水と物体 (10 pt)

この問題では, 水と物体の相互作用によって引き起こされる, 表面張力に関する現象を考える. パート A では運動を扱い, パート B と C では静的な状況を扱う.

必要であれば, 関数 $y(x)$ が微分方程式 $y''(x) = ay(x)$ （a は正の定数）を満たす場合, その一般解は $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$ という事実を使うことができる. ここで A と B は任意の定数である.

パート A：水滴の合体（2.0 ポイント）

図 1 に示すように, 超撥水性材料の表面上に 2 つの静止した球形の水滴があるとする. 超撥水性材料とは, 水を強くはじく材料ということである.

最初, 全く同じ 2 つの水滴が隣り合って超撥水性の表面に置かれている. 次にこの 2 つの水滴は接触して合体し, より大きな球形の水滴となり, 突然跳ね上がる.

A.1 合体前の両水滴の半径 a は $100\ \mu$m である. 水の密度 ρ は 1.00×10^3 kg/m^3 で, 表面張力 γ は 7.27×10^{-2} J/m^2 である.
合体前後の表面エネルギーの差 ΔE の一部, kΔE は, 水滴が跳ね上がる運動エネルギーに変換される. 以下の仮定のもとで, 合体した水滴の初期跳ね上がり速度 v を有効数字 2 桁で求めよ： 2.0pt

- $k = 0.06$.
- 合体の前後で, 水の総量は保存される.

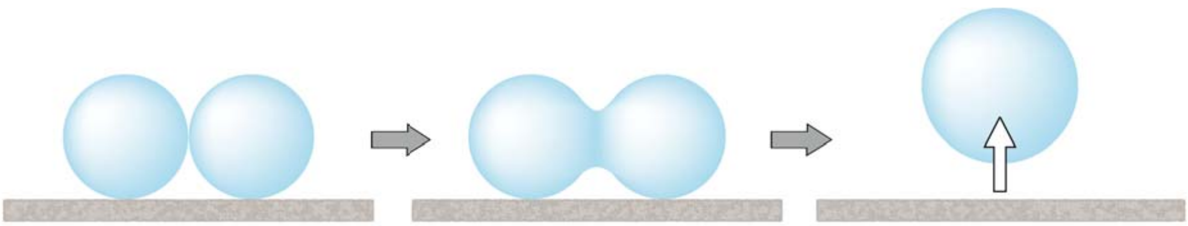

図 1：2 つの水滴の合体と合体した水滴のジャンプ.

パート B. 縦に置かれた板（4.5 ポイント）

平らな板を垂直に水に浸す. 図 2(a) と図 2(b) はそれぞれ, 親水性と撥水性の板が作る水面の形状を示している. 板の厚みは無視している.

板の表面は yz 平面上にあり, 板から遠く離れた水平な水面は $z = 0$ の xy 平面上にある. 表面の形状は y-座標には依存しない. xz 平面上で, 水面上の点 (x, z) における水面と水平面のなす角を $\theta(x)$ とする. ここで $\theta(x)$ は正の x 軸を基準として測定され, 反時計回りを正とする. 板と水面の接触点（$x = 0$）における $\theta(x)$ を θ_0 とする. θ_0 は板の素材の特性によって決まる量である.

水の密度 ρ は一定で, 水の表面張力 γ は一様である. 重力加速度の大きさを g とする. 大気圧 P_0 は常に一様であると仮定する. 以下の手順で水面の形状を決定しよう. なお, 表面張力の単位は J/m^2 であり N/m と書くこともできる.

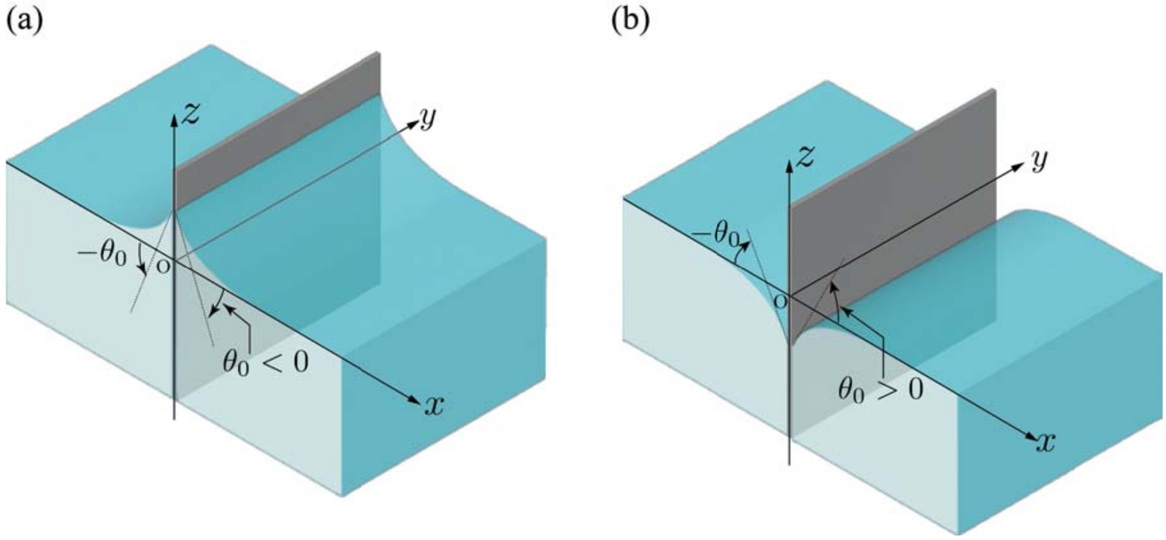

図 2：垂直に水に浸した板. (a) 親水性の板の場合.
(b) 撥水性の板の場合.

B.1	図 2(a) に示すように, 親水性の板の場合を考える. ここで, 水圧 P は, $z > 0$ に対する条件 $P < P_0$ と, $z = 0$ に対する条件 $P = P_0$ を満たすことに注意する. z における P を, ρ, g, z, P_0 で表せ.	0.6pt

B.2	図 3(a) に網掛けで示した水ブロックを考える。その xz 平面断面を図 3(b) にハッチングで示す. z_1 , z_2 をそれぞれ水ブロックと空気との境界（水面）の左右端座標とする。 圧力によって水ブロックにかかる, y-軸方向単位長さあたりの正味の力 f_x の水平成分 (x 成分) を, ρ, g, z_1, z_2 で表せ. P_0 は結果的に, 水ブロックに正味の水平力を与えないことに注意せよ.	0.8pt

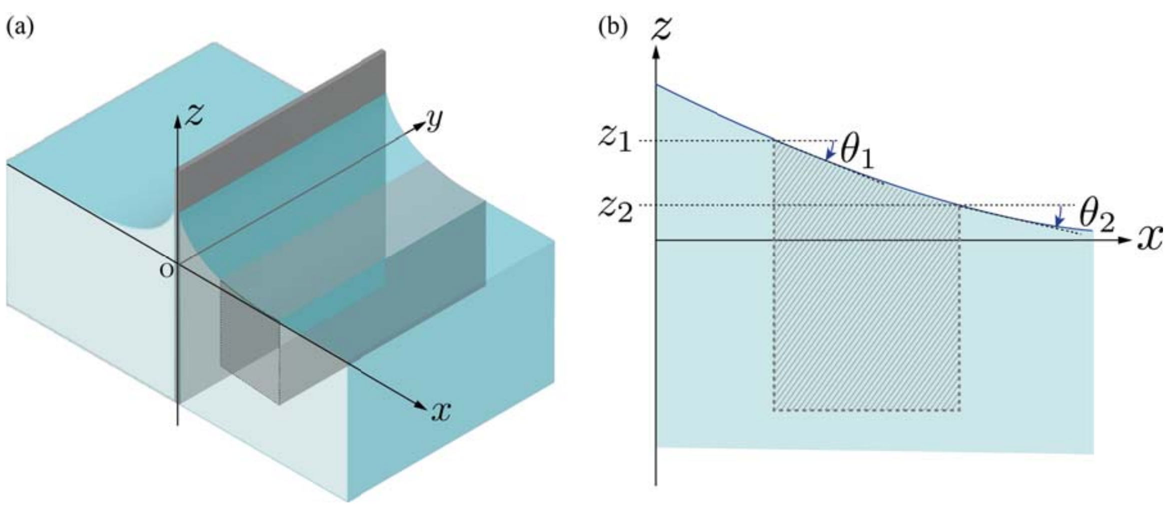

図 3：水面上の水ブロックの切り出し形状. (a）は鳥瞰図,（b）は断面図.

B.3 水ブロックに作用する表面張力は, B.2 で議論した力 f_x と釣り合う. ここで, θ_1 と θ_2 をそれぞれ, 左端と右端における水面と水平面のなす角と定義する. f_x を $\gamma, \theta_1, \theta_2$ で表せ. 0.8pt

B.4 水面上の任意の点 (x, z) において以下の式が成り立つ, 0.8pt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant}. \tag{1}$$

指数 a を決定し, 定数 ℓ を γ と ρ を用いて表せ. この式は板が親水性でも, 撥水性でも, 板の素材に関係なく成り立つことに注意せよ.

B.5 B.4 の式 (1) において, 水面の変動は緩やかで $|z'(x)| \ll 1$ が成り立ち, $\cos\theta(x)$ が $z'(x)$ の 2 次までの展開で近似できると仮定する. そのようにして, 得られた方程式を x に関して微分すると，$z(x)$ が満たす微分方程式が得られる．この微分方程式を解き, $\tan\theta_0$ と ℓ を用いて, $x \geq 0$ に対する $z(x)$ を求めよ. 図 2 と図 3 の垂直方向は見やすくするために誇張されており, $|z'(x)| \ll 1$ という条件を満たしていないことに注意せよ. 1.5pt

パート C：2 本の棒の相互作用（3.5 ポイント）

同じ材質による 2 本の同一の棒 A と B が, y-軸から同じ距離で y-軸に平行に浮いている（Fig.4）.

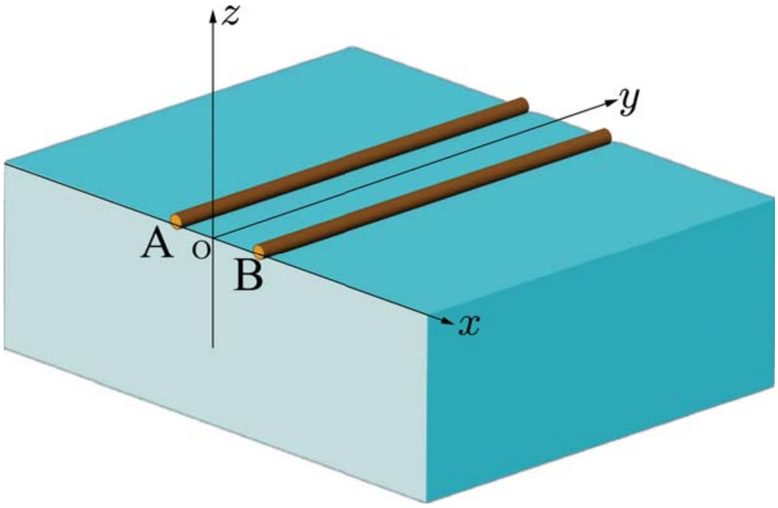

図 4：水面に浮かぶ 2 本の棒 A と B.

C.1 棒 B と水面の接点において, 図 5 に示すように, z-座標 z_a , z_b , 角度 θ_a , θ_b を定義する. $\theta_\mathrm{a}, \theta_\mathrm{b}, z_\mathrm{a}, z_\mathrm{b}, \rho, g, \gamma$ を用いて, 棒 B にかかる水平力成分 の y-軸方向単位長さあたりの大きさ F_x を表せ. 1.0pt

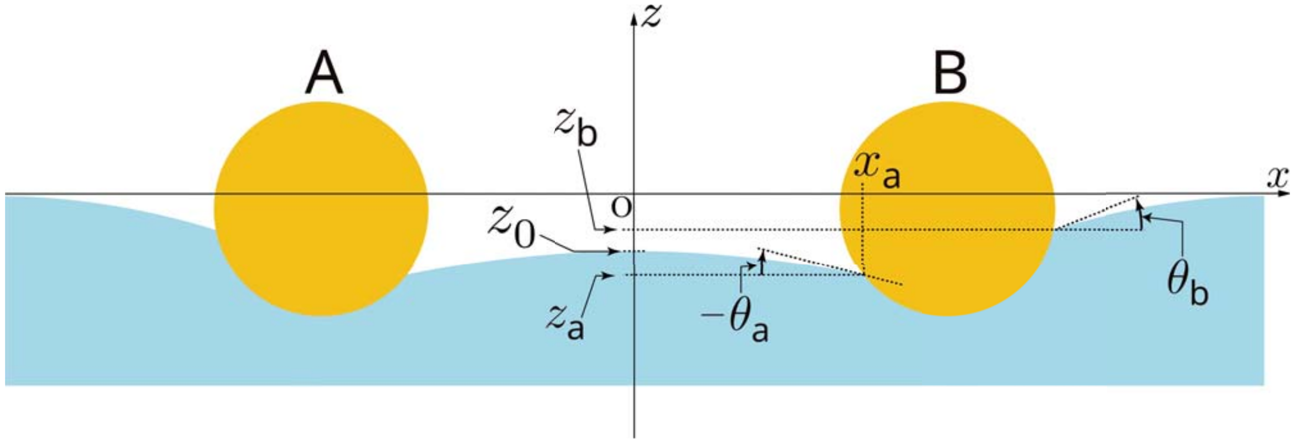

図 5：水面に浮かぶ 2 本の棒の垂直断面図.

C.2	xz 平面上の 2 本の棒の中点で, 水面の z-座標 z_0 を定義する. C.1 で得られた力 F_x を θ_a, θ_b, z_a, z_b を使わずに表現せよ.	1.5pt

C.3	x_a を棒の左側で棒と水面が接する点の x 座標とする. B.4 で求めた微分方程式を用いて, これら 2 本の棒 A, B の中点の水位座標 z_0 を x_a と z_a を用いて表せ. B.4 で導入した定数 ℓ を用いてもよい.	1.0pt