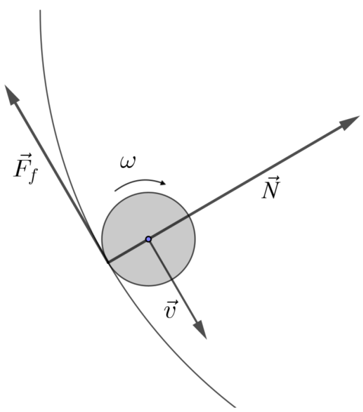
EuPhO 2024 (Georgia) 理論問題 解答例

T1: 滑るパック

パックが壁に沿って動くとき、互いに打ち消す重力と垂直抗力以外に、2 つの力が働く: 壁に対して垂直の力と、パックと壁の間の摩擦力で、前者はパックの運動方向を変え、後者はパックの速さを変えるとともにパックに回転を引き起こす。

そのため、パックが円形の壁に沿って動くにつれて、パックの速さが減少し、パックの鉛直軸のまわりの回転の角速度は増加する。パックは壁に沿って滑るとともに転がる。ある時刻 t_1 でパックの壁との接点は速度ゼロとなり、動摩擦が静止摩擦となる**かもしれない**。この時点以降、パックは壁に沿って滑ることなく転がる。

接点の速度ゼロということから、関係式 $\omega = v/r$ が成り立つ。



まずはじめは、滑りながら転がる運動を考えよう。壁からパックに働く垂直力 $\vec{N}$ はいつもパックの速度に対して垂直である。力 $\vec{N}$ は速度 $\vec{v}$ の方向を変える。垂直方向に対するニュートンの法則より、$N = mv^2/R$ であることが分かる。ここで、m はパックの質量である。これから、摩擦力の大きさは $F_f = \mu N = \mu m v^2/R$ である。

解法１： パックの並進運動の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu m \frac{v^2}{R}$$

で、初期条件を考慮して積分で表すと

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R}\int_0^t dt$$

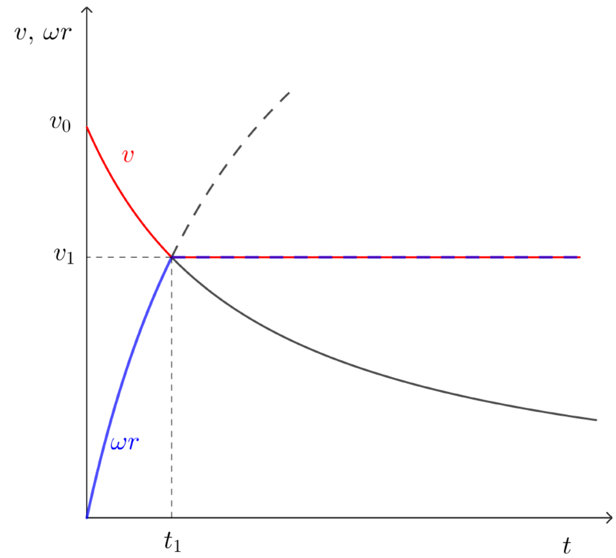
となる。ここで、時刻 $t=0$ はパックが半円の壁に到達した時刻で、そのときの速度が v_0 である。この積分を実行すると、

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{\mu}{R}t \tag{1}$$

となり、これから

$$v(t) = \frac{v_0}{1+t/\tau} \tag{2}$$

を得る。ここで、$\tau = R/v_0\mu$ である。グラフの赤い実線で v の時間依存性を示す。



対称軸のまわりのパックの回転は、パックの壁との接点に働く摩擦力のトルク、$M_f = rF_f = r\mu m v^2/R$、によって引き起こされる。ここで、パックの半径 r は腕の長さになる。ニュートンの第二法則 $Id\omega/dt = M_f$ から、パックの回転運動の方程式は

$$r\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu m r^2}{RI}v^2 = \frac{2\mu}{R}\,\frac{v_0^2}{(1+t/\tau)^2}$$

と書ける。ここで、$I = mr^2/2$ は対称軸まわりの回転に対するパックの慣性モーメントで、ω はその回転の角速度である。積 $r\omega$ は、重心に対するパックの壁との接点の相対速度を与える。この方程式を、初期条件を考慮した積分形で表すと

$$r\int_0^{\omega} d\omega = \frac{2v_0}{\tau}\int_0^t \frac{dt}{(1+t/\tau)^2}$$

となり、解は

$$r\omega = v_0\frac{2t/\tau}{1+t/\tau} \tag{3}$$

である。$r\omega(t)$ のグラフを青線で示す。

２つの解 (2) と (3) は、関数 $v(t)$ と $r\omega(t)$ が交わる時刻 t_1 までしか有効でない。この瞬間、パックの壁との接触点は壁と相対的に動いておらず、パックは壁に対して滑っていない。つまり、摩擦は無い。この瞬間以降、パックは、$v = v(t_1)$ および $\omega = v_1/r$ で、摩擦のない並進と回転運動をする。t_1 として、$t_1 = \tau/2$ を得て、その時の並進のスピードは $v_1 = 2v_0/3$ である。

ここで、半円形の壁に沿ったパックの運動に対して２つのシナリオが存在する。１つは半円形の壁に沿って最後まで滑りながら回転するシナリオで、もう一つは途中のどこかで滑りなしに転がり始めるシナリオである。どちらになるかを見定めてパックの脱出速度 v_e を求めるためには、式 (2) で与えられるパックの移動距離がどう延びてゆくか、$d\ell/dt = v(t)$、を計算する必要がある。時間で $t=0$ から t、距離で 0 から ℓ まで積分して、

$$t = \tau\left(\exp\left(\frac{\ell}{v_0\tau}\right) - 1\right) \tag{4}$$

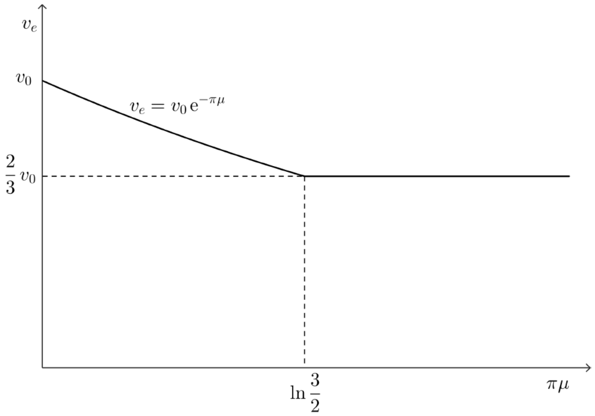
を得る。$\ell_e = \pi R$ とすると、式 (4) は $t_e = t(\ell_e) = \tau\big(\exp(\pi\mu) - 1\big)$ を与える。

もし $t_e > t_1 = \tau/2$、すなわち $\pi\mu > \ln\frac{3}{2}$ なら、パックは壁に沿った半円のどこかで滑りなしで転がり始め、壁を脱出するときの速度は $v_e = v_1 = 2v_0/3$ である。

もし $t_e \le t_1 = \tau/2$、すなわち $\pi\mu \le \ln\frac{3}{2}$ なら、壁から脱出する時もまだ滑りながら転がっており、並進速度 v_e は $2v_0/3$ より大きい。脱出速度は式 (2) に $t = t_e$ を代入することによって得られ、

$$v_e = v(t = t_e) = v_0 \exp\big(-\pi\mu\big) \tag{5}$$

である。$v_e(\mu)$ のグラフを図に示す。



解法２：　パックの並進運動の方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu m\frac{v^2}{R}$$

で、これは $d\ell = vdt = Rd\phi$ を用いて

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{R}d\ell = -\mu d\phi$$

と書ける。これより v の ϕ 依存性

$$v = v_0 \exp\big(-\mu\phi\big) \tag{6}$$

をえる。ここで、$\phi = 0$ は半円形の壁の入り口で、$\phi = \pi$ は出口である。この表式は、パックが滑りながら回転しているという条件の下での、v の ϕ 依存性を与える。

摩擦力のトルクによって、パックは壁に沿って転がり始め、その角速度を ω とする。速度 $v' = r\omega$ を導入しよう。速度 v' が v に到達した時、それはそれ以上変化しない（解法１参照）。パックの回転運動の方程式は

$$r\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv'}{dt} = \frac{\mu m r^2}{RI}v^2$$

で与えられる（解法１参照）。

関数 $v(\phi)$ は式 (6) に求めたので、v' も ϕ の関数として求めよう。まず、関係式

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}$$

および、$d\phi/dt = v/R$ より、上の回転運動の方程式は

$$dv' = 2\mu v_0 \exp\big(-\mu\phi\big)d\phi$$

となる。単純に両辺の積分

$$\int_0^{v'} dv' = 2\mu v_0 \int_0^{\phi} \exp\big(-\mu\phi\big)d\phi$$

を実行して、

$$v'(\phi) = r\omega(\phi) = 2v_0\Big(1 - \exp\big(-\mu\phi\big)\Big) \tag{7}$$

をえる。v と v' が等しくなる臨界角 ϕ_c

$$\mu\phi_c = \ln\frac{3}{2}$$

で、回転運動がスリップありからスリップ無しへ転移する。この臨界角における速度が終速度 $v_f = v_0\exp\big(-\mu\phi_c\big) = 2v_0/3$ となる。

$\phi_c > \pi$、すなわち、$\mu\pi < \ln\frac{3}{2}$ の場合、出口でパックはまだスリップしており、脱出速度は $v_e = v_0\exp(-\mu\pi)$ となる。一方 $\phi_c \le \pi$、すなわち、$\mu\pi \ge \ln\frac{3}{2}$ の場合、出口でパックは終速度でスリップせずに回転しており、$v_e = v_f = v(\phi_c) = 2v_0/3$ となる。

解法２の解き方から、パックの脱出速度は壁の形には依存しないことがわかる。並進速度と角速度は ϕ（および摩擦係数 μ）のみに依存する。壁の形は半円ではなく、例えば、楕円（あるいはもっと他の形）でも構わない。

suggestions for marking scheme

Part T1.a): Scores	**Pts.**
realizing that puck is sliding initially	0.3
realizing that puck may roll without sliding	0.3
stating that sliding ends when roll condition $v = r\omega$ is met	0.3
equating the normal force with mv^2/R	0.3
using $F_f = \mu N$ for the friction force	0.3
equation of motion (eom) for translation (-0.2 for wrong sign)	0.4
giving integral expression for translational eom with correct initial conditions	0.5
giving expression for v as function of time or angle as in eq. (2) or (6)	1.0
equation of motion (eom) for rotation	0.4
using $I = mr^2/2$ as moment of inertia	0.3
giving integral expression for rotational eom with correct initial conditions	0.5
giving expression for $r\omega$ as function of time or angle as in eq. (3) or (7)	1.0
getting time $\frac{R}{2v_0\mu}$ or angle $\ln(\frac{3}{2})/\mu$ for transition to rolling without sliding	0.5
obtaining critical coefficient of friction $\mu_c = \ln(3/2)/\pi$	0.5
finding final velocity $\frac{2}{3}v_0$ for rolling without sliding	0.4
finding velocity v_e if puck slides the whole time	1.0
Total on T1.a)	**8.0**

Part T1.b): Scores	Pts.
graph has suitably labelled axis	0.2
initial speed v_0 indicated in graph	0.2
graph shows v_e decreasing with μ initially	0.3
initial exponential decrease of v_e with μ indicated in graph	0.3
critical point exists and is indicated in graph	0.4
constant speed after the critical point	0.4
obviously not smooth function at critical point	0.2
Total on T1.b)	**2.0**

General rules for marking in T1:

- The grain size for marking is 0.1 Pts.
- Partial marks can be awarded for most aspects.
- For each mistake in calculation (algebraic or numeric) 0.2 Pts. are deducted.
- If a mistake leads to a dimensionally incorrect expression no marks are given for the result.
- Propagating errors are not punished again unless they are dimensionally wrong or entail oversimplified/ wrong physics (e.g. neglecting friction effects

T2: 宇宙船

解析的解法：アリス、ボブ、ギフトとともに運動する座標系を、それぞれ A, B, G とする。また、

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

などと記す。

a) (i)

解法１： x 座標系における２つのギフトの距離を l_x とする。G はギフトの静止座標系なので、

$$l_A = l_G/\gamma_v, \quad l_B = l_G/\gamma_{v_B}$$

である。ここで、v_B は座標系 B と G の相対速度で、相対論的速度の合成則より、

$$v_B = \frac{u+v}{1+uv/c^2} = \frac{35}{37}c \tag{8}$$

である。最後の表式で、$u = \frac{3}{5}c$, $v = \frac{4}{5}c$ を用いた。$l_A = v\Delta t_0$ なので、これらより、

$$l_B = v\Delta t_0 \frac{\gamma_v}{\gamma_{v_B}} = \frac{16}{37}\Delta t_0 c$$

をえる。

解法２： ギフト１の発送と、次のギフト２の発送という２つのイベントを考えよう。ローレンツ変換によると、ある座標系においてあるイベントの座標が t, x であったとすると、相対速度 u で動く別の座標系におけるそのイベントの座標は、

$$t' = \left(t - \frac{ux}{c^2}\right)\gamma_u, \quad x' = (x - ut)\gamma_u$$

で与えられる。座標系 A において、これらのイベントの座標は $(t_{1,A}, x_{1,A}) = (0,0)$ および $(t_{2,A}, x_{2,A}) = (\Delta t_0, 0)$ である。B の A に対する相対速度は $-u$ なので、B においてはこれらの座標は、

$$(t_{1,B}, x_{1,B}) = (0,0), \quad (t_{2,B}, x_{2,B}) = (\Delta t_0\gamma_u, u\Delta t_0\gamma_u)$$

である。

座標系 B において時刻 $t_{2,B}$ でのギフト１の位置を求める必要がある。G の B に対する相対速度 v_B は式 (8) で与えられるので、時刻 $t_{2,B}$ でのギフト１の位置は $x_{1,B}(t_{2,B}) = v_B t_{2,B}$ である。というわけで、座標系 B における２つのギフトの距離は

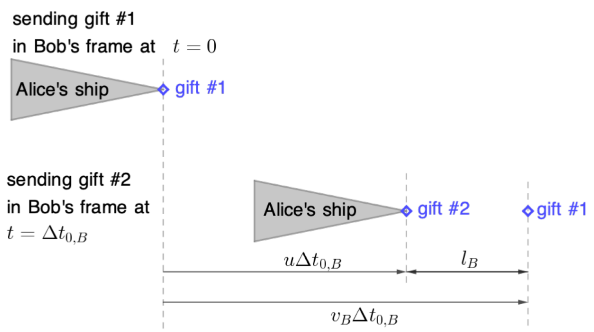
$$l_B = x_{1,B}(t_{2,B}) - x_{2,B}(t_{2,B}) = (v_B - u)\Delta t_0\gamma_u = \frac{16}{37}\Delta t_0 c$$

である。

解法３：　時間間隔 $\Delta t_0 = \Delta t_{0,A}$ はアリス座標系における固有時間で（アリスはアリス座標系で同じ場所からギフトを発送している)、ボブ座標系において u で動いている。ボブ座標系におけるこれらのイベントの時間間隔は $\Delta t_{0,B} = \gamma_u \Delta t_{0,A}$ である。ギフトの速度はアリス系で $v_A = v = \frac{4}{5}c$ で、ボブ系では式 (8) で与える v_B である。ボブ系では時間間隔 $\Delta t_{0,B}$ で２つのギフトは発送されている。この時間に、アリスの宇宙船は $u\Delta t_{0,B}$ だけ移動し、前に送られたギフトは $v_B \Delta t_{0,B}$ だけ移動するので、２つのギフトの距離はボブ系で

$$l_B = \left(v_B - u\right)\Delta t_{0,B} = \frac{16}{37}\,c\Delta t_0$$

である。



解法４：　もし、(ii) を先に解いたとすると、ボブからの２つのギフト距離は、アリス座標系で到達時間間隔 Δt_1 とアリス系におけるボブのギフトの速度の積で与えられる。それは相対論的速度の合成則で式 (8) で与えられるので、

$$l_B = v_B \Delta t_1 = \frac{35}{37}\,c\,\frac{16}{35}\,\Delta t_0 = \frac{16}{37}\,c\Delta t_0$$

となる。

a) (ii)

解法１：　(i) を先に解いたとすると、時間間隔は

$$\Delta t_1 = \frac{l_B}{v_B} = \frac{16}{35}\,\Delta t_0$$

で与えられる。

Problem 2.(a): Using Solution 1	**pts**
Formula for relativistic addition of velocities each mistake -0.3	0.5
Speed v_B of Alice's gift in B ($35/37 = 0.\overline{945}$) must have correct formula	0.5
Find l_A	0.5
γ formula each mistake -0.2	0.3
$l_1 = l_2/\gamma$ only true in rest frame	0.7
Boost l_A to G frame each mistake -0.1	0.3
Boost from G frame to l_B each mistake -0.1	0.2
Collect expressions for l_B	0.5
correct numerical result ($16/37 = 0.\overline{432}$) must have correct formula	0.5
$\Delta t_1 = l_B/v_B$	0.5
correct numerical result ($16/35 \approx 0.457$) must have correct formula	0.5
Total for 2.(a)	**5.0**

Problem 2.(a): Using Solution 2 or 3	**pts**
Formula for relativistic addition of velocities each mistake -0.3	0.5
Speed v_B of Alice's gift in B ($35/37 = 0.\overline{945}$) must have correct formula	0.5
γ formula each mistake -0.2	0.3
because two subsequent gifts are sent from the same place in Alice's frame	0.7
$\Delta t_{0,B} = \gamma_u \Delta t_0$ each mistake -0.1	0.3
In Bob's frame, second gift at position $u\Delta t_{0,B}$ while first gift at $v_B\Delta t_{0,B}$ each mistake -0.2	0.7
Collect expressions for l_B	0.5
correct numerical result ($16/37 = 0.\overline{432}$) must have correct formula	0.5
$\Delta t_1 = l_B/v_B$	0.5
correct numerical result ($16/35 \approx 0.457$) must have correct formula	0.5
Total for 2.(a)	**5.0**

Important Notes for marking Problem 2

- Correct final answers without justification can receive full marks; incorrect final answers without justification will receive no marks, even if the answer is “close” or if it can be guessed what the error was.
- The statement “must have correct formula” means that the any immediately preceeding symbolic formula to the numerical number must be correct to receive any points for a numerical answer.
- Correct numerical result is dependent only on the immediate formula from which it is computed.
- A dimensionally incorrect formula gets zero marks.
- Student can define $c = 1$ explicitly without penalty, but inconsistencies are treated as errors.
- Follow on errors normally only have penalty at point of error

- Numerical results that are follow on errors are not penalized twice
- must have recognized light time correction need at least once to get points for ratio formula AND result
- Transcription errors are errors
- If Part a) is solved without the explicit use of special relativity, then the maximum possible for part a) is 0.5 pts.
- If Part b) is solved without the explicit use of special relativity, then no points are awarded.
- For final answer on Part b), must have correct formula; non integer numbers that round to 18 get only +0.2 pts.
- Any other mistakes or errors not explicity covered in the marking schemes should be treated a fully wrong for the category; so if a category is listed as 0.6, and the student work is incorrect, and no other disclaimer applies, then the score would be 0.
- If a student could only reasonably have correctly completed some task by correctly doing the previous tasks, then the previous tasks should be fully awarded, even if not explicitly written. However, if the tasks are written, and have errors, the student will get the appropriate deductions.
- If it can be argued that a student could only reasonably have completed some task by correctly doing the previous tasks, but the answer to the shown task is incorrect, then the previous tasks should receive zero marks if not explicitly shown.

b)

解法１：　時刻 $t_{0,A}$ において、アリスにはボブの宇宙船が距離 d_B のところにいるように見えたとする。ボブからアリスまで光が伝播するのにかかる時間は $t_\ell = d_B/c$ なので、時刻 $t_{0,A}$ のアリスからボブの宇宙船までの実際の距離は、アリス系において $L = d_B - ud_B/c$ である。

まず、見えている出てゆくギフトの数を計算しよう。アリスが発送したギフトは、それがボブの宇宙船に到達したと確認できるまで、見えている。ちょうど時刻 $t_{0,A}$ に、ボブに到着したと確認できたギフトを考えよう。それは、見えているギフトの中で最も古いものだ。もしそのギフトがそのままボブの宇宙船を通り過ぎていたとすれば、その時そのギフトは、実際には $d_B + vt_\ell$ にある。故に、見えている最も古いギフトとアリスとの間にあるギフトの数は

$$N_{\text{out}} = \frac{d_B + vt_\ell}{l_A} = \frac{d_B(1+v/c)}{v\Delta t_0}$$

である。

別解：d_B/l_A は、時刻 $-t_\ell$ における見えている最も古いギフトとアリスの間のギフトの数である。その後の t_ℓ の間に $t_\ell/\Delta t_0$ 個のギフトを更に送るので、合計 $N_{\text{out}} = d_B/(v\Delta t_0) + d_B/(c\Delta t_0)$ となる。

次に、やってくるギフトのうち見えているものの数を計算しよう。最も新しいギフトがちょうどボブの宇宙船から発送されたのを、アリスは見たとする。その時のそのギフトまでの実際の距離は、アリス座標系で $d_B - v_B t_\ell = d_B(1 - v_B/c)$ である。やってくるギフトの間の距離は l_B で、それは a) ですでに計算した。というわけで、やってくるギフトのうち見えているものの数は

$$N_{\text{in}} = \frac{d_B(1 - v_B/c)}{l_B} = \frac{d_B(1 - v_B/c)}{\Delta t_0 c}\,\frac{37}{16}$$

である。

結局、

$$\frac{N_{\text{out}}}{N_{\text{in}}} = \frac{(1+v/c)c}{(1-v_B/c)v}\,\frac{16}{37} = 18$$

を得る。

解法２：　アリスとボブは全く同じようにギフトを送り合い、それらの相対速度も互いにいつも同じなので、これらの間には対称性がある。ボブが見るこれから受け取るギフトの数はアリスが見る受け取るギフトの数と全く同じで、同じことが発送したギフトについても言える。というわけで、今度はボブが静止している座標系で考えよう。

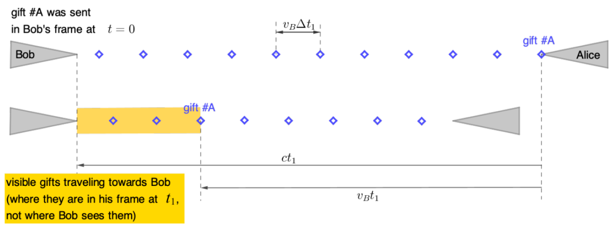
まず、ボブが受け取るギフトを見てみる。ボブとアリスの間には、すでにアリスから発送されているがボブが受け取っていないギフトが存在する。

しかし、ボブにはそれらすべてが見えるわけではない。というのは、最も遠くのギフトからの光はボブにはまだ到達してい

ないからである。ボブが見ることができる最も遠くのギフト#Aが時刻 $t=0$（ボブ座標系で）にボブに向かって発送され、ボブはそれを時刻 t_ℓ に見たとする。そのとき、そのギフトは $v_B t_\ell$ だけすでに移動しており、それが発送された $t=0$ にギフトから放出された光は ct_ℓ だけ伝播し、t_ℓ にちょうどボブに到達する。ボブに向かって移動する２つの隣合わせのギフトの間の距離は $v_B \Delta t_1$ である（解法１：a) (i) を参照)。この時、ボブに向かってくるギフトのうちボブに見えるものの数は、

$$N_{A\to B} = \frac{(c-v_B)t_\ell}{v_B \Delta t_1} \tag{9}$$

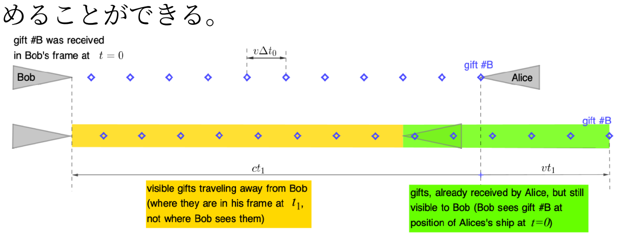
である。



次に、ボブがアリスに送ったギフトを考える。ボブには、自分が送ったギフトのうち、観測したときにアリスに到達していないものはすべて見え、それに加えて、すでにアリスが受け取っているが、その情報がまだボブには到達していないものも、ボブには輸送中として見える。時刻 $t=0$ を、ボブが送ったギフト#Bがアリスに着いた時刻としよう。この時、アリスからの光がボブに向かって伝播し、時刻 t_ℓ にギフトがアリスに着いたという情報がボブに到達する。そのとき、ボブはギフト#Bが受領されたことを知る。時刻 $t=0$ から t_ℓ の間も、ボブは定期的にギフトを送り続け、その結果、実際に存在するよりも多くのギフトが途中にあるように、ボブには見える。ギフト#Bはすでに受領された後も、ボブがそのことに気づくまでアリスを通り過ぎて余分の距離 vt_ℓ 行ってしまうとして計算すると、ボブに輸送中として見えるギフトの数は、

$$N_{B\to A} = \frac{(c+v)t_\ell}{v\Delta t_0} \tag{10}$$

と求めることができる。



ボブの座標系で、アリスは時刻 $t=0$ にギフト#Aをボブへ送り、同時に同じ時刻同じ場所で、ボブからギフト#Bを受け取る。そしてボブは時刻 t_ℓ に途中を移動しているギフトを観測する。

ボブから出てゆくギフトと、ボブに向かってくるギフトの数の比は

$$\frac{N_{B\to A}}{N_{A\to B}} = \frac{(c+v)t_\ell}{v\Delta t_0}\,\frac{v_B\Delta t_1}{(c-v_B)t_\ell} = \frac{(c+v)v_B\Delta t_1}{v\Delta t_0(c-v)} = 18 \tag{11}$$

である。ここで、すでに求めた関係式 $\Delta t_1 = \frac{16}{35}\Delta t_0$, $v_B = \frac{35}{37}c$、および $v=\frac{4}{5}c$ を用いた。

Problem 2.(b)	**pts**
Identify a distance to Bob d_B	0.3
Light time to Bob t_l	0.5
Recognize need to correct for light time	0.5
$d_{AG} = d_B + t_l v$ each mistake -0.3	0.9
$N_{a\to b} = d_{AG}/L_A$	0.2
Recognize need to correct for light time	0.5
$d_{BG} = d_B - t_l v_B$ each mistake -0.3	0.9
$N_{b\to a} = d_{BG}/L_B$	0.2
symbolic ratio each mistake -0.2	0.5
correct numerical result (18) must have correct formula	0.5
Total for 2.(b)	**5.0**

作図解法：省略

T3: ファブリ・ペロー干渉計

以下の解法では、x 軸を鏡に垂直に取ったデカルト座標を用いる。第１の鏡の１を $x=0$、第２の鏡を $x=L$ に置き、ビームは x の負の領域から干渉計に向かってくるとする。領域 I, II, および III を、それぞれ $x<0$, $0<x<L$, および $x>L$ とする。簡単のために、ここでは鏡は薄いとするが、この仮定は結果に影響しない。

解法１：

a) レーザービームが第１の鏡に出会ったところで、光の一部が反射してレーザーに向かって戻り、残りは透過して２枚の鏡の間の空間（領域 II）入る。この透過光は鏡の間を行ったり来たりし、鏡で反射するたびに光の一部が透過して干渉計から出てゆく。レーザーに戻る光の複素振幅を求めるために、最初に反射して干渉計の中に入らない光の複素振幅とともに、１回、２回、３回、etc. と何度も反射して行き来した光の複素振幅の和を計算する必要がある。

つまり、それぞれの領域の光は、無限の数の波の重ね合わせからなっている。肝心なのは、同じ振動数、波長、伝播方向の正弦波を任意の数重ね合わせても、それと同じ振動数、波長、伝播方向の一つの正弦波として表されることである。それ故、領域 I, II, III における光の電場の波は、複素表示を用いると以下のような形であらわされる：

$$\begin{aligned}
&\text{領域 I:} && E(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)},\\
&\text{領域 II:} && E(x,t) = Be^{i(kx-\omega t)} + Ce^{i(-kx-\omega t)},\\
&\text{領域 III:} && E(x,t) = De^{i(kx-\omega t)}.
\end{aligned}$$

領域 I では、波数 k、角振動数 ω、振幅 A の x の正の方向に進行する波が存在する。反射波がないという条件から、領域 I には逆方向に伝播する波が存在しない。領域 II の電場は、両方の方向に伝播する２つの波の和からなり、その複素振幅を B と C とした。最後に、領域 III には x の正の方向に伝播する波しかなく、その複素振幅を D とする。

この鏡の振幅に対する反射係数 r と透過係数 t を導入しよう。これらの係数は一般に複素数で、鏡を特徴づけるパラメタである。反射波の複素振幅と入射波の複素振幅の比が r で、透過波の複素振幅と入射波の複素振幅との比が t である。我々は複素数 r と t の位相差に関心がある。

第１の鏡の左右（領域 I と II）の波がどう関連しているか考えよう。領域 II における前進する波は、領域 I の入射波が透過した波と、領域 II で後退する波が反射した波からなる。それ故、

$$B = tA + rC \tag{12}$$

が成り立つ。同様に、領域 I において後退波は存在しないので、入射波が反射した波と、領域 II の後退波が透過した波の和がゼロにならなければならない：

$$0 = rA + rC. \tag{13}$$

更に、第２の鏡に対しても同様に考えて、$x=L$ における複素振幅を求めることにより、

$$De^{ikL} = tBe^{ikL}, \tag{14}$$

$$Ce^{-ikL} = rBe^{ikL} \tag{15}$$

をえる。入射波の振幅 A とともに r と t が与えられたとすると、式 (12)–(15) は、B, C, D, および kL の、４つの未知数を含んでいる。これらより、

$$e^{-2ikL} = r^2 - t^2 \tag{16}$$

をえる。この関係式は複素数 r^2-t^2 の偏角が $-2kL$ であることを示している。また同時に、この複素数の絶対値が１であること、

$$\left|r^2 - t^2\right| = 1 \tag{17}$$

を示している。これは、問題の設定において干渉計からの反射波が無くなるために、r と t が満たさなければならない条件である。

損失のない鏡に対しては、もう一つ追加の条件を満たさなければならない。どちらか一つの鏡に光が入射したとき、入射強度は反射強度と透過強度の和に等しくなければならない。この問題において光の速さはすべて同じなので、光の強度はその振幅の２乗、すなわち、複素振幅の絶対値の２乗に比例している。故に、エネルギーの保存から、

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \tag{18}$$

が成り立たなければならない。式 (17) と (18) より、r と t はどちらも実数ではありえず、透過波と反射波の間には位相シフトがなければならない。

b) 式 (17) と (18) より、ϕ の大きさは 90° であることが示される。以下では、このことを２通りの方法で示す。

第１の方法では、これらの条件式を２乗して差を取ると、

$$\begin{aligned}
\left|r^2 - t^2\right|^2 &= |r|^4 + |t|^4 - r^2 t^{*2} - r^{*2} t^2 = 1\\
\left(|r|^2 + |t|^2\right)^2 &= |r|^4 + |t|^4 + 2|r|^2|t|^2 = 1\\
\Rightarrow \quad 2|r|^2|t|^2 &= r^2 t^{*2} + r^{*2} t^2
\end{aligned}$$

をえる。ここで、星印は複素共役を表す。これから $(rt^* + r^*t)^2 = 0$、すなわち

$$\frac{r}{t} + \frac{r^*}{t^*} = 0 \tag{18.1}$$

が得られる。これは r/t が純虚数であることを示しており、r と t の偏角の差は $\pm 90^\circ$ でなければならない。

別の方法では、$a = r^2$ および $b = t^2$ とおいて、式 (17) と (18) を

$$|a - b| = 1$$

$$|a| + |b| = 1$$

と表す。複素平面上の原点を O、複素数 a と b を表す点をそれぞれ A と B として、三角形 OAB を考える。最初の式は辺 AB の長さが 1 を意味する。第 2 の式は OA と OB の長さの和が 1 であることを意味する。すなわち、点 O, A, および B は実際には一直線上に並んでおり、O は A と B の間になければならない。a と b の偏角は、それぞれ r と t の偏角の 2 倍なので、r と t の偏角は $\pm 90^\circ$ だけ異ならなければならない。

c)　レーザーが急に切られると、レーザーから第 1 の鏡に光が到達する時間がたった後、入射光はなくなる。

$|t| \ll |r|$ なので、振幅 $|B|$ と $|C|$ は非常に大きく、それらの差は小さい。物理的には、干渉計の中には、左右に伝播するほぼ同じ強度の光として、非常に大きな電磁エネルギーが蓄えられている。このことは、蓄えられたエネルギーが干渉計から放出される際、ほぼ左右対称に放出されることを意味する。つまり、ほぼ同じ量のエネルギーが左右に放出される。それ故、レーザーに向かって伝播するパルスに含まれるエネルギーは、蓄えられたエネルギーの半分となる。

蓄えられたエネルギーを求めるために、領域 II の前進および後退波それぞれの波の強度を P' としよう。鏡を透過して干渉計から出てくる光の強度は $(1-R)P'$ である。この透過波は、最初の鏡からの反射波と完全に打ち消し合わなければならない。最初の鏡からの反射波の強度は $RP \approx P$ なので、$P' \approx P/(1-R)$ を得る。左右に伝播する波のエネルギーは単純に足し合わされるので、これより最初に干渉計に蓄えられてたエネルギーは、

$$U \approx \frac{2}{1-R}\,\frac{LP}{c} \tag{19}$$

となる。レーザーに向かって戻ってゆくパルスに含まれるエネルギーはその半分の

$$E \approx \frac{1}{1-R}\,\frac{LP}{c}$$

である。

d)　これには少なくとも 2 つの解法がある。第 2 の方法は後の解法 2 を参照のこと。

干渉計に蓄えられているエネルギーは最初は式 (19) で与えられる。入射ビームが切られた瞬間に領域 I と III に干渉計から出てくる波の振幅は、どちらもおおよそ $|A|$ で与えられるので、干渉計から出てくる光のエネルギーの流束は、

$$\frac{dU}{dt} = -2P = -\frac{(1-R)c}{L}U \tag{20}$$

となる。干渉計の内側の光の振幅がある因子で減ったとしたら、外の光の振幅も同じ因子で減るので、干渉計に蓄えられたエネルギーは指数関数的に減衰すると仮定できる。つまり、内側に蓄えられたエネルギーと外に向かう光のエネルギー流束の比は、おおよそ一定である。この時定数 T は、$U \propto e^{-t/T}$ が式 (20) の解であることから、

$$T \approx \frac{1}{1-R}\,\frac{L}{c}$$

をえる。これは一つの見積もりで、数因子は減衰の時定数を見積もるのに振幅を用いたかエネルギーを用いたかにも依存するので、1 の程度の因子が余分についていても構わない。L/c の組み合わせは次元解析で得られるので、R の正しい依存性に対して点数を与えるべきである。

解法２：

a)　光が 1 回、2 回、3 回, etc. 鏡に反射した複素振幅の無限級数の和を求めることによって、この問題を解くこともできる。

領域 I を後退する波に着目しよう。これはゼロになる。定常状態では、レーザーを切る前の入射ビームの $x=0$ における振幅を A としよう。解法 1 と同様に、振幅反射係数を r、振幅透過係数を t とすると、後退するビームの振幅は

$$rA\Big[1 + t^2\big(e^{2ikL} + r^2 e^{4ikL} + r^4 e^{6ikL} + \cdots\big)\Big]$$

で与えられる。第 1 項は最初に第 1 の鏡で反射し（因子 r）、領域 II に入らなかった光を表す。後の項は最初に第 1 の鏡を透過し（因子 t）、$x=0$ から $x=L$ まで N 回往復し（電波による因子 e^{2NikL} と反射による因子 r^{2N-1})）、第 1 の鏡を再び透過した光（因子 t）を表す。この幾何級数の和を取って、後退波の振幅は

$$rA\left(1 + \frac{t^2 e^{2ikL}}{1 - r^2 e^{2ikL}}\right) = 0$$

と表される。これを変形することにより、解法 I の条件 (16) と同じものを得る。残りの解は解法 I と同様である。

b)　解法 I と同じ。

c)　入射ビームが切られた後、直ちに最初の鏡で反射する光がなくなる。2 つの鏡を N 回反射して出てくるビームは、少しあとになってなくなる。すなわち、直後の後退波の振幅は

$$rA\Big[t^2\big(e^{2ikL} + r^2 e^{4ikL} + r^4 e^{6ikL} + \cdots\big)\Big] = -rA$$

となる。これは、$x=0$ での時間 $\Delta t = 2L/c$ の間、後ろ向きに反射する光の振幅である。

Δt のち、一回反射して干渉計から出てくる光が切れる。次の Δt の間、出てくる光の振幅は

$$rA\Big[t^2\big(r^2 e^{4ikL} + r^4 e^{6ikL} + \cdots\big)\Big] = rA\frac{t^2 r^2 e^{4ikL}}{1 - r^2 e^{2ikL}} = -rAr^2 e^{2ikL}$$

となる。さらに $2\Delta t$ のち、3 回反射して干渉計から出てくる光が切れてなくなり、振幅は

$$rA\Big[t^2\big(r^4 e^{6ikL} + \cdots\big)\Big] = rA\frac{t^2 r^4 e^{4ikL}}{1 - r^2 e^{2ikL}} = -rAr^4 e^{4ikL}$$

となる。時間 $n\Delta t$ の後、振幅は $-rAr^{2n}e^{2nikL}$ となる。振幅の絶対値は時間 Δt 毎に因子 R だけ減少する。このことは、幾何級数の和を計算しなくても導ける。それぞれの波の振幅は前の波よりも 2 回余計に反射しており、振幅は因子 R だけ小さくなるのだ。

逆方向に伝播するパルスのエネルギーは、1 回目、2 回目、3 回目、、、の Δt の間のエネルギーの和で与えられるので、

$$P\Delta t\big(|r|^2+|r|^6+|r|^8+\cdots\big)=\frac{|r|^2}{1-|r|^4}\,\frac{2LP}{c}\approx\frac{1}{1-R}\,\frac{LP}{c}$$

となる。

d)　振幅は

$$R^n=e^{-n\log(1/R)}=e^{-\log(1/R)\,t/\Delta t}$$

のように減衰するので、エネルギーは $e^{-2\log(1/R)\,t/\Delta t}$ のように減衰する。このように、おおよそ指数関数的に減衰するエネルギーの時定数は

$$T=\frac{\Delta t}{2\log(1/R)}\approx\frac{1}{1-R}\,\frac{L}{c}$$

と与えられる。最後の近似では $1-R\ll 1$ を用いた。

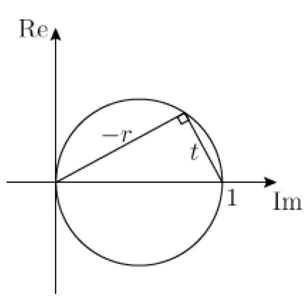
解法３：

a)　鏡の面の左右で電場の接線成分が連続であると仮定する学生がいるかも知れない。この問題では鏡の内部構造について何も述べていないので、これは意図した解答ではないけれど、これについても得点を与える。もし電場が連続であれば、$1+r=t$ となる。これを $|r|^2+|t|^2=1$ と合わせると、もし r と t が実ならば、これらの式は $(r,t)=(0,1)$ か $(r,t)=(-1,0)$ でしか満たされない。この問題では反射波と透過波があるので、r と t はゼロでない虚部を持つ複素数でなければならない。

b)　ピタゴラスの定理を用いると、r と t の間の角度は $\pm 90^\circ$ でなければならないことがわかる。

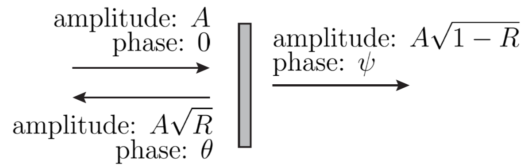
c)　解法 2 および 3 と同様。

d)　解法 2 および 3 と同様。

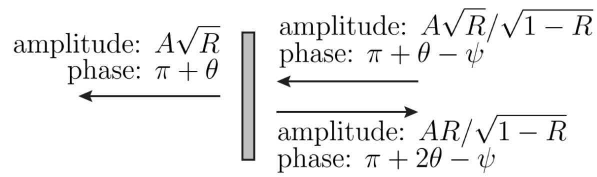


解法４：a) と b) に関して、複素数や幾何級数を用いない、別解を与える。

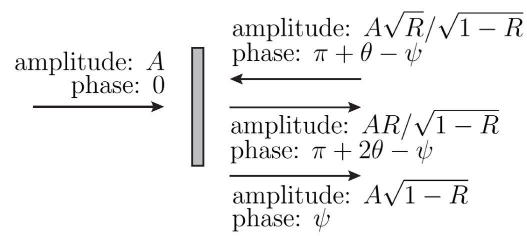
a) と b)　第 1 の鏡だけがあったとして、下図のように振幅 A の光が左から入射したとせよ。反射波の振幅は $A\sqrt{R}$ で入射波に対して θ の位相シフトがあったとする。同様に、反射波の振幅は $A\sqrt{1-R}$ で位相シフトを ψ とする。



さて、別の状況を考えよう。下図に示すように、振幅 $A\sqrt{R}/\sqrt{1-R}$ で位相角 $\pi+\theta-\psi$ の波が入射するとする。反射波の振幅は $AR/\sqrt{1-R}$ で位相角は $\pi+2\theta-\psi$ となり、透過波の振幅は $A\sqrt{R}$、位相角は $\pi+\theta$ である。



さて、これら 2 つの状況の重ね合わせを考えよう。鏡の左側で左向きに伝播する波は、同じ振幅で位相が π だけ異なるので、互いに打ち消し合う。この干渉の結果、鏡の左側では振幅 A で伝播する波だけが残される。これはまさに干渉計の最初の鏡で起こっていることである。下図で示すように、鏡の右側では 1 つの左に伝播する波と 2 つの右に伝播する波がある。



ここで、鏡は損失がないということから、上図において入射光のエネルギーが出射光のエネルギーに等しい。エネルギーは電場の 2 乗に比例するので、入射するエネルギー流束は

$$I_{\rm in}=A^2+A^2\left(\frac{R}{1-R}\right)$$

に比例する。出射エネルギー流束は若干込み入っている。すなわち、位相の異なる 2 つの出射波の重ね合わせとなっており、それは、

$$I_{\rm out}=A^2(1-R)+A^2\left(\frac{R^2}{1-R}\right)+2A^2R\cos\big(\pi+2(\theta-\psi)\big)$$

と与えられる。$I_{\rm in}=I_{\rm out}$ より $\cos\big(\pi+2(\theta-\psi)\big)=1$ がえられ、$\pi+2(\theta-\psi)$ は 2π の整数倍となり、$\theta-\psi=\pm\pi/2$ をえる。すなわち、反射波と透過波は位相が 90° ずれていなければならない。

[訳注] I_{out} の導出：右側に出てゆく波は、

$$
\begin{aligned}
&A\frac{R}{\sqrt{1-R}}\cos\left(kx-\omega t+\pi+2\theta-\psi\right) \\
&\qquad\qquad + A\sqrt{1-R}\cos\left(kx-\omega t+\psi\right) \\
&= A\left(\frac{R}{\sqrt{1-R}}\cos(\pi+2\theta-\psi)+\sqrt{1-R}\cos\psi\right)\cos(kx-\omega t) \\
&\quad - A\left(\frac{R}{\sqrt{1-R}}\sin(\pi+2\theta-\psi)+\sqrt{1-R}\sin\psi\right)\sin(kx-\omega t)
\end{aligned}
$$

と表されるので、その強度は

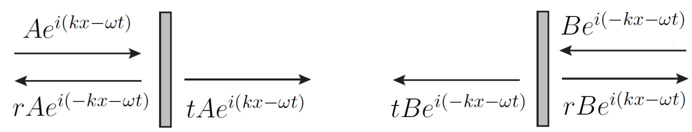
$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{out}} &= A^2\left(\frac{R}{\sqrt{1-R}}\cos(\pi+2\theta-\psi)+\sqrt{1-R}\cos\psi\right)^2 \\
&\quad + A^2\left(\frac{R}{\sqrt{1-R}}\sin(\pi+2\theta-\psi)+\sqrt{1-R}\sin\psi\right)^2
\end{aligned}
$$

となる。

問 a) と b) についての訳注：

a) と b) に関して、位相シフトは鏡そのものの性質なので、干渉計の無反射条件と関係がない。特に式 (18.1) は、鏡が表裏対称であることと損失がないという 2 つの条件から直接導出できる。この式から、透過波と反射波の位相シフトの差 $\theta-\psi=\pm\pi/2$ がであることが直ちに分かる。

鏡の左から複素振幅 A の波 $Ae^{i(kx-\omega t)}$ が入射したとする。その透過波は $tAe^{i(kx-\omega t)}$、反射波は $rAe^{i(-kx-\omega t)}$ と与えられる。一方、鏡の右から複素振幅 B の波 $Be^{i(-kx-\omega t)}$ が入射したとき、鏡が表裏対称なので同じ透過および反射係数を用いて、透過波は $tBe^{i(-kx-\omega t)}$、反射波は $rBe^{i(kx-\omega t)}$ と与えられる（下図参照)。



いま、入射波として鏡の左から $Ae^{i(kx-\omega t)}$、鏡の右から $Be^{i(-kx-\omega t)}$ の両方が入射したとすると、鏡の右側の出射波は

$$
(tA+rB)e^{i(kx-\omega t)} \equiv A'e^{i(kx-\omega t)}
$$

鏡の左側の出射波は

$$
(rA+tB)e^{i(-kx-\omega t)} \equiv B'e^{i(-kx-\omega t)}
$$

と与えられる。

ここで、鏡に損失がないとすると、入射波と出射波のエネルギー流束が等しいので

$$
|A|^2+|B|^2=|A'|^2+|B'|^2
$$

でなければならず、これより、

$$
\left(|t|^2+|r|^2\right)\left(|A|^2+|B|^2\right)+\left(tr^*+rt^*\right)\left(AB^*+A^*B\right)=|A|^2+|B|^2
$$

が得られる。これが任意の複素数 A および B に対して成り立つことから

$$
|t|^2+|r|^2=1,\quad tr^*+rt^*=0
$$

でなければならない。第 2 式から式 (18.1) が得られる。

Part T3.a): Using sinusoidal waves	Pts.
understanding that some light is initially reflected without entering the interferometer	0.3
understanding that light bounces back and forth between the mirrors	0.3
using one or two travelling waves in each region	0.4
writing equations relating amplitudes via r and t	0.5
solving to obtain (16)	0.6
using $\lvert r\rvert^2 + \lvert t\rvert^2 = 1$ or $R + T = 1$	0.5
stating that this is a consequence of conservation of energy	0.2
indicating that the solutions r and t should be complex	0.2
Total on T3.a)	**3.0**

Part T3.a): Summing geometric series	Pts.
understanding that some light is initially reflected without entering the interferometer	0.3
understanding that light bounces back and forth between the mirrors	0.3
idea of superposition of complex amplitudes	0.2
correctly including the effect on the amplitudes of reflection, transmission and propagation	0.5
summing up complex amplitudes as a geometric series	0.4
obtaining (16)	0.4
using $\lvert r\rvert^2 + \lvert t\rvert^2 = 1$ or $R + T = 1$	0.5
stating that this is a consequence of conservation of energy	0.2
understanding that the solutions r and t should be complex	0.2
Total on T3.a)	**3.0**

Part T3.a): Assuming $1 + r = t$	Pts.
understanding that some light is initially reflected without entering the interferometer	0.3
understanding that light bounces back and forth between the mirrors	0.3
using $1 + r = t$	0.7
justification using continuity of electric field or thin-mirror arguments	0.8
using $\lvert r\rvert^2 + \lvert t\rvert^2 = 1$ or $R + T = 1$	0.5
stating that this is a consequence of conservation of energy	0.2
understanding that the solutions r and t should be complex	0.2
Total on T3.a)	**3.0**

Part T3.b: Algebraic method	Pts.
writing 90°	0.5
taking modulus of (16) to get a condition involving r and t only	0.7
Solving with r, t, r^* and t^* to find that r is an imaginary number times t	0.8
Total on T3.b	**2.0**

Part T3.b: Geometric method	Pts.
writing 90°	0.5
taking modulus of (16) to get a condition involving r and t only	0.7
using a geometric argument to show that r and t must make a right angle	0.8
Total on T3.b	**2.0**

Part T3.c: Destructive interference	Pts.
|B| and |C| are the same if $\lvert t\rvert \ll \lvert r\rvert$	0.5
Applying symmetry to show $2E = U$	1.0
Finding relation between P' and P	1.5
Correct value for U	0.5
Correct value for E	0.5
Total on T3.c	**4.0**

Part T3.c: Geometric series	Pts.
Showing, perhaps just by reasoning, that the power propagating out through the first mirror decreases by a factor R^2 every Δt	1.5
Multiplying by Δt to convert power or intensity to energy	0.5
Summing a geometric series to find the total energy E	1.5
Correct value for E	0.5
Total on T3.c	**4.0**

Part d

Part T3.d: Removing waves	Pts.
Stated that energy reduces by factor R^2 each time a wave is removed	0.2
Using the fact that this reduction occurs at intervals Δt	0.4
Some valid mathematical argument from here that obtains the correct T when $1 - R \ll 1$	0.4
Total on T3.d	**1.0**

Part T3.d: Exponential decay m	Pts.
Stated the decay is roughly exponential	0.2
State the outwards energy flux	0.4
Use this to determine decay constant	0.4
Total on T3.d	**1.0**

Notes on T3.d): no marks for dimensional analysis to obtain the combination Lc. The numerical prefactor is irrelevant provided it is order unity (e.g. $\ln 2$ for half-life). Any equivalent form, assuming $1 - R \ll 1$, is acceptable.