

●望ましい予備知識（用語、概念、法則など）

高校物理，特に波動の単元の未修者に向けて，簡略化したテキストを用意しました。細部は理解できなくても全体の様子を把握しておく，講座の理解が深まると思います。数学が得意な人は数式も読んでください。そうでない人は読み飛ばして構いません。

波動の既修者にとっても，教科書とは異なる観点から説明したところもあるので，視野が広がるのが期待されます。

講座当日も手元に置いて参照してください。質問があればお応えします。

・等速円運動

円周上を一定の方向に，一定の速さで移動する運動を**等速円運動**という。円の半径を a ，**周期**（1 周するのに要する時間）を T とすると，速さは $v = 2\pi a/T$ ，**回転数**（単位時間に回転する回数）は $f = 1/T$ となる。

円運動する**質点**（物体の大きさを無視したもの）の位置は，基準の方向から反時計回りに測った中心のまわりの回転角 θ によって指定される。 xy 平面上の点の位置を**極座標**を使って $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表すと，原点を中心とし，半径 a ，周期 T で等速円運動する質点の時刻 t における位置は， $r = a$ ， $\theta = \omega t + \theta_0$ と表される。ここで， $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ は**角速度**とよばれ，単位時間に回転する角度を表す。角速度をもちいると，円運動の速さは， $v = 2\pi a/T = 2\pi a f = a\omega$ と表される。

・弧度法

扇形の 2 本の半径のなす角（中心角）の大きさを，弧と半径の長さの比で表す方法を**弧度法**といい，単位として**ラジアン**（記号：rad）を用いる。弧度法による数値と日常つかう度数法による数値との間には比例関係が成り立ち， $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ である。弧度法を用いると，角速度あるいは次に述べる角振動数 ω の単位は，ラジアン毎秒（記号：rad/s）となる。

・単振動

等速円運動を軌道面に沿ってある方向から見た運動を**単振動**という。原点を中心とし，半径 a ，周期 $T = 2\pi/\omega$ の等速円運動を x 軸方向から見た運動は， $y = a \sin(\omega t + \theta_0)$ と表され， y - t グラフは正弦曲線となる。単振動でも T を周期というが，単振動では， a を**振幅**， ω を**角振動数**， $f = \omega/2\pi = 1/T$ を**振動数**という。

正弦関数 $\sin$ の引数（円運動の回転角） $\theta = \omega t + \theta_0$ を単振動の**位相**という。時刻 $t = 0$ における位相である θ_0 を**初期位相**という。位相はその時点での振動状態（振幅に対する変位の割合 (y/a) はどれだけか，変位は増加中か減少中か）を表す。

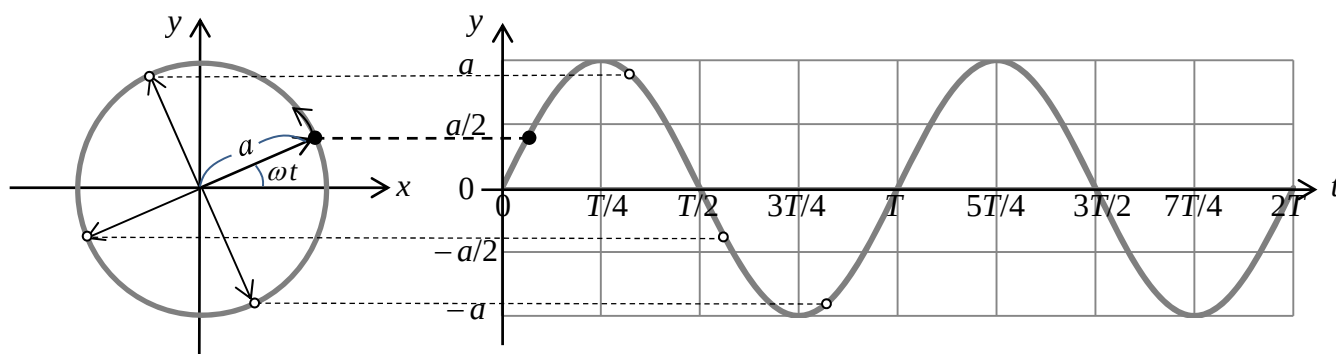


図 1 等速円運動と単振動（初期位相 $\theta_0 = 0$ の場合）

・波（波動）[力学的な波動]

一般に、物理量の変化が時間経過とともに空間を移動する（伝わる）現象を**波動**（あるいは単に**波**）という。光などの電磁波や重力波のように真空中を伝わる波もあるが、ここでは、物質中を伝わる波を考える。波を伝える物質を**媒質**という。媒質の一部分が**変位**（位置が変わること）すると、まわりの媒質との間に**復元力**（変位の差を減らそうとする力）がはたらく。これにより、媒質の元の部分には変位と逆向きの加速度が生じ、となりの部分には変位の向きの加速度が生じる。これが、媒質中に変位が波として伝わるための基本的な機構である。

・波の速さ

媒質の変位が波として伝わる**速さ** v は、復元力が大きいほど速く、媒質が重い（密度が大きい）ほど遅くなる。連続体（媒質が原子・分子でできていることを無視して、一様な物質とみなしたもの）中を伝わる波の速さは、（後に述べる振動数や波長に依らず）一定であり、波動に対する媒質の性質を表す最も基本的な量である。

・波の記述

空間内を一方向（以下では、 x 軸方向の正または負の向き）に進む波を考える。これを**進行波**という。波が無い状態（つり合いの状態）において位置 x にあった媒質の、時刻 t における変位が y であったとする。媒質の位置 x と時刻 t が定まれば、変位 y は決まるので、これを2変数関数 $y(x, t)$ で表す。

ある瞬間 $t = t_0$ における波の様子は、位置 x の関数としての変位 $y(x) = y(x, t_0)$ で表される。媒質の各点の変位後の位置を繋いだ曲線は y - x グラフで表され、**波形**とよばれる。時間経過とともに、波形は形を変えずに、全体が速さ v で正または負の向きに移動する。

ある位置 $x = x_0$ の媒質の**振動**（つり合いの位置付近での運動）の様子は、時刻 t の関数として $y(t) = y(x_0, t)$ で表される。これを表す y - t グラフも「波形」とよばれることがある。

速さ v で進む進行波の時刻 0 における波形が $f(x)$ であったとすると、 $y(x, 0) = f(x)$ が成り立つ。正の向きに進む波では、時刻 t における位置 x の変位は時刻 0 には位置 $x - vt$ にあったものであるので、 $y(x, t) = y(x - vt, 0) = f(x - vt)$ と書ける。負の向きの場合も同様に考えられ、正の向きに速さ v で進む進行波の変位は $y(x, t) = f(x - vt)$ 、負の向きに速さ v で進む進行波の変位は $y(x, t) = f(x + vt)$ と書くことができる（**ダランベールの式**）。

・波の進行と媒質の速度

波が伝わり、波形が速さ v で移動しても、媒質（の各部分）は波形と一緒に移動することではなく、つり合いの位置のまわりで振動するだけである。波形の移動に伴う媒質の各点の運動は、波形を少し移動させたときの各点での変位の増減を見ればわかる。

正の向き（右）に進む波では、波形の傾き（その点における波形の接線の傾き）が正（右上がり）の部分にある媒質の速度は負（変位が（代数的に）減少中）であり、波形の傾きが負（右下がり）の部分にある媒質の速度は正（変位が増加中）となる。

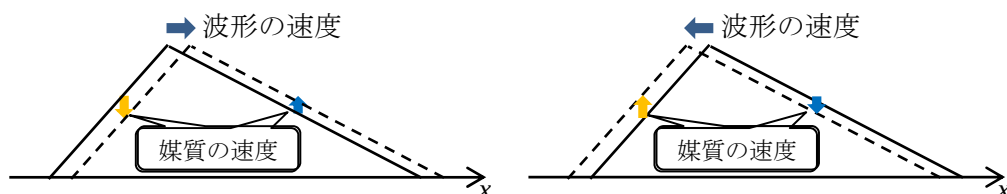


図2 波の進行と媒質の速度

負の向き（左）に進む波では、波形の傾きが正の部分にある媒質の速度は正であり、波形の傾きが負の部分にある媒質の速度は負となる。

- ・パルス波と連続波

波形 $y(x)$ が、空間の限られた範囲でのみ 0 でないような波を**パルス波**という。媒質の 1 点に着目すると、そこに振動 $y(t)$ が生じるのは、空間的に限られたパルス波が通過する時間間隔に限られる。

波形 $y(x)$ が、長さ λ （ラムダ）の同じパターンを無限に繰り返してできている波を**連続波**という。繰り返す単位の間隔の長さ λ を**波長**という。波長 λ の連続波が速さ v で移動すると、媒質の各点は、1 波長が通り過ぎる時間 $T = \lambda/v$ を**周期**として、周期的な運動（振動）を繰り返す。

- ・連続波の基本式

連続波の場合、波長 λ 、周期 T 、波の速さ v の間には、 $T = \lambda/v$ 、 $v = \lambda/T$ 、 $\lambda = v T$ の関係が成り立つ。これは重要な公式だが、パルス波では意味を持たないことに注意。

- ・正弦波

最も基本的な進行波として、波形が正弦関数である連続波を考える。これを**正弦波**という。変位の最大値が a 、波長 λ の正弦波の時刻 0 における波形は $f(x) = a \sin(2\pi x/\lambda + \alpha)$ と表すことができる。正弦波の山の高さと谷の深さは a に等しく、これを**振幅**という。正弦波の波形は、一つの山とそのとなりの谷一つとの組を繰り返しの単位として、無限に連ねたものである。波形のとなり合う山から山、あるいは谷から谷の間隔は波長 λ に等しい。

正の向きに速さ v で伝わる振幅 a 、波長 λ 、周期 $T = \lambda/v$ の正弦波の変位は、

$$y(x, t) = a \sin[(2\pi/\lambda)(x - vt) + \theta_1] = a \sin[(2\pi/\lambda)(vt - x) + \theta_0] = a \sin[2\pi(t/T - x/\lambda) + \theta_0] \\ = a \sin[(2\pi/T)(t - x/v) + \theta_0]$$

などと表される（公式 $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ を用いた）。 $\theta_0 = \pi - \theta_1$ は初期位相とよばれる。

負の向きに速さ v で伝わる振幅 a 、波長 λ 、周期 $T = \lambda/v$ の正弦波の変位は、

$$y(x, t) = a \sin[(2\pi/\lambda)(x + vt) + \theta_0] = a \sin[2\pi(t/T + x/\lambda) + \theta_0] = a \sin[(2\pi/T)(t + x/v) + \theta_0]$$

などと表される。 θ_0 は初期位相とよばれる。

振幅 a 、波長 λ の正弦波が、速さ v で伝わっている媒質中の各点は、振幅 a 、周期 $T = \lambda/v$ の単振動を行う。逆に、媒質の 1 点が行う、振幅 a 、周期 T の単振動が速さ v の波として媒質中を伝わったものが振幅 a 、波長 $\lambda = v T$ の正弦波である。

- ・横波と縦波

媒質の振動の方向が、波の進行方向と垂直な波を**横波**、平行な波を**縦波**という。

- ・弦を伝わる波動 [横波]

一様な（材質や密度、太さが場所によって変わらない）やわらか（自由に曲がる）で細長い物体に張力を与えて張ったものを**弦**という。長い弦の一端を振動させると、その振動が一定の速さで弦を伝わる。これが弦に生じた横波である。

弦を伝わる横波の速さ v は、張力 F が大きいほど、弦が軽いほど、すなわち、弦の太さ（断面積 S ）が細いほど、弦の材質の密度 ρ が小さいほど速くなる。弦の微小区間の運動方程式（波動方程式となる）を立てることにより、 $v = \sqrt{F/(\rho S)}$ が成り立つことが導かれる。左辺と右辺の比例関係が成り立つことは、 v 、 F 、 ρ 、 S の単位が、それぞれ、m/s, kg m/s², kg/m³, m² であることから導くことができる（次元解析法）。

- ・媒質の境界（固定端と自由端）

大気中を伝わる音波のように、媒質が無限に広がっていると考えられる場合もあるが、弦のように長さが限られているものもある。弦の場合は張力を与える必要があるため、通常、弦の両端は固定されているので変位は 0 となる。このような、媒質の境界を**固定端**という。

実現は難しいが、弦の一端を滑らかな（摩擦が無視できる）棒に引っ掛け、ピンと張ると、弦の棒に接する端では、棒に垂直な方向には弦に必要な張力が加えられ、棒と平行な方向には弦の変位を元に戻そうとする復元力がはたらかない。このような媒質の境界を**自由端**という。媒質に働く復元力の大きさは、となりの媒質との変位の差に比例するので、復元力がはたらかない自由端では、媒質の変位はとなりの媒質と等しくなり、波形の傾きが 0 となる。

- ・重ね合わせの原理

2つの波が、同時に媒質中の同一の点に達したときの変位は、それぞれの波が単独に存在したときの変位の代数和（符号を考慮して加えたもの）に等しい。これを**重ね合わせの原理**という。これは、多くの波動現象でも成り立つ普遍性の高い原理である。3つ以上の波についても同様である。複数の波を重ね合わせたものを**合成波**という。

2つの波の変位が $y_1(x, t)$ および $y_2(x, t)$ で表されるとき、合成波の変位は、 $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ で与えられる。

- ・波の反射

媒質の境界へ進行波（**入射波**という）が進んで行くと、境界から逆向きに進む進行波（**反射波**という）が生じる。その結果、媒質には入射波と反射波の合成波が生じる。

- ・固定端反射

弦の固定端では、媒質は変位できないので、入射波と反射波の合成波の変位は 0 となる。これが常に（時間が経過して入射波が移動しても）成り立つためには、反射波は、入射波の変位の符号と進む向きを逆にしたものであることが必要になる。

- ・自由端反射

自由端では、入射波と反射波の合成波の波形の傾きが 0 とならなければならないので、反射波の傾きは、入射波のものと大きさは同じで符号が逆になる。自由端を通り過ぎた入

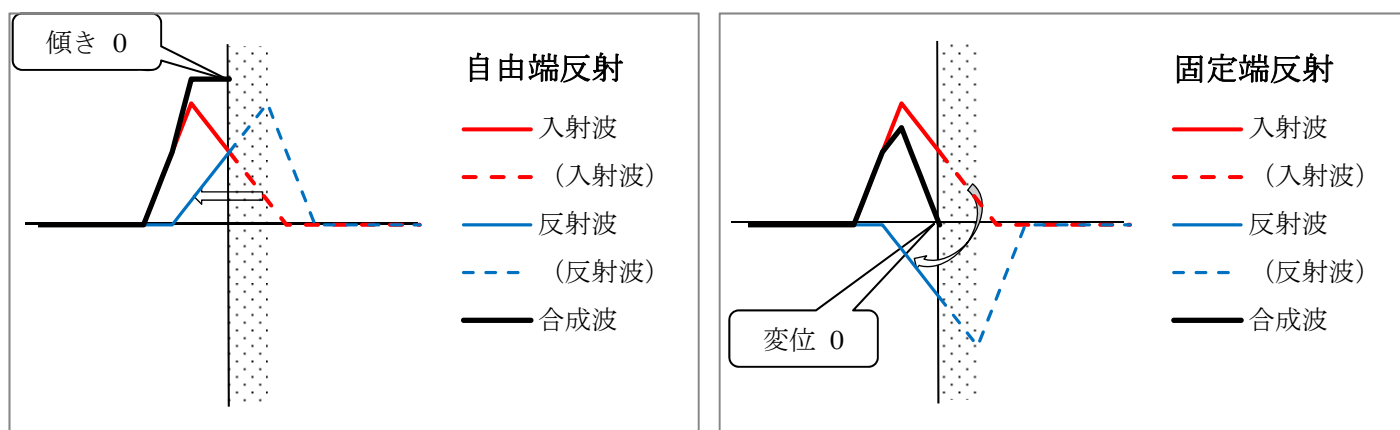


図 3 自由端反射と固定端反射

射波を、自由端を鏡として折り返したものを反射波とすると、波の進む向きが逆になり、自由端の位置における反射波の接線は、入射波の接線の鏡像となり、それらの傾きは逆符号で大きさが等しくなる。これにより、入射波と反射波の合成波の波形の傾きが 0 となり、自由端での条件が満たされる。

・定在波（定常波）

弦の境界（固定端または自由端）に振幅 a 、波長 λ 、速さ v の正弦波が入射すると、同じ振幅、波長、速さで逆向きに進む正弦波が反射波として生じる。入射波と反射波の合成波は、同じ波長 λ の正弦波となるが、その波形は、同じ位置で振幅が増減するだけで入射方向にも反射方向にも進まず、**定在波（定常波）**とよばれる。

ある瞬間に、弦のある点 A で、入射波の山と反射波の谷が重なって、合成波の変位が 0 になったとする。時間が経つと、入射波と反射波は互いに逆向きに等距離進むが、点 A でのそれぞれの変位は逆符号で大きさは等しい。結果として、点 A での合成波の変位は常に 0 であり続ける。このような点は、定在波の**節**とよばれ、間隔 $\lambda/2$ で等間隔に並ぶ。固定端は変位が常に 0 であり、節となる。

また、ある瞬間に、弦のある点 B で、入射波の山と反射波の山が重なって、合成波の変位が $2a$ になったとする。時間が経つと、入射波と反射波は互いに逆向きに等距離進むが、点 B でのそれぞれの変位は常に等しく、点 B での合成波の変位は $2a$ と $-2a$ の間を振動数 $f = 1/T$ で単振動する。このような点は、最も大きく振動する点であり、定在波の**腹**とよばれ、間隔 $\lambda/2$ で等間隔に並ぶ。自由端は波形の傾きが常に 0 であり、腹となる。

一つの節から距離 d の点の媒質は、振幅 $2a |\sin 2\pi d/\lambda|$ 、振動数 $f = 1/T$ で単振動する。となり合う節と腹の間隔は、 $\lambda/4$ である。

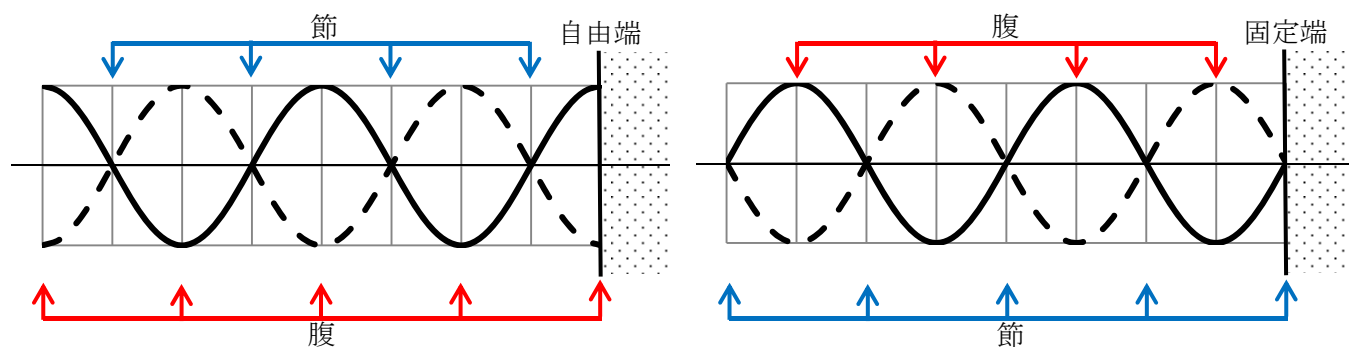


図 4 自由端反射と固定端反射による定在波

・有限な弦の固有振動

弦に張力を与える必要があるため、通常、弦の両端は固定端となる。両端が固定された長さ l の弦に正弦波が速さ v で伝わる時に生じる定在波（定常波）を考える。固定端は節となること、節は一定の間隔 $\lambda/2$ で並んでいることから、 n を正の整数として、 $l = n(\lambda/2)$ すなわち $\lambda = 2l/n$ の関係が成り立つ。整数 n は、弦にできる腹の個数を表す。このとき、弦の各部分は、振動数 $f = v/\lambda = nv/2l$ で単振動する（節は振動しないが、振幅 0 で単振動すると考える）。このように、物体のすべての部分が共通の振動数で単振動する状態をその物体の**固有振動**という。

物体にはその材質，形状などで定まる複数の固有振動があり，その振動数を**固有振動数**という。固有振動数を低いものから順に， $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ とするとき，最小の振動数 f_1 で振動する固有振動を**基本振動**，振動数 f_n で振動する固有振動を **n 倍振動**という。

両端が固定された長さ l の弦の固有振動の波長は $\lambda_n = 2l/n$ であり，そのときの固有振動数は $f_n = nv/2l$ となる。弦を弾いたり，叩いたりしたときに生じる振動は，これらの固有振動の重ね合わせである。弦の振動が周りの空気に伝わると，**音波**が生じる。聞こえる**音の高さ**は基本振動の振動数 f_1 で定まる。倍振動の混ざる割合の違いが**音色**の違いとなる。

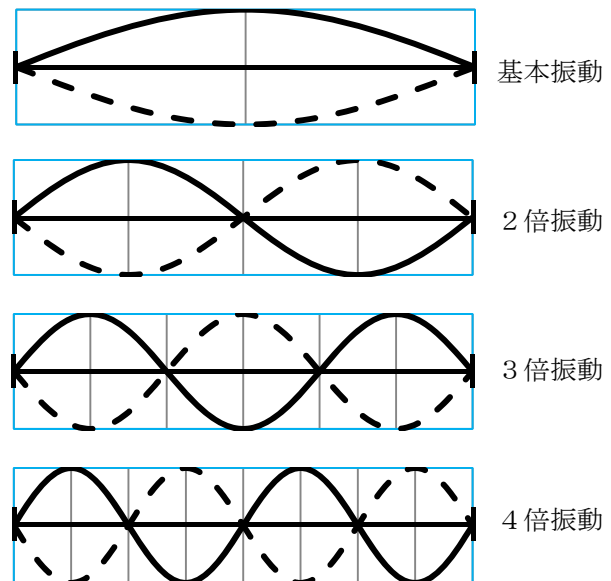


図5 弦の固有振動

●上級編

意欲と興味のある人は読んでみてください。

・半減期と（平均）寿命

物理では，一定時間ごとに一定の割合で減少する物理量がしばしば現れる。そのような物理量は，時間とともに指数関数的に減少する。代表的な例に放射能に関する量がある。

放射性同位体の原子数 N や，その放射性崩壊の頻度である放射能（放射線を出す性質である「放射能」の強さを表す物理量） A は，時間とともに減少する。元の量の半分に減少するまでの時間を**半減期** $T_{1/2}$ と言い，放射性同位体ごとに一定の値を持つ。

時刻 $t=0$ における N, A の値を N_0, A_0 と置くと，時刻 t の N, A の値は，

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T_{1/2}}, \quad A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T_{1/2}}$$

と表される。放射能 A は単位時間当たりの原子数 N の減少量であり， N に比例する。

$$A(t) = - \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = - \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = - \frac{1}{\tau} N(t)$$

比例係数 $1/\tau$ を崩壊定数といい，単位時間に崩壊する割合を表す。その逆数 τ は（平均）**寿命**とよばれ，元の量の $1/e$ に減少するまでの時間を表す。 $e = 2.71828\cdots$ は自然対数の底（ネイピア数）とよばれる定数である。寿命 τ をもちいると，時刻 t の N, A の値は，

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 \exp(-t/\tau), \quad A(t) = A_0 e^{-t/\tau} = A_0 \exp(-t/\tau)$$

と表される。 $e^x = \exp(x)$ は（ e を底とする）指数関数である。

半減期 $T_{1/2}$ と（平均）寿命 τ のあいだには次の関係が成り立つ。

$$T_{1/2} = \tau \ln 2$$

$\ln 2 = 0.693147\cdots$ は 2 の自然対数である。

・フーリエ（Fourier）級数

L を周期とする任意の（厳密には，多少の条件が付く）周期関数 $f(x) = f(x + L)$ は，次式のように表すことができる。

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right] \quad (*)$$

右辺を、関数 $f(x)$ のフーリエ級数と言う。係数 A_n, B_n を、それぞれ、関数 $f(x)$ のフーリエ余弦係数、フーリエ正弦係数といい、次式で与えられる。

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} dx \quad (n \geq 0)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} dx \quad (n > 0)$$

このことは、式(*)の両辺に $\cos \frac{2\pi nx}{L}$ あるいは $\sin \frac{2\pi nx}{L}$ を掛けて、区間 $[0, L]$ で積分することによって示すことができる。

$\cos x$ が偶関数であり、 $\sin x$ が奇関数であることから、周期関数 $f(x) = f(x + L)$ が、偶関数 $f(-x) = f(x)$ であれば、 $B_n = 0$ ($n > 0$) が成り立ち、奇関数 $f(-x) = -f(x)$ であれば、 $A_n = 0$ ($n \geq 0$) が成り立つ。