下図に示すように、水容器の壁に円錐形の間隙があり、その開口部の角度は α である。円錐内には少量の空気と水蒸気が存在する。力学的平衡と拡散的平衡の条件を書き留めなさい。空気のポケットが消えることなく隙間にとどまるのはいかなる場合か求めよ。表面上の水の接触角は θ である。0.5pt



円錐形の間隙