

理論試験に関する一般的注意事項

試験前

1. 理論試験の所要時間は5時間で、1問10点の問題を3問解答する。
2. 学生コードが机の上にあるものと一致していることを確認せよ。ID/タグを机の右上に置くこと。
3. 机の上に以下のものがあることを確認せよ：
 - (i) 問題用紙と解答用紙が入った封筒
 - (ii) ラベルの貼られた封筒
 - (iii) 筆記具／関連文房具（電卓は各自持参のこと）不足がある場合は手を挙げて知らせること。
4. 試験開始前に封を開けてはならない。

試験中

1. 解答を書くときは、必ず専用の解答用紙を使用すること。解答は解答用紙の指定された枠内にのみ書くこと。枠が印刷された解答用紙が足りない場合は、手を挙げて試験監督に申し出ること。追加で要求した解答用紙には、学生コードと解答する問題番号を明記すること。
2. **白紙の計算用紙も配布されるが、これらに書かれた内容は採点されない。**
3. 解答はできるだけ簡潔にすること：可能な限り、方程式、論理演算子、スケッチを使って自分の考えを説明せよ。長い文章の使用は避けよ。
4. 数字を記述する際には、適切な有効数字を使用すること。
5. 許可なくブースを離れることは許されない。手助けが必要な場合（電卓の故障、トイレ、解答用紙の不足など）は、手を挙げて試験監督に注意を促すこと。

試験終了時

1. 試験が終了したら、直ちに筆記を中止せよ。
2. 白紙の答案用紙も含め、すべての答案用紙を封筒に入れ、封をすること。各自責任を持って、すべての解答用紙が封筒の中に入っていることを確認し、試験監督に提出せよ。
3. 問題用紙と計算用紙は別の封筒に入れること。試験会場から用紙を持ち出すことは許されない。
4. 封筒が回収されるまで、自分の席で静かに待機せよ。すべての封筒を回収後、ガイドが試験会場からの退場を案内する。

解答を書く際には、必ず専用の解答用紙を使用すること。解答は解答用紙の指定された枠内にのみ書くこと。枠が印刷された解答用紙が足りない場合は、手を挙げて試験監督に申し出ること。追加で要求された解答用紙には、学生コードと解答する問題番号**を明記すること。**

白紙の計算用紙も配布されるが、これらに書かれた内容は採点されない。

物理定数

重力加速度	$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$
ボルツマン定数	$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
現在の太陽の質量	$M_S = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$
現在の太陽の半径	$R_S = 7.00 \times 10^8 \text{ m}$
銀河の平均質量	$M_{\text{galaxy}} = 1.5 \times 10^{12} M_S$
電子の電荷の大きさ	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
電子の質量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
陽子の質量	$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
中性子の質量	$m_n = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
真空の透磁率	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}$
真空の誘電率	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
真空の固有インピーダンス	$Z_0 = 120\pi \Omega$
プランク定数	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$
真空中の光速	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$
ステファン・ボルツマン定数	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
万有引力定数	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

噴水の幾何学

はじめに

噴水は、その機能を利用する目的で、あるいは美術的造形物として、農園、緑地公園、都市部などさまざまな場所に設置されている。図1の断面図に示すように、地面から高さ h にある半径 r の半球状の噴水を考える。半球の半径 r は水が及ぶ地面の範囲 R に比べて小さく、点源として扱える。しかし、半球面の角 θ には単位面積当たり $\rho(\theta)$ 個の穴がある。水は同じ初速度 v_0 で全方向に射出される。

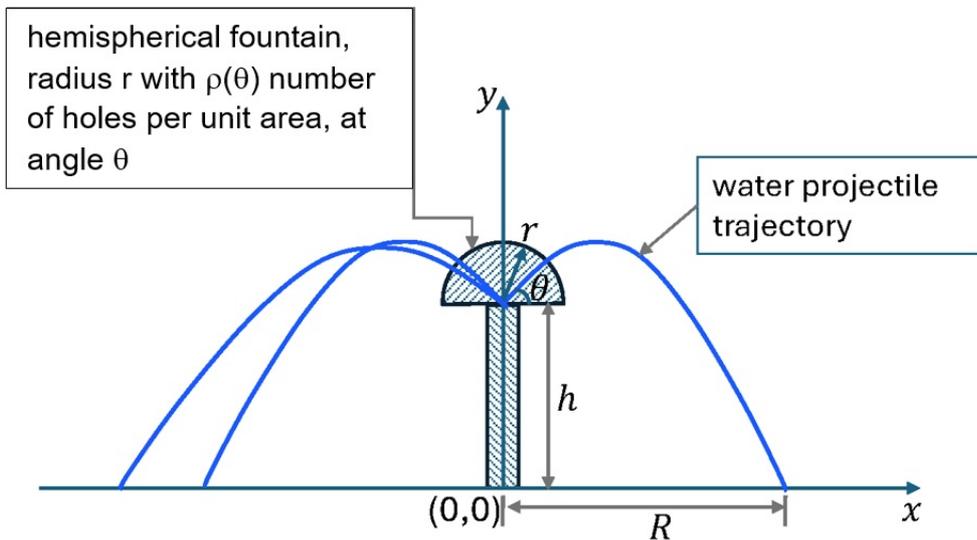


図1: 半球形噴水の断面の概念図。

パートA：穴が半球表面に一様に分布する場合（6.0ポイント）

まず、半球表面の穴の分布は一様 ($\rho(\theta)$ は一定) とする。

A.1 角度 θ 、速度 v_0 で発射された水の微小体積要素の時刻 t における位置、 $x(t)$ 、 $y(t)$ を求めよ（粒子の流れとして扱うことができる）。 **0.5pt**

A.2 水の軌跡を $y = y(x, \theta)$ の形に表せ。ただし、サイン、コサイン、タンジェントのような三角関数の1種類だけを用いよ。また、 $\theta > 0$ に注意せよ。 **1.0pt**

A.3 包絡線はすべての発射角の軌跡を囲む(面積)最小の曲線である(包絡線の外には水は到達しない)。水の軌跡の包絡線の方程式を導き、 $y=y(x)$ の形に表せ。また、水の軌跡と包絡線をスケッチせよ。 **3.0pt**

A.4 水が到達する範囲(水平距離) R を角 θ の関数 $R = R(\theta)$ として求めよ。 **1.0pt**

A.5 A.4で得られた R において $h \rightarrow 0$ とすると、 $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$ となることを示せ **0.5pt**

パートB：半球表面の穴の分布が均一でない場合（4.0ポイント）

ここでは、半球面の穴の面密度(単位面積当たりの穴の数)は均一でなく、角 θ に依存して、 $\rho = \rho(\theta)$ で与えられる場合を考える。

B.1 パートAのA.4の結果を用いて、水が地面に当たる、半径 R 、幅 dR の円環(リング)状の微小領域の面積 dA_W を、 R 、 R' 、 $d\theta$ で表せ。ここで $R' = dR/d\theta$ である。 **1.0pt**

B.2 地面に一様に噴霧するためには $\rho(\theta)$ はどのようなものである必要があるかを、 R とその導関数 $R'(\theta)$ で表せ。 [$R'(\theta) > 0$ である θ の範囲のみ考えよ。] **1.0pt**

B.3 $h = 0$ として、 $\theta < 45^\circ$ の場合に一様な噴霧となる $\rho(\theta)$ を具体的に求めよ。 **2.0pt**

スネルの法則

はじめに

図1に示すように、誘電体界面に光が入射すると、光の入射角と誘電体媒質の屈折率に応じて、反射と屈折を行う。光の屈折はスネルの法則によって支配されている。

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 \quad (1)$$

ここで、 n_1 と n_2 は境界の下部と上部の屈折率、 ϕ_1 と ϕ_2 は光線が境界の法線となす角度である。

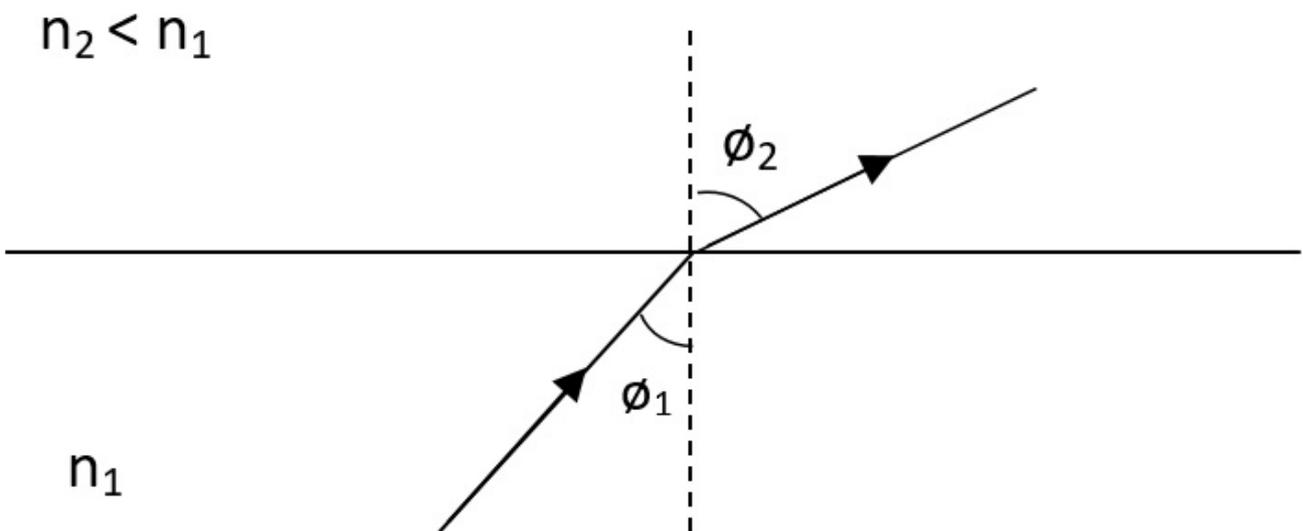


図1：屈折率 n_1 の誘電体媒質から屈折率 n_2 の第二の誘電体媒質への光の屈折。

パートA：半球を通る光の伝搬（1.5ポイント）

図2は、屈折率 n_x を持つ空気中の半球体の半径に沿って、 a と b の異なる色を持つ2本の光線が入射した後、底面でそれぞれ θ_a と θ_b の角度で屈折する様子を示している。

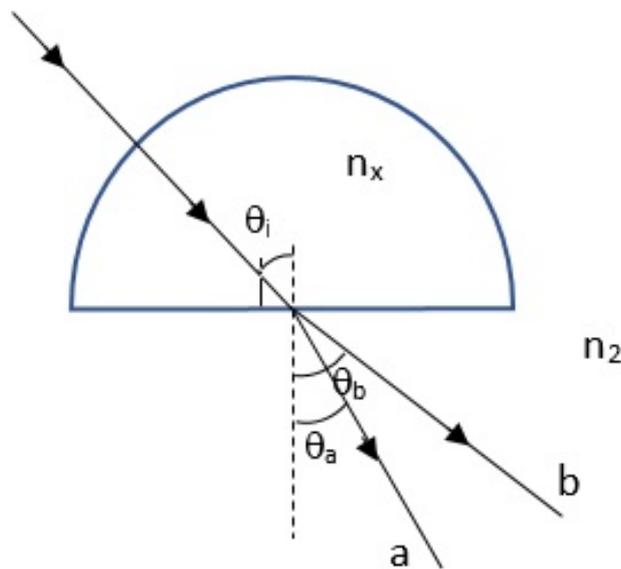


図2: 半球内を伝播する光。

A.1 光線 a b のどちらの光線が半球内を速く伝播するか？その理由を述べよ。 **0.5pt**

A.2 入射角 θ_i を 45° まで徐々に大きくすると、光線 b は半球の底を出なくなる。 θ_i をさらに 50° まで大きくすると光線 a に同じことが起きる。半球内における光線 a と光線 b の屈折率の差はいくらか？ **1.0pt**

パートB：円柱ロッドを通る光の伝搬（3.5ポイント）

ある円柱状のロッドの屈折率は $n_1 = 1.50$ である。このロッドを空気中に置き、下の図3に示すように、一端を屈折率 $n_3 = 1.40$ のポリマーでコーティングする。ポリマーからロッドへの光の入射角 θ を変化させると、光が全反射してポリマーに戻る場合がある。

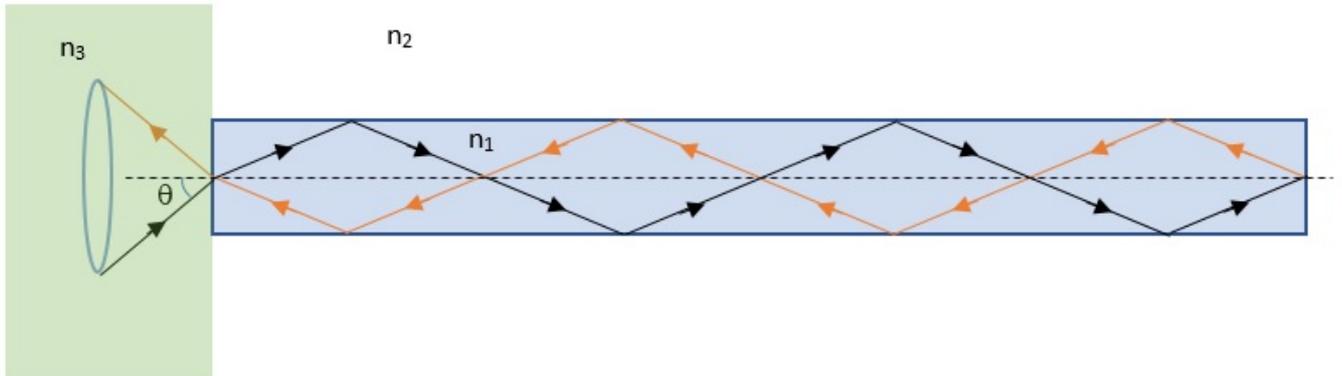


図3： $n_2 < n_3 < n_1$ の屈折率 n_3 のポリマーで一端がコーティングされた円柱状のロッド。

B.1 この全反射の条件が起こるための入射角 θ の範囲を決定せよ。 **2.0pt**

B.2 B.1の条件はどのように変化するか、

(i) ロッドのもう一方の開放端が屈折率1.60の油の厚い層で覆われている場合。 **0.6pt**

(ii) 屈折率1.33の水中に置いた場合。 **0.9pt**

パートC：光ファイバーを通る光の伝搬（5.0ポイント）

光ファイバーは、下の図4に示すように、屈折率 n_1 の媒質をより屈折率の低い媒質 n_2 で囲むことによって形成される。屈折率 n_1 の媒質はファイバーコアと呼ばれ、屈折率 n_2 の媒質はファイバークラッド（覆いもの）と呼ばれる。屈折率 n_3 は通常、空気の屈折率（ $n_3=1$ ）である。

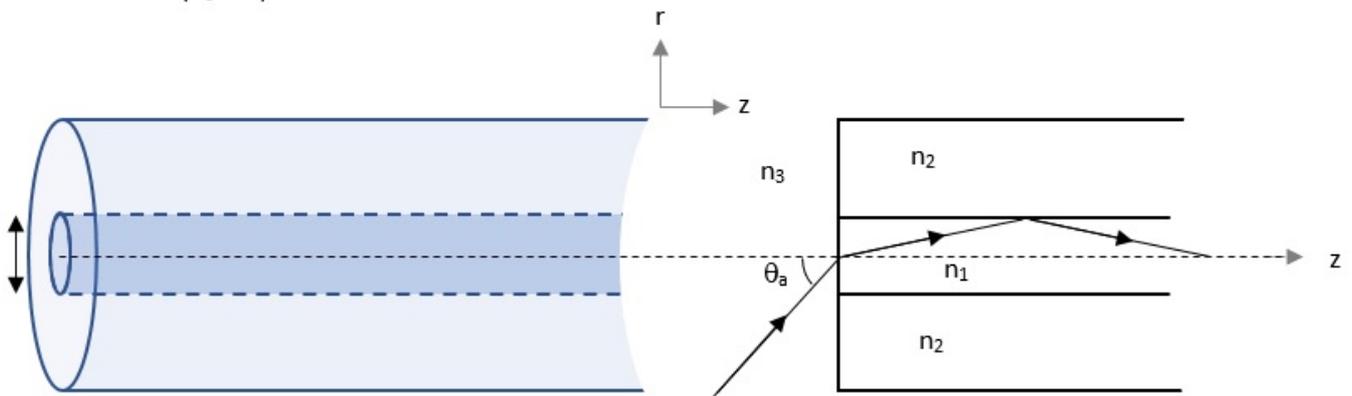


図4：光ファイバーとその断面の模式図。

C.1 光が光ファイバー内部を伝播するためには、まず光が光ファイバーに結合される必要がある。ファイバーの端に入射する光の最大角度 θ_a は、ファイバーのコアとクラッドの屈折率に関する。子午線面（ファイバーの軸を横切る面）に沿って伝搬する光線を考え、角度 θ_a と屈折率の関係を定式化せよ。 **2.0pt**

C.2 光ファイバーは常に直線に整列しているわけではなく、異なる空間を通るために曲げる必要がある。ファイバーコアの直径が $50\mu\text{m}$ だとすると、ファイバーコアの中心から測定した光ファイバーの最小曲げ半径が 1.0cm 場合、 θ_a はどのくらい変化するか？ **2.6pt**

- C.3** ファイバのコアとクラッドの屈折率がそれぞれ1.45と1.44であるとき、上記C.1とC.2のケースで、ファイバを空気中に置いたときの光の入射角の最大値は？ **0.4pt**

初めて発見されたクエーサー：天体3C 273の謎を解き明かす

パートA：背景の星に対する月の見かけの動き（1.8ポイント）

月は恒星に対して27.3日で地球のまわりを1回公転する。恒星月と呼ばれる周期である。望遠鏡を通して見れば月の動きは直ぐにわかるが、肉眼で見て月の位置の変化に気づくには、数時間かけて注意深く観察する必要がある。3600秒角=60分角=1度角とすると、月は、以下の時間内に、何度角、何分角、何秒角、恒星を背景に動いているか。

A.1 1時間では？1分間では？1秒間では？

1.3pt

A.2 月が天球上での見かけの直径と同じ角距離を移動するのにかかる時間はどれだけか。（注：地球から見た月の視直径は30分角である。）

0.5pt

パートB：電波源の位置を正確に決定するための月による掩蔽の利用：3C 273の場合（1.8ポイント）

1950年代後半から1960年代前半にかけてまでは、電波源の位置をこのような高い精度で測定することはできなかった。月による掩蔽は以前から使われていたのだが、ハザードはこれが電波源の位置と構造をも秒角の精度で決定できる可能性に特に興味を持っていた。このような観測は光学基準座標系での測定であるため、それによって信頼できる光学的同定を可能にした。ハザードは、1962年と1963年の間に、強力なクラスIIの電波源3C 273が何度か月に隠される（掩蔽される）ことに注目していた。

1962年8月5日の掩蔽は、410MHzと136MHzの電波で観測された。月の背後に入る潜入と月の背後から再び現れる出現の両方が観測され、潜入の記録からは、電波源にはAとBの2つの成分があることを明らかになった。410MHzでの潜入の記録を図1の右図として、出現の記録を図1の左図として示す。

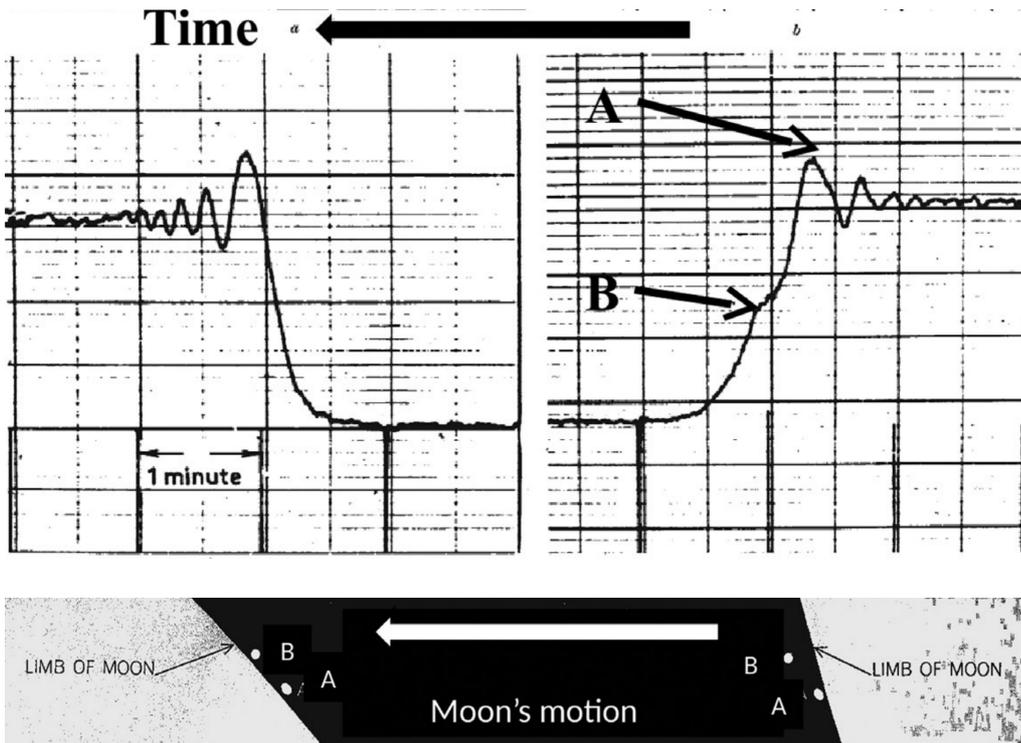


図1:1962年8月5日の410MHzにおける潜入と出現の記録。右から左へと時間が進行し、月も右から左へと移動していることに注意せよ。下図は、成分AとBの潜入時と出現時の月の縁に対する位置を示している。

B.1

0.6pt

観測された強度の振動の原因は何か？

- A.望遠鏡の回折パターン
- B.望遠鏡の架台の不安定性
- C.月の表面の特徴
- D.地球の大気の状態

B.2

0.6pt

出現を記録した図1の左図で、B成分に余分なバンプがないのはなぜか。そのことは、電波源の構造を理解する上でどのように役立つか。

- A.二つの成分が月の周りを回っている。
- B.二つの成分に対して視線が変化している。
- C.両成分が再び現れたとき、月の縁と一直線上にある。
- D.二つの成分の光度の背後にある物理の時間スケールが、いずれかの成分が弱まるのに十分なほど長かった。

B.3

0.6pt

A.1～A.4、および図1のデータに基づき、3C 273の二つの成分間の見かけの（投影された）およその角距離を見積もれ。

パート C: 3C 273 の真の性質に関する画期的な発見 (1.8 ポイント)

これらの観測が行われた 1962 年、マーテン・シュミットは、電波源と同定された光学天体の光学的同定と分光のプログラムに取り組んでいた。後から思い出してみると、ホワイトオークが、「現在の Caltech の考え」は 3C 273 が恒星と奇妙なジェットである可能性があるとして述べている。電波源の対応天体としては恒星は考えられていないことに鑑み、彼は、明るい 13 等級の「恒星」(等級は恒星の明るさを表す方法の 1 つで、恒星が明るいほど数値が小さくなる) は、単に前景の非常に明るい紛らわしい恒星にすぎないと考えた。彼が電波源対応天体として最も可能性が高いと考えたかすかなジェットのスペクトルを取得するには、数秒角しか離れていないこの恒星のスペクトルが、目的とするジェットのスペクトルに入り込んでしまうことは避けられそうになかった。このことを補うために、マーテン・シュミットは、まずこの明るい恒星のスペクトルを取得することにした。12 月 29 日の夜、彼は明るい「星」のスペクトルを取得することに成功した。そこにはかすかな輝線がいくつか見られたのだが (図 2)、それは恒星の輝線としては説明に窮するものであった。シュミットが奇妙なスペクトルを水素のバルマー輝線と比較しようとしたとき、初めて事態は明らかになった。

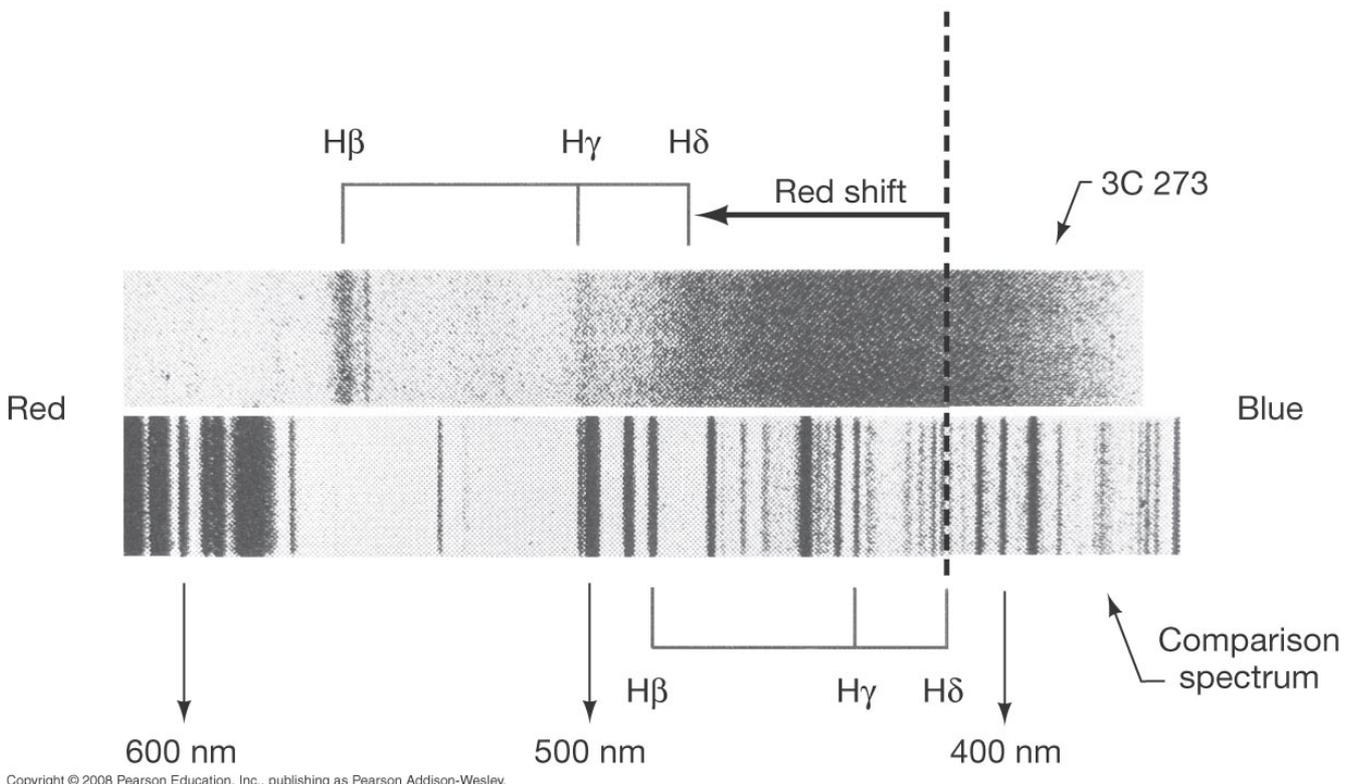


図2 : 3C 273の光学スペクトル (上) と比較のための実験室スペクトル (下) 。

C.1 図2に示した線の波長比を比較せよ。これらの比に基づくと、この天体の赤方偏移 $z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$ はいくらか。 **0.6pt**

C.2 この赤方偏移が、天体の質量による相対論的重力効果によって生じていると考えよう。この場合、重力による赤方偏移は $z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} - 1$ と推定できる。3C 273をどのような距離（例えば天の川の端、 $r \sim 100 \text{ kpc} \sim 3 \times 10^{21} \text{ m}$ 、太陽系の端、 $r \sim 100 \text{ AU} \sim 1.5 \times 10^{13} \text{ m}$ ）に置いたとしても、3C 273の質量は銀河系／太陽系全体を崩壊させるほど大きいことを示せ。 **0.6pt**

C.3 ハッブルの法則によれば、遠方銀河が遠くなるほど、地球から遠ざかる速度も速くなる。ハッブル定数は、遠方銀河の速度と距離の比率で、 $H = 75 \text{ km/s/Mpc}$ に等しい。この考え方を念頭に置くと、計算された赤方偏移は宇宙の膨張によるものであると考えることができ、 $z \sim v/c$ と近似することができる。その場合、この天体までの距離はどのくらいか。これを天の川銀河の大きさと比較せよ。 **0.6pt**

パート D: 電波源の本来の光度 3C 273 (1.8 ポイント)

3C 273源のフラックスは電波スペクトル全体で測定されており、次の式に従うことがわかった: $F_\nu \sim 25000\nu^{(-0.3)}$ Jy。ここで、 ν はヘルツで表した観測周波数であり、ジャンスキーは次のように定義される: $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ 。もちろん、光源は我々からの距離を半径とするの球面上に放射しているので、本来の光度は次のように表される:

$L_\nu = 4\pi d^2 F_\nu$ 。これにより、

D.1 単位周波数あたりの電波源の光度はどれくらいか? **0.6pt**
(ヘルプ: $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m}$)

D.2 電波帯域 (10^7 Hz から 10^{11} Hz) の全光度はどれくらいか。 **0.6pt**

D.3 3C 273の光度は同じ周波数範囲の太陽の光度 ($L_{sun} = 3.82 \times 10^{26} \text{ W}$ **0.6pt**) および天の川銀河 ($L_{MW} = 1.5 \times 10^{10} L_{sun}$) の光度に比べるとどうか。

パートE：3C 273のエネルギー源（1.4ポイント）

3C 273の光度は、単一の恒星としてはあまりにも大き過ぎるのみならず、銀河系全体の光度をも凌駕することがわかった。したがって、星以外の別のメカニズムが、このパワーを生み出しているはずである。

E.1 物質と反物質の消滅（例えば、 $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ ）は、光や電波の放射ではなく、非常に高エネルギーのX線を発生させるので、3C 273のエネルギー源の説明にはならないことを確認せよ。 **0.7pt**

E.2 すぐに提案されたのは、超大質量ブラックホールへの物質の降着であった。ポテンシャル・エネルギーが必要となるエネルギーを与えることができることを確認しよう：ブラックホールのシュヴァルツシルト半径($R_s = \frac{2GM}{c^2}$)に向かって、1年当たり1太陽質量 (2×10^{30} kg) の物質が降着すると考えよう。この降着で得られるパワーはどれくらいか。これは D1 から D3 で議論した観測を説明するのに十分か。 **0.7pt**

パートF：現代の観測と3C 273の成分の性質（1.4ポイント）

様々な望遠鏡による現代の画像（例えば図3参照）により、月による掩蔽で測定された2つの成分AとBは、実際にはブラックホールを宿すコンパクトなコアと、前の問で計算した距離に広がるジェットであることが判明した。このジェットは、太陽風の粒子が地球の磁場にぶつかって極付近でオーロラを発生させるのと同じように、ブラックホールの強力な磁場を介して、降着した粒子が加速されることで発生すると考えられているが、その規模ははるかに大きい。

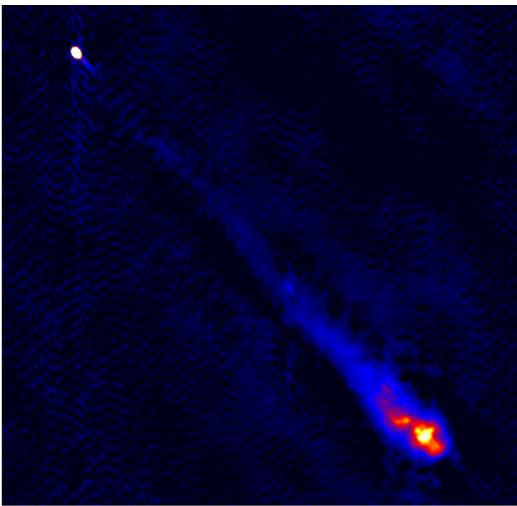


図3：MERLIN望遠鏡で撮影された3C 273の電波画像。

このようなジェットの生成に必要なエネルギー密度は、磁場の観点から、粒子エネルギー密度 $U_e \sim B^{(-3/2)}$ と磁気エネルギー密度 $U_B \sim B^2$ の和として書くことができる。

E.1 最小エネルギー密度は $\frac{U_e}{U_B} = \frac{4}{3}$ で与えられることを示せ。 **0.7pt**

E.2 3C 273ジェットの総パワーが、D.1及びD.2で計算した、3C 273が1秒間に放出するエネルギーの半分で与えられ、ジェットの体積が 10^{45} m^3 であると仮定して、ジェットの磁場を見積もれ。（ヒント：透磁率が $4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$ ）であることを利用せよ。） **0.7pt**