

物理チャレンジ 2025

第 2 チャレンジ

理論問題

2025 年 8 月 23 日 (土)

理論問題にチャレンジ 8 : 30 ~ 13 : 30

理論問題にチャレンジする前に下記の＜注意事項＞をよく読んでください。

問題は、大問 4 題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 解答中に通信機能などを用いて、他の人の助言を受けたり、解を検索するなどの行為は厳禁です。このような不正行為が発覚した場合、物理チャレンジ参加の資格と権利を失います。
3. 問題冊子は表紙、裏表紙と問題 26 ページです。解答用紙は 20 枚です。解答用紙は上端を糊で綴じてありますが、1 枚ずつはがして使用して構いません。
4. 配布された電卓を使用することができます。
5. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
6. 解答ははっきりと書き、消しゴムを使う場合には、きちんと消すこと。なお、解答用紙の裏面は使用しないこと。
7. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
8. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
9. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させます。
10. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机上に置いて、監督者の指示を待つこと。なお、解答用紙はページ番号順に重ねること。
11. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第 1 問 (75 点)

実在気体の分子運動論

地表の空気中では 1cm^3 当たり 10^{19} 個以上の気体分子が、数 100m/s の速さで飛び回っている。容器に閉じ込められた気体が容器の壁におよぼす圧力はこのように多数の気体分子が容器の壁に衝突する際におよぼす力によるものである。一つ一つの気体分子の運動が古典力学にしたがうものとすれば、気体分子の運動方程式を解くことにより、個々の気体分子の軌跡を求めることができ、そこから圧力のような巨視的な量や気体の状態変化を研究することができる。以下では、気体分子のような微視的な粒子の力学が圧力のような巨視的物理量を生む様子を考察する。

[I] 自由粒子の気体分子運動論

半径 R の球形の容器に閉じ込められた N 個の分子からなる気体を考える。以下では、気体分子は質量 m の質点とみなすことができるとして、これを粒子と呼ぶ。まず、粒子はお互いに力を及ぼすことはなく、自由に運動している場合を考えよう。粒子には番号 i を付けて、粒子 i は速さ v_i で運動しているものとする。

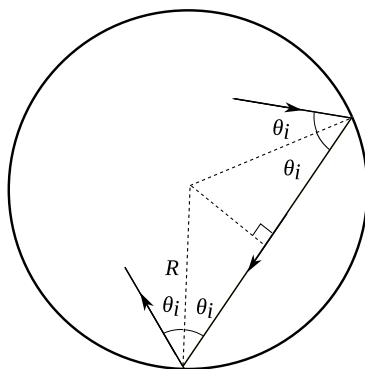


図 1.

- 問 1 粒子 i が球形容器の壁に入射角 θ_i で衝突するとき、1 回の衝突の際の粒子の運動量の変化の大きさを求めよ。ただし、粒子と容器の壁との衝突は弾性衝突と考えてよい。
- 問 2 問 1 の粒子 i が時間 Δt の間に容器の壁に衝突する回数を求めよ。これより、時間 Δt の間に粒子 i が壁に与える壁面に垂直方向の力積の大きさの総和を $F_i \Delta t$ とおいたときの力 F_i を求めよ。
- 問 3 容器の壁が粒子の衝突により受ける単位面積あたりの力（圧力） P は、

$$PV = \frac{2}{3} K \quad (1)$$

の関係を満たすことを示せ。ただし、 V は容器の体積、 K は粒子の運動エネルギーの総和

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2$$

である。

理想気体の状態方程式はボルツマン定数 k_B と絶対温度 T を用いて

$$PV = N k_B T$$

と与えられる。このことと問3の結果より、粒子1個当たりの平均の運動エネルギーが

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \quad (2)$$

と与えられ、巨視的な物理量である温度と関係付けられることがわかる。ただし、

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$$

は粒子の速度の2乗平均とよばれる。

問4 希ガス元素 Ar (アルゴン) の原子量は 39.9 である。これより、 $T = 300 \text{ K}$ の Ar 気体中の Ar 原子について、粒子の速さの目安として速度の2乗平均の平方根 $\sqrt{\overline{v^2}}$ を計算せよ。ただし、ボルツマン定数 k_B は $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 、アボガドロ定数は $6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$ である。

[II] 微視的粒子の運動と長時間平均

次に、微視的な粒子の運動と巨視的な物理量として得られる観測量の関係について考察する。以下では粒子 i の時刻 t における位置座標、速度、加速度をそれぞれ $\vec{r}_i(t)$, $\vec{v}_i(t)$, $\vec{a}_i(t)$ と表すこととする。運動方程式により粒子 i にはたらく力は $\vec{F}_i(t) = m \vec{a}_i(t)$ である。

微視的な粒子の振る舞いを観測する場合、観測される巨視的な物理量には、相当する微視的な粒子の物理量 $Q(t)$ の長時間平均

$$\lim_{T_{\text{obs}} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{\text{obs}}} \int_0^{T_{\text{obs}}} Q(t) dt = \langle Q \rangle$$

が対応していると考ええる。そこで、物理量 $Q(t) = \vec{r}_i(t) \cdot \vec{F}_i(t)$ を時刻 $t = 0$ から $t = T_{\text{obs}}$ までの間にわたって積算することを考える。ただし、 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ はベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の内積 (スカラー積) を表す。

問 5 運動方程式より関係式

$$\int_0^{T_{\text{obs}}} \vec{r}_i(t) \cdot \vec{F}_i(t) dt = m \left[\vec{r}_i(T_{\text{obs}}) \cdot \vec{v}_i(T_{\text{obs}}) - \vec{r}_i(0) \cdot \vec{v}_i(0) \right] - m \int_0^{T_{\text{obs}}} |\vec{v}_i(t)|^2 dt$$

が成り立つことを示せ。

問 6 問 5 の結果を T_{obs} で割った後、観測時間 T_{obs} を無限大にすることにより、粒子の運動の長時間平均 $\langle \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \rangle$ を求める。このとき問 5 の式の右辺第 1 項 $m \left[\vec{r}_i(T_{\text{obs}}) \cdot \vec{v}_i(T_{\text{obs}}) - \vec{r}_i(0) \cdot \vec{v}_i(0) \right]$ は長時間平均には寄与しないが、その理由を説明せよ。こうして得られた量をすべての粒子について足し合わせることで、 K を粒子の運動エネルギーの総和の長時間平均として

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle = \boxed{\text{A}} \times K$$

の関係が得られる。 $\boxed{\text{A}}$ に入る数を答えよ。

問 7 自由粒子の場合にこの結果を適用してみる。粒子にはたらく力は衝突の際に粒子が壁から受ける力だけである。位置ベクトルの原点を球形容器の中心に取れば、粒子は $|\vec{r}_i(t)| = R$ のときに容器の中心に向かう方向 ($-\vec{r}_i(t)$ の方向) に力を受けることになる。このことより、圧力 P と球の体積 $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ を用いて

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle = \boxed{\text{B}} \times PV$$

と書けることを示し、 $\boxed{\text{B}}$ に入る数を答えよ。

問 6 および問 7 の式の左辺の量はビリアルとよばれ、粒子の運動エネルギーの総和とビアルの関係を示した問 6 の式をビリアル定理と呼ぶこともある。問 6 と問 7 の結果より、[I] で得られた自由粒子で成り立つ関係 (1) が得られる。

[III] 相互作用する粒子の気体分子運動論

次に粒子には壁から受ける力の他に、分子間力（他の分子から受ける力）がはたらく場合を考えよう。すなわち、粒子 i にはたらく力 $\vec{F}_i$ を

$$\vec{F}_i(t) = \vec{F}_i^{\text{wall}}(t) + \vec{F}_i^{\text{int}}(t)$$

と表す。ここで $\vec{F}_i^{\text{wall}}(t)$ と $\vec{F}_i^{\text{int}}(t)$ はそれぞれ粒子 i が壁から受ける力と粒子 i が i 以外の粒子から受ける力である。問 6 の式の右辺の運動エネルギーの総和 K については、分子間力ははたらいなくても運動エネルギーの平均と絶対温度 T の関係 (2) が成り立つことが知られて

いる。また、壁から受ける力 $\vec{F}_i^{\text{wall}}(t)$ のビリアルへの寄与は問7の結果より圧力を用いて表されるので、

$$PV = Nk_B T + \frac{1}{3} \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{int}} \right\rangle \quad (3)$$

が得られる。ここで、右辺第2項は理想気体からのずれを表し、以下ではこの項を見積もる。

問8 分子間力が2粒子間にはたらく力により生ずると考えて、

$$\vec{F}_i^{\text{int}}(t) = \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij}(t)$$

と与えられる場合を考えよう。ここで $\vec{f}_{ij}(t)$ は粒子 j が粒子 i に及ぼす力であり、 $\vec{f}_{ii}(t) = 0$ とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \cdot \vec{F}_i^{\text{int}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)] \cdot \vec{f}_{ij}(t)$$

であることを示せ。

粒子 j が粒子 i に及ぼす分子間力 $\vec{f}_{ij}(t)$ が、粒子 j から粒子 i に向かうベクトル $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$ に平行で、かつ、その大きさが粒子間の距離 $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ にだけ依存する場合、すなわち、

$$\vec{f}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} f(r_{ij})$$

である場合を考えよう。さらに、力の大きさ $f(r_{ij})$ がある関数 $U(r)$ を用いて

$$f(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$$

と表されたとする。この関数 $U(r)$ を分子間力のポテンシャルエネルギーと呼び、着目する粒子から距離 r だけ離れた粒子の位置エネルギーと解釈することができる。このとき、問8よりビリアルは

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \cdot \vec{F}_i^{\text{int}}(t) \right\rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\langle \sum_{j=1}^N{}' r_{ij} \frac{dU(r_{ij})}{dr_{ij}} \right\rangle$$

と表される。ただし、右辺の j についての和 $\sum_{j=1}^N{}'$ につけたダッシュは、和に $j = i$ の項を含まないことを示す。

これを用いて式(3)より状態方程式を求めるには、右辺の長時間平均を計算する必要があるが、それは一般に難しい。そこで、粒子 i からみて、他の粒子は位置エネルギー $U(r)$ が粒子の

平均運動エネルギー程度以下の領域に一様に分布しているとして、長時間平均を $U(r) < k_B T$ の領域における一様空間分布の平均で近似的に見積もることとしよう。

$U(r)$ は通常は図 2 のような形をしており、 r が小さいところでは大きな斥力 ($f = -\frac{dU}{dr} > 0$)、その外側では弱い引力 ($f < 0$) がはたらく。 $U(r) = k_B T$ となる距離を r_c として、粒子 j は $r_{ij} > r_c$ の領域に一様に分布すると仮定する。着目した粒子 i から距離 r のところにいる粒子の平均数は、半径 r の球面と半径 $r + dr$ の球面に囲まれた領域 (dr を微小な長さとして、半径 r 、厚さ dr の球殻) の体積 $4\pi r^2 dr$ と粒子の平均数密度 $\rho = \frac{N}{V}$ の積、 $4\pi r^2 \rho dr$ で与えられる。これよりビリアルは

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \cdot \vec{F}_i^{\text{int}}(t) \right\rangle = -\frac{1}{2} N \int_{r_c}^{\infty} r \frac{dU}{dr} 4\pi r^2 \rho dr$$

と表される。ここで空間平均は粒子 i に依らないので、 i の和は粒子数 N で置き換えた。

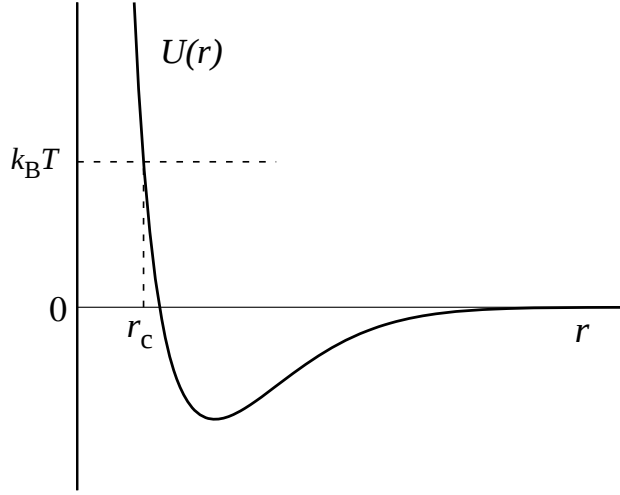


図 2.

問 9 この表式からビリアルは

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i^{\text{int}} \right\rangle = -\frac{3V}{2} \left(\frac{N}{V} \right)^2 \left[-k_B T \frac{4\pi}{3} r_c^3 - 4\pi \int_{r_c}^{\infty} r^2 U(r) dr \right]$$

と与えられることを示せ。ただし、 $r \rightarrow \infty$ で $r^3 U(r) \rightarrow 0$ とする。

問 10 希ガス元素のように分子間力が弱い系では分子間力のポテンシャルとして

$$U(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{d}{r} \right)^{12} - \left(\frac{d}{r} \right)^6 \right]$$

で表される Lennard-Jones ポテンシャルがしばしば採用される。ここで ε と d は正の量で、それぞれ 2 粒子の結合エネルギーおよび粒子の直径程度の大きさをもつ量であ

る。このポテンシャルを用いて、問9で得た表式の積分の下限 r_c を d で近似すると、式(3)から得られる状態方程式は

$$PV = Nk_B T - V \left(\frac{N}{V} \right)^2 (a - bk_B T) \quad (4)$$

の形に整理できる。 a と b に対応する数式を求めよ。

問11 実在気体に対して、状態方程式

$$P + a \left(\frac{N}{V} \right)^2 = \frac{Nk_B T}{V - Nb} \quad (5)$$

が提案され、van der Waals の状態方程式と呼ばれている。ここで a と b は定数で、 a を含む左辺第2項は分子間引力による補正を表し、右辺分母の Nb の項は分子間斥力により気体分子が動き回ることのできる空間が小さくなる排除体積の効果を表す。van der Waals の状態方程式で排除体積 Nb は全体積 V に比べて十分に小さい、すなわち $\frac{Nb}{V} \ll 1$ のとき、状態方程式(5)は式(4)の形に表されることを示せ。ただし、 $|x| \ll 1$ に対して $(1+x)^{-1} \doteq 1-x$ と近似してよい。

問12 アルゴン原子に対して、Lennard-Jones ポテンシャルのパラメータ ε , d は

$$\varepsilon = 1.725 \times 10^{-21} \text{ J}, \quad d = 3.410 \times 10^{-10} \text{ m}$$

と与えられている。これを用いて van der Waals のパラメータ a , b の値を計算せよ。ただし、ここでは r_c は d と近似してよいものとする。またこの場合、van der Waals の状態方程式における、圧力に対する分子間引力による補正項の割合 $\frac{a}{P} \left(\frac{N}{V} \right)^2$ 、および、気体の体積に対する排除体積の割合 $\frac{Nb}{V}$ 、を標準状態（1気圧=1013 hPa, 0°C=273 K）において評価せよ。ただし、1モルの理想気体の標準状態における体積は 22.4 L で、アルゴン気体は理想気体に近く補正の割合を計算する際には理想気体の体積を用いてよい。

第 2 問 (75 点)

静電カルノー・サイクル

コンデンサーは正負の極板に電荷を蓄える装置である。蓄えた電気量 Q , 極板間の電位差 V の間に $Q = CV$ の関係がある。定数 C はコンデンサーの極板の形状や間隔等によって決まり, 電気容量と呼ばれる。本問ではコンデンサーを用いた回路の性質について調べる。

[I] コンデンサーの静電エネルギー

図 1 のように, 起電力 V の電池, 電気容量 C のコンデンサー, 抵抗値 R の抵抗器と二つのスイッチ SW1, SW2 をつなぐ。コンデンサーの電気量が 0 の状態から, SW2 を開き, SW1 を閉じて充電を行う。充電が完了してから SW1 を開き, 続いて SW2 を閉じて放電する。

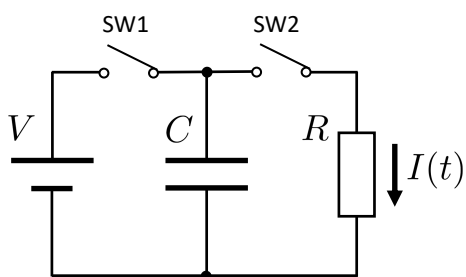


図 1.

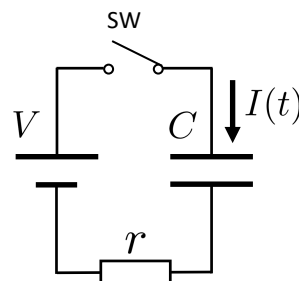


図 2.

問 1 コンデンサーの充電が完了するまでに電池がした仕事を求めよ。

問 2 SW2 を閉じた時刻を $t = 0$ として, 時刻 $t \geq 0$ でのコンデンサーの電気量を $Q(t)$ (図 1 の上側極板の電気量), 回路を流れる電流を $I(t)$ (図 1 の矢印が正の向き) とする。

(a) 閉回路内の電位差合計が 0 という条件から, $Q(t)$ と $I(t)$ が満たす関係式を求めよ。

(b) 上の関係式を t で微分して, $I(t)$ の満たす微分方程式, すなわち $\frac{dI(t)}{dt}$ を $I(t)$ で表す式, を導け。

(c) SW2 を閉じた直後の電流 $I(0)$ を求め, 上の微分方程式の解 $I(t)$ を求めよ。

(d) 放電過程において, 抵抗器で発生する単位時間あたりのジュール熱 $R(I(t))^2$ を時間で積分することによって, 時刻 $T(> 0)$ までの間に発生するジュール熱を求めよ。

上の結果で $T \rightarrow \infty$ として得られる放電によるジュール熱の総量は抵抗値 R によらず, 充電されたコンデンサーが持つ電場のエネルギー (静電エネルギー) であると理解できる。すると, 電池がした仕事と充電されたコンデンサーの持つエネルギーには差があり, エネルギー保存則を破っているように見える。これは, コンデンサーを充電する過程において, 回路に必ず存在している回路抵抗とそこでのジュール熱発生を考慮していなかったからである。

回路抵抗 (抵抗値 r) を加えた図 2 で, 電池がコンデンサーを充電する過程を考察しなす。

問 3 スイッチ SW を閉じた時刻を $t = 0$ として、時刻 $t \geq 0$ でのコンデンサーの電気量を $Q(t)$ (図 2 の上側極板の電気量, $Q(0) = 0$), 回路を流れる電流を $I(t)$ (図 2 の矢印が正の向き) とする。

- (a) 閉回路内の電位差合計が 0 という条件から, $Q(t)$ と $I(t)$ が満たす関係式を求めよ。
- (b) この関係式を t で微分して, $I(t)$ が満たす微分方程式を導け。
- (c) 初期条件 $I(0)$ の値を求め, 上の微分方程式の解 $I(t)$ を求めよ。
- (d) 充電中に時刻 $T(> 0)$ までの間に, 回路抵抗で発生するジュール熱はいくらか。

上の結果で $T \rightarrow \infty$ とすれば, 充電する間に電池がする仕事は, 回路抵抗でのジュール熱とコンデンサーのエネルギーとなって, エネルギー保存則が満たされていることがわかる。そして, この結論は回路抵抗値 r に依らないので, 充電速度の大小には依らない。

[II] エネルギー損失のない電荷移動

コンデンサーを充電するときに発生する回路抵抗のジュール熱は充電に伴うエネルギー損失である。このような損失は充電に限らず, 電荷を移動する際に発生してしまうので, これをなくす方法を考える。以下では, コンデンサーは平行平板コンデンサーとし, コンデンサーの静電エネルギー U はコンデンサーの電気容量を C , 電気量を Q , 電位差を V として $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$ であることを使ってよい。

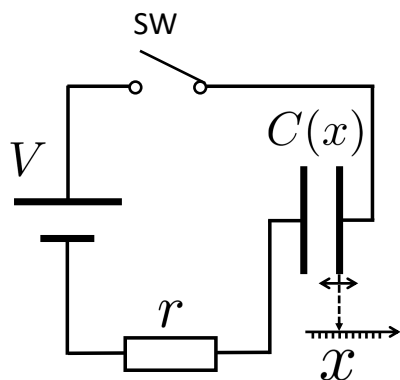


図 3.

図 3 の回路 (回路抵抗 r) を用意する。コンデンサーの左側極板は装置に固定されているが, 右側極板は外部から左右に動かして, 極板間隔を変更できる。右側極板の位置が x のときの電気容量を $C(x)$ とする。右側極板の位置を x として, スイッチ SW を閉じてから十分時間がたつと, 右側極板に電気量 Q が蓄えられた。

この状態から SW を開き, 右側極板の位置を x から微小量 dx だけ動かすと, コンデンサーの電位差 V (左側極板に対する右側極板の電位) が微小量 dV だけ変化した。この過程ではコンデンサーの電気量は変わらないので, 等電気量過程と呼ぶ。

問 4 この微小な等電気量過程で, 右側極板の移動を介してコンデンサーが外部にする微小な機械的工作 dW_Q を計算する。

- (a) 右側極板の位置が x のとき, 右側極板に働く電場による力 $F(x)$ を $\frac{dC}{dx}$ に比例する形で表せ。力 F の正の向きは x の増加する向きとする。(ヒント: 極板に働く力は, 極板を動かしたときの系のエネルギーの変化率に負号をつけたものである。)
- (b) 微小仕事 dW_Q を $dW_Q = F(x)dx$ から計算して, dV に比例する形で書き, その比例係数を Q, V の中の適切なものを用いて表せ。

この等電気量過程では電流は発生せず，回路抵抗 r によるエネルギー損失は生じないので，コンデンサーが外部にした仕事はコンデンサーの静電エネルギーの減少と一致している。

次に，極板の位置を x に戻してから，SW を閉じる。SW を閉じても電気量の移動はなく，極板に働く力も変化しない。その後，極板を位置 x から $x + dx$ に動かすと，微小電気量 dQ がコンデンサーに加わり，右側の極板の電気量は $Q + dQ$ となった。この過程ではコンデンサーの電位差 V は固定されているので，等電位差過程と呼ぶ。

問 5 この微小な等電位差過程で，右側極板の移動を介してコンデンサーが外部にする微小な機械的工作 dW_V を計算する。

- (a) 仕事 $dW_V = F(x)dx$ は前問で求めた仕事 dW_Q と同量である。仕事 dW_V を dQ に比例する形で書き，その比例係数を Q, V の中の適切なものを用いて表せ。
- (b) この等電位差過程で，電池がした仕事 dP とコンデンサーの静電エネルギーの変化 dU を dQ に比例する形で書き，それぞれの比例係数を Q, V の中の適切なものを用いて表せ。

上の結果からわかるように，この等電位差過程で電気量を増減した場合，回路抵抗によるジュール熱損失はない。この結論は微小量の関係式から導いているので，極板の位置の変更操作（電気容量の増減）は十分にゆっくり行うことが必要である。この事実は，準静的過程（状態の変化を平衡状態を保ちながら十分にゆっくり行う過程）は可逆過程（ジュール熱発生を伴わない）である，という一般的な性質に対応している。

[III] 静電カルノー・サイクル

図 4 のように，右側極板を動かして電気容量を変えられるコンデンサーと起電力 V_1 と V_2 ($V_1 < V_2$) の二つの電池を，二つのスイッチ SW1, SW2 で接続する。等電位差過程と等電気量過程を繰り返せば，機械的および電気的な仕事をコンデンサーと外部との間でやりとりできる。このシステムを熱機関との類似性から本問では静電カルノー・サイクルと呼ぶ。

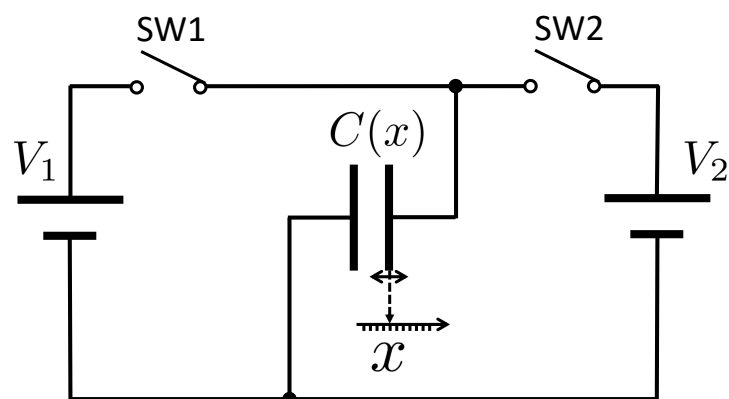


図 4.

コンデンサーの状態をその電気量 Q (右側極板の電気量) と電位差 V (左側極板に対する右側極板の電位) の 2 変数で指定する。以下の 4 つの過程を続けて 1 回のサイクルを行う。すべての過程で極板位置の変更操作は十分にゆっくりと行う。

1) $A \rightarrow B$: 状態 A では, $SW1$ は閉じられていて, $SW2$ は開いている。

コンデンサーの電気量は Q_1 , 電位差は V_1 である。

$SW1$ を開き, 極板位置を動かして, 電位差を V_2 まで増加する。

2) $B \rightarrow C$: $SW2$ を閉じ, 極板位置を動かして, 電気量を Q_2 まで増加する。

3) $C \rightarrow D$: $SW2$ を開き, 極板位置を動かして, 電位差を V_1 まで減少する。

4) $D \rightarrow A$: $SW1$ を閉じ, 極板位置を動かして, 電気量を Q_1 まで減少し, 状態 A に戻す。

問 6 解答用紙の Q - V 図に, 状態 A, B, C, D の位置を明記して, 上記のサイクルを実線で描け。

問 7 ある状態変化における, コンデンサーの静電エネルギーの増加を ΔU , 回路を通じた外部系からコンデンサーへのエネルギー供給 (電氣的仕事) を ΔP , 右側極板を介してコンデンサーが外部にした機械的仕事を ΔW とする。これらの物理量は微小量ではない。

(a) 3 つの量 $\Delta U, \Delta P, \Delta W$ の間に成り立つ関係式を書け。

(b) サイクルの 4 つの過程のそれぞれにおいて, $\Delta U, \Delta P, \Delta W$ を Q_1, Q_2, V_1, V_2 の中の適切なものを用いて表せ。

問 8 このサイクル $[A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A]$ での, エネルギーの移動について考察する。

(a) 1 回のサイクルで, コンデンサーが右側極板を介して外部にする仕事はいくらか。

(b) このサイクルの効率, すなわち, 高起電力側からコンデンサーに供給されるエネルギー (電氣的仕事) に対する, コンデンサーが外部にする仕事の比を V_1, V_2 で表せ。

問 9 すべての過程を逆にした逆サイクル $[A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A]$ を回すと, 電気量を高い電位の側へ運ぶポンプとして動作し, 高起電力側の電池を充電する装置として働く。この逆サイクルでの, コンデンサーの電気容量の最小値を $C_{\min}$, 最大値を $C_{\max}$ とする。

(a) 電気容量が最小, 最大になるときの状態はそれぞれ A, B, C, D のどの状態か?

1 回の逆サイクルで高起電力側の電池に移動する電気量を $V_1, V_2, C_{\max}, C_{\min}$ を用いて表せ。

(b) コンデンサーの電気容量を 5.0×10^2 倍変化させながら, この逆サイクルを 3.0×10^2 Hz で動かす。 $V_1 = 0.60\text{V}$, $V_2 = 5.0\text{V}$ として, この装置で V_2 側につないだモバイル・バッテリー (5.0V , 2.0Ah) を空の状態から 24 時間で満充電するために必要なコンデンサーの電気容量の最大値 $C_{\max}$ はいくらか。有効数字 2 桁で求め, 単位も明示せよ。ただし, モバイル・バッテリーの起電力は残量に依らず一定とする。また, Ah (アンペア・アワー) は電荷の単位で, 電池の容量を表現する。1Ah とは, 1A の電流を連続して 1 時間取り出すことができる能力を示す。

[IV] コイルの磁場エネルギー

ジュール熱損失なしに電荷を移動するには、[II] の等電位差過程を用いる方法以外に、コイルに蓄えられる磁場エネルギーを使う方法がある。コイルは何重にも巻かれた導線からなる装置であって、電流 I が流れているときに磁場を発生する。電磁誘導の法則によって、電流 I が変化しているときにはそれを妨げる方向の起電力 $-L \frac{dI}{dt}$ を生じる。定数 L は自己誘導係数と呼ばれ、コイルの形状や巻き数によって決まる。

図 5 のように、電池、自己誘導係数 L のコイル、抵抗値 R と r の抵抗器をつなぐ。スイッチ SW を閉じて十分に時間が経過すると、コイルに流れる電流が一定値 I_0 となった。その後、時刻 $t = 0$ に SW を開いた。

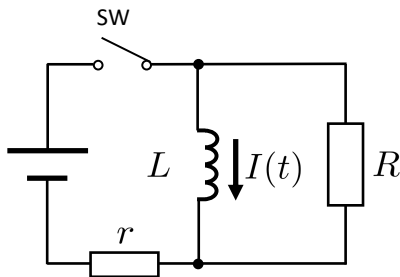


図 5.

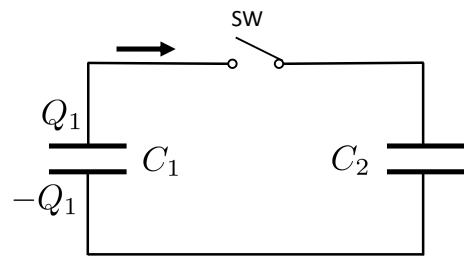


図 6.

問 10 SW を開いた後、抵抗器で発生するジュール熱を求める。

- 時刻 $t \geq 0$ にコイルに流れる電流を $I(t)$ (図 5 の矢印の向きを正) として、 $I(t)$ の満たす微分方程式を導き、初期条件 $I(0) = I_0$ を満たす解を求めよ。
- 抵抗値 R の抵抗器で発生する単位時間あたりのジュール熱 $R(I(t))^2$ を時間で積分することによって、時刻 0 から $T(> 0)$ までの間に発生するジュール熱を求めよ。

上の結果で $T \rightarrow \infty$ として得られるジュール熱の総量は R に依らず、電流 I_0 が自己誘導係数 L のコイルに流れているときのエネルギーと考えられる。このエネルギーはコイルを流れる電流によって作られた磁場のエネルギーであると理解できる。

図 6 のように、電気容量 C_1, C_2 の二つのコンデンサーをつないだ回路を作る。最初、左側コンデンサーの電気量は (上側極板に) Q_1 、右側コンデンサーの電気量は 0 であった。スイッチ SW を閉じると、二つのコンデンサーの静電エネルギーの和が最小になるように電荷が移動して再配置される。

問 11 図の矢印の向きに電気量 Q が移動したときの二つのコンデンサーの静電エネルギーの和を $U(Q)$ とする。 $U(Q)$ を最小にする Q はいくらか。

電気量の移動に伴い静電エネルギーは減少して最小値に達する。静電エネルギーの減少分は回路に存在する回路抵抗によるジュール熱の発生になっているはずである。

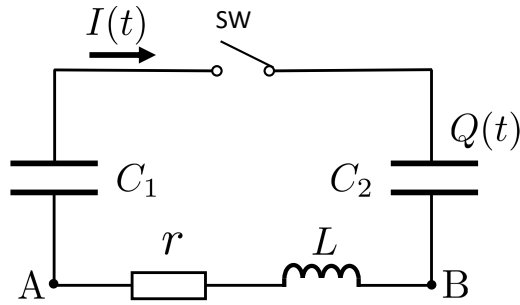


図 7.

図 7 のように，図 6 の回路に自己誘導係数 L のコイルと回路抵抗 r を表す抵抗を加える。最初，左側コンデンサーの電気量は（上側極板に） Q_1 ，右側コンデンサーの電気量は 0 とし，スイッチ SW を時刻 $t = 0$ に閉じる。この回路上で静電エネルギーがどのようになるかを考察する。

時刻 t での電流を $I(t)$ （図 7 の矢印が正の向き），電流の変化率を $\frac{dI(t)}{dt}$ ，右側コンデンサーの上側極板にある電気量を $Q(t)$ ，コイルの磁場エネルギーを $K(t)$ とする。また，時刻 0 から t までの回路抵抗 r でのジュール熱発生量を $J(t)$ とする。

問 12 回路上の A 点を電位の基準点（0 電位）として，B 点の電位を $V(t)$ とする。

(a) $V(t)$ を $C_1, C_2, Q_1, Q(t)$ を用いて表せ。

(b) $V(t)$ を $L, r, I(t), \frac{dI(t)}{dt}$ を用いて表せ。

問 13 時刻 t において微小な時間 dt の間に微小な電気量 dQ が回路を流れ，右側コンデンサーの電気量が $Q(t) + dQ$ となったとする。

(a) この電気量の移動 dQ に伴う次の 3 つの物理量の変化率をそれぞれ求めよ。

・ 二つのコンデンサーの静電エネルギーの和 U の変化率 $\frac{dU}{dQ}$

・ コイルに流れる電流で作られた磁場のエネルギー K の変化率 $\frac{dK}{dQ}$

・ 回路抵抗で発生するジュール熱発生量 J の変化率 $\frac{dJ}{dQ}$

(b) 前問で求めた電位 $V(t)$ の表式を使って， $\frac{dU}{dQ}, \frac{dK}{dQ}, \frac{dJ}{dQ}$ が満たす関係式を求め，その物理的な意味を述べよ。

(c) 回路抵抗 $r = 0$ としたとき，回路に流れる電流の最大値 $I_{\max}$ はいくらか。

回路抵抗 r を 0 に近づけても，回路に流れる電流は有限にとどまるので，ジュール熱発生はなくなる。これは問 3 で計算した状況とは全く異なる。図 7 の回路では，右側コンデンサーの下極板から放出された電位 V の電荷は，コイルの逆起電力によって静電エネルギーが磁場エネルギーに転換され，電位 0 となって左側コンデンサーの下極板に達する。この意味で，前節の等電位差過程の特性をコイルが担い，ジュール熱損失のない電気量の移動を実現している。

第 3 問 (75 点)

レンズにまつわる光学

[I] 屈折率の測定

ガラスや樹脂でできた光学機器を設計する際には、素材の屈折率の値が必要である。二つの面を精密に研磨して頂角 α ($< 90^\circ$) に加工したプリズムについて、入射する光線と出射する光線のなす角 δ (偏角もしくは偏向角) を測定することによって素材の屈折率を求めたい。

問 1 プリズムへの入射角を θ_1 、プリズムからの出射角 (プリズム側から外へ出る光の屈折角) を θ_2 として、偏角 δ を、 θ_1 、 θ_2 、および頂角 α を使って表せ。

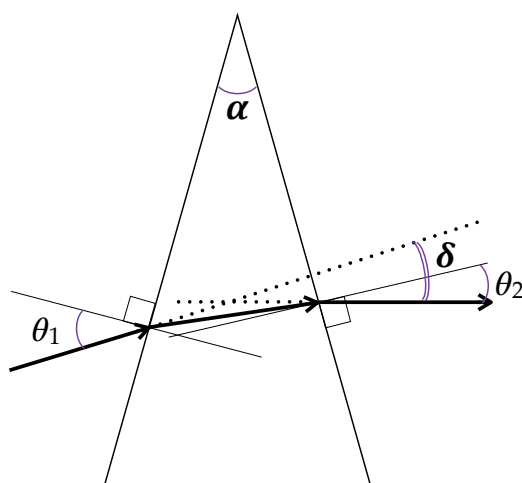


図 1. 頂角 α のプリズムと、入射角 θ_1 、出射角 θ_2 、入射光線と出射光線の成す角である偏角 δ

図 2 は、 $\alpha = 60^\circ$ 、 $n = 1.50$ の場合の入射角 θ_1 と偏角 δ の関係を示したものである。この図からもわかるように、与えられた頂角と屈折率に対して、偏角には最小値がある。入射と出射の向きを相互に入れ替えても偏角は変わらないことを考慮すると、偏角が最小になるのは入

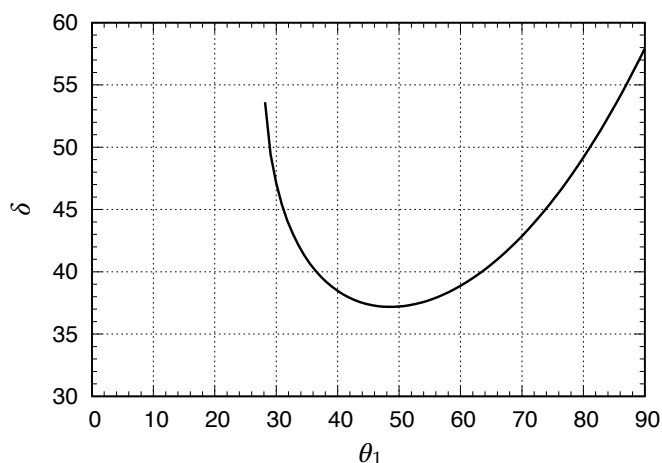


図 2. $\alpha = 60^\circ$ 、 $n = 1.50$ の場合の入射角 θ_1 と偏角 δ の関係

射角と出射角が等しくなる場合である。このことに着目すると、最小偏角 (δ_0) を測定することによって、プリズムの材質の屈折率 n がわかる。

問 2 プリズムの屈折率 n を、プリズムの頂角 α と最小偏角 δ_0 によって表せ。空気の屈折率は 1.0 とする。

[II] 厚みのあるレンズ

屈折率 n のガラス素材から成るレンズの片面の半径が $R_1 (> 0)$ 、他方の面の半径が $R_2 (> 0)$ の球面両凸レンズを考える。両方の球面の中心を結ぶ直線が光軸であり、光軸とそれぞれの球面の交点（面頂点）の間の距離 d をレンズの厚みとして定義する。

レンズに入射する光線についての入射側のレンズ半径 R_1 の効果を考えるために、 $d \gg R_2$ の場合を考えよう。面頂点まで距離 a_1 離れた光軸上の点から、レンズ表面に入射角 θ_1 で入射する光線を考える。屈折光線と光軸との交点と面頂点間の距離を b_1 とする。ただし、入射光線と光軸のなす角 α_1 、屈折光線と光軸のなす角 β_1 、レンズ上の入射点とレンズ面の曲率中心を結ぶ直線と光軸のなす角 γ_1 は、いずれも小さく、

$$\begin{cases} \sin \alpha_1 \doteq \alpha_1, \cos \alpha_1 \doteq 1 \\ \sin \beta_1 \doteq \beta_1, \cos \beta_1 \doteq 1 \\ \sin \gamma_1 \doteq \gamma_1, \cos \gamma_1 \doteq 1 \end{cases}$$

と近似できるものとする（図 3 参照）と、幾何学的関係から

$$\begin{cases} \alpha_1 \doteq \frac{R_1}{a_1} \gamma_1 \\ \beta_1 \doteq \frac{R_1}{b_1} \gamma_1 \end{cases}$$

であり、同じく、幾何学的関係から入射角 θ_1 と屈折角 θ_1' は

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha_1 + \gamma_1 \\ \theta_1' = \gamma_1 - \beta_1 \end{cases}$$

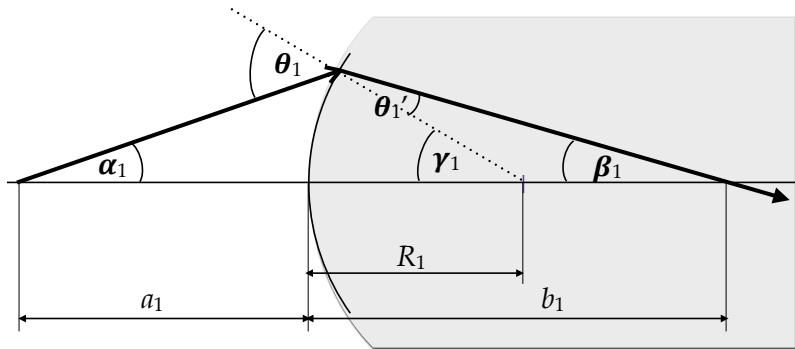


図 3. レンズに入射する光線の幾何の模式図

である。スネルの法則より、微小角の場合

$$\alpha_1 + \gamma_1 \doteq n(\gamma_1 - \beta_1)$$

であるから、

$$\frac{R_1}{a_1} + 1 \doteq n \left(1 - \frac{R_1}{b_1} \right)$$

すなわち、距離 b_1 の逆数 $\frac{1}{b_1}$ は、距離 a_1 の逆数 $\frac{1}{a_1}$ 、半径 R_1 の逆数 $\frac{1}{R_1}$ 、および屈折率 n を用いて

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{R_1} - \frac{1}{a_1} \right)$$

と表せることがわかる（ただし $a_1 > \frac{R_1}{n-1}$ とする）。

問 3 レンズから出射する光線についての出射側のレンズ半径 R_2 の効果を考えるために、 $d \gg R_1$ の場合を考えよう。レンズ内部からレンズ内面に入射角 θ_2' で入射する光線を考える。レンズによる屈折を経た光線と光軸との交点と面頂点間の距離を b_2 とする。また、レンズによる屈折がなく、直進したとする場合の光線と光軸との交点と面頂点間の距離を a_2 とする。ただし、仮想的に直進した場合の光線と光軸のなす角 α_2 、屈折光線と光軸のなす角 β_2 、レンズからの出射点とレンズ面の曲率中心を結ぶ直線と光軸のなす角 γ_2 は、いずれも小さく、

$$\begin{cases} \sin \alpha_2 \doteq \alpha_2, \cos \alpha_2 \doteq 1 \\ \sin \beta_2 \doteq \beta_2, \cos \beta_2 \doteq 1 \\ \sin \gamma_2 \doteq \gamma_2, \cos \gamma_2 \doteq 1 \end{cases}$$

と近似できるものとする（図 4 参照）。距離 b_2 の逆数 $\frac{1}{b_2}$ を、距離 a_2 の逆数 $\frac{1}{a_2}$ 、半径 R_2 の逆数 $\frac{1}{R_2}$ 、および屈折率 n を用いて表せ。

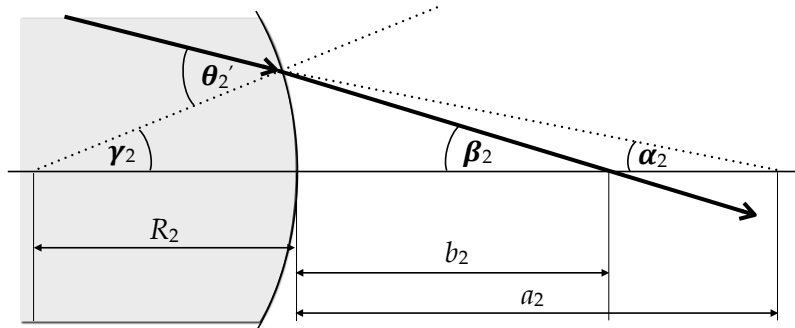


図 4. レンズから出射する光線の幾何の模式図

問 4 レンズの厚み d は、 $d = b_1 - a_2$ であることに着目して、 d を R_1 , R_2 , a_1 , b_2 , および屈折率 n で表せ。

問 5 その結果を用いて、 $a_1 \rightarrow \infty$ の場合の距離 b_2 を、屈折率 n , R_1 , R_2 , およびレンズの厚み d によって表せ。

ここからは、レンズの厚み d が焦点距離にどう影響するかを考えたい。

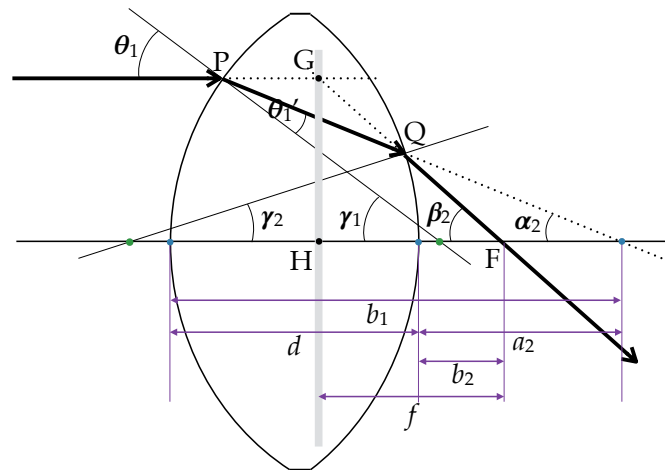


図 5. 厚みのあるレンズに光軸に平行に入射する光線の模式図

無限遠から光軸に平行に入射する光線を考える ($a_1 \rightarrow \infty$ に相当する)。レンズを通過した後の光線と光軸との交点が焦点 (図 5 の点 F) である。レンズに入射する光線、及び、レンズを通過後の光線の双方と、軌跡を同一にする厚さが極薄の仮想的なレンズを考え、その仮想的レンズの位置から焦点までの距離を、厚みのあるレンズの焦点距離と定義する。すなわち、入射光線、及び、レンズ通過後の光線を、双方共にレンズ側に延長した線同士の交点 (図 5 の点 G) から光軸に下ろした垂線と光軸の交点 (図 5 の点 H) を考え、その点 H から焦点 F までの距離を焦点距離 f と定義する。

問 6 光線がレンズから出射する際にレンズによる屈折することがなく仮想的に直進した場合の、光線と光軸のなす角 α_2 を、レンズの材質の屈折率 n , およびレンズへの入射点 P におけるレンズ面の法線と光軸のなす角 γ_1 によって表せ。

問 7 レンズから出射した光線と光軸のなす角 β_2 を、レンズの材質の屈折率 n , 入射側のレンズ半径 R_1 , 距離 b_2 , レンズの厚み d , およびレンズへの入射点 P におけるレンズ面の法線と光軸のなす角 γ_1 によって表せ。

問 8 焦点距離 f を、レンズの材質の屈折率 n , 入射側のレンズ半径 R_1 , 出射側のレンズ半径 R_2 , およびレンズの厚み d によって表せ。

[III] 焦点深度と被写界深度

カメラでの写真撮影の場合、撮像素子に有限の大きさがあるために、レンズから与えられた被写体までの距離 a に対して、ピントが合った写真として許容出来る画像のレンズからの距離 b には、ある程度の幅がある。このピントが合う範囲を「焦点深度」と呼ぶ。逆に、被写体側でもピントが合う距離には、ある程度の幅があることになり、この範囲を「被写界深度」と呼ぶ。

ヒトの眼には、網膜で受ける光量を調整するために虹彩が存在する。同様に、カメラでは、撮像素子が受ける光量を調整するために、レンズの開口径を調節する「絞り」が設置されている。焦点距離が f であるレンズの場合を考えよう。開口径 D を変えることにより、光量を調整すると共に、被写界深度やレンズの空間分解能を変えることができる。被写界深度が、レンズの焦点距離 f と、「絞り値」 $F = \frac{f}{D}$ とにどう依存するかを考えたい。

光軸に沿ってレンズから被写体までの距離を a_0 ($< \infty$) とし、被写界深度範囲に相当するレンズからの距離を、遠方側 $a_0 + \delta a_+$ 、近接側 $a_0 - \delta a_-$ とする ($\delta a_+, \delta a_- \ll a_0$)。これらに対応する結像位置までのレンズからの距離を、それぞれ、 b_0 , $b_0 - \delta b_+$, $b_0 + \delta b_-$ とする ($\delta b_+, \delta b_- \ll b_0$)。また、レンズからの距離 b_0 の像面上でピントが合ったと許容できる「許容錯乱径」を ε で表すこととする。レンズから被写体側で距離 $a_0 + \delta a_+$ または $a_0 - \delta a_-$ からの光が、レンズから撮像側で距離 b_0 で僅かにぼやける大きさが ε に相当する訳である (図 6 参照)。

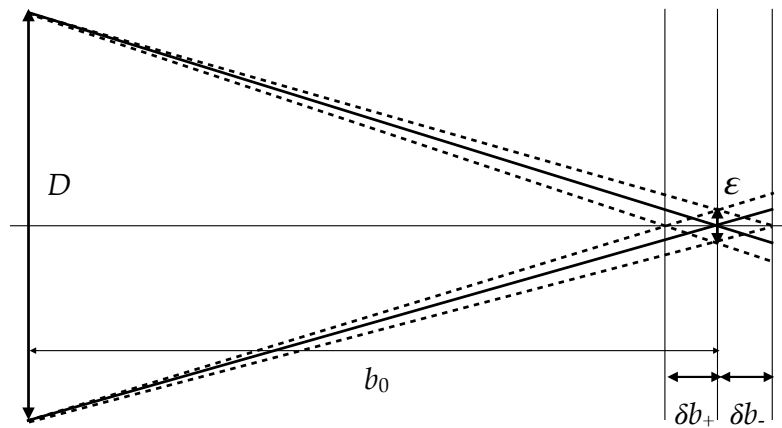


図 6. 開口径 D のレンズの結像位置 b_0 , $b_0 - \delta b_+$, $b_0 + \delta b_-$ と許容錯乱径 ε ($\ll D$) の幾何の模式図

問 9 焦点深度 $\Delta b = \delta b_+ + \delta b_-$ を, b_0 , ε , レンズの焦点距離 f , およびレンズの絞り値 F を用いて表せ。

問 10 $a_0 > f$ の場合に、被写界深度 $\Delta a = \delta a_+ + \delta a_-$ を, a_0 , ε , レンズの焦点距離 f , およびレンズの絞り値 F を用いて表せ。

[IV] 回折限界

さてここまでは、光が通る点は、文字通りの点として面積無限小として扱い、光は光線として扱ってきた。現実には、光が通過するレンズやスリットなどの機器には無視できない大きさがあり、また、光も波としての性質を持つ。その効果を考察してみよう。

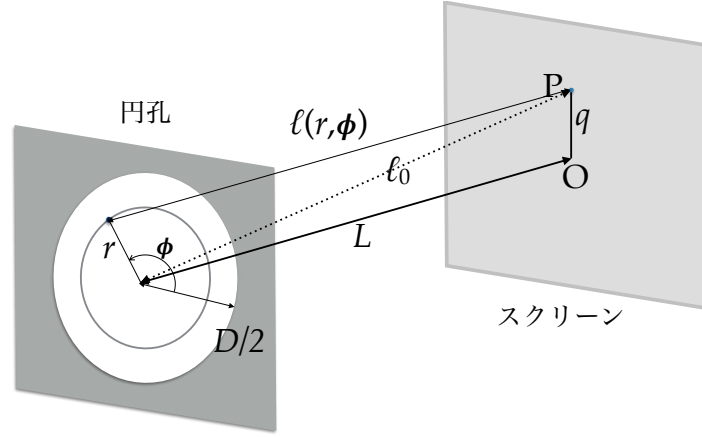


図 7. 円孔とスクリーンの配置の概念図

直径 D の円孔に垂直に波長 λ の単色光が入射する場合について、円孔から距離 L 離れた位置に円孔に平行に設置したスクリーン上の回折パターンを考える（図 7 参照）。スクリーンの中心点 O （円孔の中心点からの垂線とスクリーンとの交点）から距離 q 離れたスクリーン上の点 P に達する光は、円孔上の各点を通ってきた光の集合である。円孔上の点を円孔の中心を原点とする極座標 (r, ϕ) で指定しよう。 r は原点からの距離であり、 ϕ は偏角で、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ の方向を $\vec{OP}$ に平行な方向としよう。円孔上の座標 (r, ϕ) の点を通してスクリーン上の P 点に達した光の経路長 $\ell(r, \phi)$ は、円孔の中心と P 点の間の距離

$$\ell_0 = (L^2 + q^2)^{1/2}$$

を用い、さらに $\ell_0 \gg r$ として、

$$\begin{aligned} \ell(r, \phi) &= \left\{ L^2 + (r \sin \phi - q)^2 + r^2 \cos^2 \phi \right\}^{1/2} \\ &= \ell_0 \left(1 + \frac{-2qr \sin \phi + r^2}{\ell_0^2} \right)^{1/2} \\ &\doteq \ell_0 \left(1 - \frac{q}{\ell_0^2} r \sin \phi \right) \end{aligned}$$

と近似するとしよう。

問 11 円孔上の各点での光は同振幅かつ同位相で、時刻 t における位相を $\frac{2\pi}{\lambda}ct$ (c は光の速さを表す)、振幅を A として、そこでの光の波を

$$A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} ct \right)$$

としたとき、円孔面で円孔の中心から半径 r のリング上の各点を通して P 点に達した光をすべて足し合わせた和 $\Phi(r, t)$ を、 q , ℓ_0 , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, A , c , t およびリングの半径 r を用いて表せ。必要ならば、公式

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos(u \sin \phi) d\phi = 2\pi J_0(u) \\ \int_0^{2\pi} \sin(u \sin \phi) d\phi = 0 \end{cases}$$

を用いてよい。ここに、 $J_0(u)$ は、

$$J_0(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{u}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}$$

で定義される関数である（図 8 参照）。

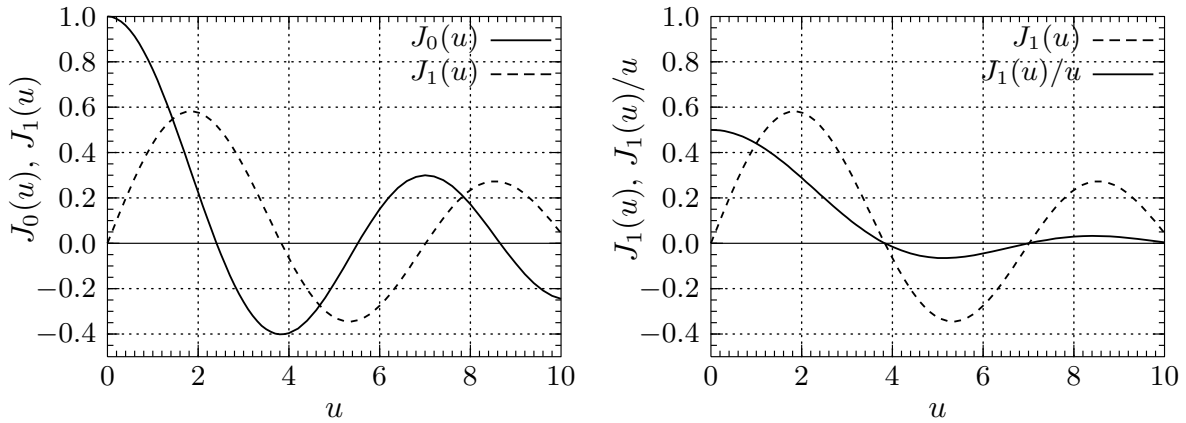


図 8. 左 : $J_0(u)$ および $J_1(u)$ の関数形 右 : $J_1(u)$ および $\frac{J_1(u)}{u}$ の関数形

問 12 円孔上で円孔の中心から半径 r のリングを通して P 点に達した光 $\Phi(r, t)$ を、 r について中心から円孔の半径 $\frac{D}{2}$ まで積分すれば、円孔を通して P 点に達した光の総和になる。スクリーン上の光の強度（振幅の二乗に比例する）を、円孔の中心からの視角 $\theta = \frac{q}{\ell_0}$ の関数として、 k , 円孔の直径 D , および θ を用いて表せ。また、こうして求めたスクリーン上の光の強度の概略図を、横軸の変数を $\frac{kD}{2}\theta$ として描け。縦軸の光の強度はスクリーンの中心点 O における光の強度を 1 とせよ。その際、公式

$$\int_0^u x J_0(x) dx = u J_1(u)$$

を用い、図 8 の右図に示した $\frac{J_1(u)}{u}$ の関数形をもとにしてよい。

上の考察でわかる重要なことは、光の持つ波としての性質（光の回折）を考慮すると、レンズによる集光においても、光は一点には集まらず、広がりを持つことである。その度合いは、光の波長とレンズの口径のみに依存し、焦点距離や倍率、素材の屈折率等には依存しない。この回折による光の広がりがあるために、ある限界値より接近した二点からの結像は重なってしまうことになってしまい、両者を識別することができなくなる。レンズには解像力に限界があるということである。近接した二つの点を独立した2点として識別できる最小の角度を「レンズの空間分解能」と呼ぶ。

問 13 関数 $J_1(u) = 0$ を満たす u のうち、 $u \neq 0$ で値が最小のものは

$$u_1 = 3.832$$

である（図 8 参照）。レンズでの光の広がりを、この u_1 に対応する量と考え、レンズの空間分解能を光の波長 λ とレンズの口径 D を用いて表せ。

問 14 月周回衛星から波長 500 nm の可視光を使って、月面より 100 km の高度から、月面上の 1 m の物体を識別するために必要となるレンズの口径はどれだけか。小数点以下を切り上げて、cm の単位で求めよ。

第 4 問 (75 点)

暗黒エネルギー

[I] 力学的エネルギー保存則とフリードマン方程式

20 世紀前半の遠方の銀河の観測にもとづく「ハッブル・ルメートル (Hubble-Lemaître) の法則」の発見を契機として、我々の宇宙が膨張しているという事実が明らかとなった。我々の宇宙は、非常に大きなスケールで平均化すると一様かつ等方であり (「宇宙原理」), 素朴に考えると, 宇宙膨張は一様な質量分布を持つ物質 (天体や星間物質など) が時間とともに均一に広がっていく現象ととらえることができる。そこで, 宇宙膨張を記述し得る簡単な力学的モデルとして, 宇宙とともに膨張 (あるいは収縮) する球体を考えてみよう。

便宜上, この球体の中心を原点 O とし, 時刻 t における球体の半径を $R(t)$ とする。 $R(t)$ は時間 t のみの関数であり, 球体は形を保ったまま一様に膨張あるいは収縮するものとする。球体内の全質量は一定であり, 球体内の (質量) 密度 $\rho(t)$ は, $R(t)$ の増減にともない時間変化するがつねに一様である。宇宙膨張を簡潔に記述するため, ある時刻 (「現在」) $t = t_0$ における球体の半径を $R_0 (> 0)$ とし, 「スケール因子」を $a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$ と定義する。すなわち, 宇宙膨張とはスケール因子 $a(t)$ が単調増加する現象と考えることができる。

以下のすべての設問において, 時間 t の関数 $X(t)$ について, $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$, $\ddot{X} = \frac{d^2X}{dt^2}$ と略記する。

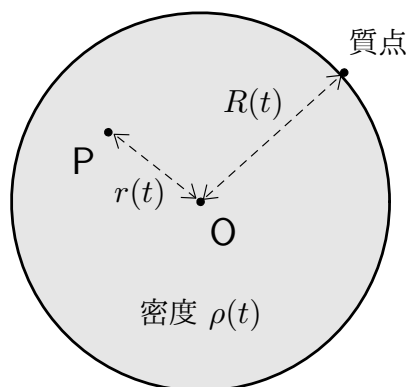


図 1. ‘球体’

問 1 時刻 t において中心 O から距離 $r(t) (\leq R(t))$ の位置にある点 P は, 球体の膨張あるいは収縮にともない, $r(t)$ と $R(t)$ の比を保ったまま運動する。 $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ と定義するとき, 時刻 t における点 P の速度 $v(t) = \dot{r}(t)$ を $H(t)$ と $r(t)$ を用いて表せ。

これは, 冒頭で述べた「ハッブル・ルメートルの法則」を表している。

問 2 ニュートンの万有引力の法則にもとづき、球体の表面に置かれた質点について、運動方程式と力学的エネルギー保存則を求め、

$$\ddot{a} = F(a), \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + U(a) = E \quad (\text{I.2})$$

と表した際の a の関数 $F(a)$, $U(a)$ を, $\rho_0 = \rho(t_0)$ や万有引力定数 G などを用いて表せ。(E は定数。また, ここでは $U(a)$ の原点を $\lim_{a \rightarrow \infty} U(a) = 0$ によって定める。) ただし, 球体表面の質点に働く万有引力は, 球体の全質量が中心 O に集中しているとみなして求めてよい。また, 式 (I.2) の両辺を t について微分し, 式 (I.1) と比較することによって, $F(a)$ と $U(a)$ の関係を求めよ。

このモデルでは, 宇宙膨張はつねに減速膨張 ($\ddot{a} < 0$) であることがわかる。

より厳密な宇宙論では, 一般相対性理論から導かれる「フリードマン (Friedmann) 方程式」を用いて宇宙膨張を調べる。フリードマン方程式は, $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ と宇宙の「エネルギー密度」(単位体積あたりのエネルギー) を関係づけ, スケール因子 $a(t)$ の時間変化を記述する方程式であり, ここで考えている素朴な宇宙膨張のモデルでは次のように書かれる;

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{1 - \Omega_m}{a^2} \quad (\text{I.3})$$

ここで, $H_0 = H(t_0)$ とおいた (「ハッブル定数」)。また, $\Omega_m (\geq 0)$ は $t = t_0$ における相対的なエネルギー密度を表す無次元の定数であり, 「密度パラメータ」と呼ばれる。右辺第 1 項はエネルギー密度 $\varepsilon(t)$ に比例する項であり, 第 2 項は宇宙の曲率 (‘曲がり具合’) の効果を表している。(方程式 (I.3) の左辺は $t = t_0$ のときに 1 になるため, 右辺第 2 項の係数はその事実と矛盾しないように選ばれている。)

現代の「観測的宇宙論」では H_0 や Ω_m などの定数を観測により決定することが重要なテーマとなる。ここでは, H_0 については遠方の銀河までの距離とその後退速度 (我々の銀河から遠ざかる速さ) の測定から決まる測定値を用い, 一方 Ω_m についてはパラメータとしてあつかうこととする。

問 3 問 2 で考えた力学的エネルギー保存則 (I.2) から, フリードマン方程式 (I.3) を再現することができる。式 (I.3) を問 2 の結果と比較することにより, $\rho_0 = A\Omega_m$ と表す際の比例定数 A を H_0 を用いて書き表し, さらに, 以下の数値のうち必要なものを用いて有効数字 2 桁で求めよ。 A の単位は kg/m^3 とする。

$$H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2.27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}, \quad 1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{22} \text{ m},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

(pc (パーセク) は宇宙物理学で標準的に用いられる距離の単位である。1pc は約 3.26 光年に等しく、天の川銀河における平均的な恒星間の距離がこの程度である。)

問 4 宇宙が始まった瞬間 (「ビッグバン」) を $t = 0$ とし、 $a(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} a(t) = 0$ とする。宇宙が永遠に膨張を続けると仮定するとき、フリードマン方程式 (I.3) を力学的エネルギー保存則 (I.2) と解釈することにより、密度パラメータ Ω_m が取り得る最大値 $\Omega_{m, \max}$ を求めよ。また、 $\Omega_m > \Omega_{m, \max}$ のとき、宇宙はある有限の時刻で膨張から収縮に転じることになり、その時刻でスケール因子は最大値 $a_{\max}$ を取る。 $a_{\max}$ を求め Ω_m を用いて表せ。

問 5 再び問 4 のように $t = 0$ をビッグバンの瞬間とし、 $\Omega_m = \Omega_{m, \max}$ の場合を考えよう。現在の時刻 t_0 は「宇宙年齢」と解釈されるが、 t_0 を H_0 を用いて表せ。さらに、問 3 で与えた H_0 の値を用いて、 t_0 の値を有効数字 2 桁で求めよ。なお、 t_0 の単位は年 (year) とし、

$$1 \text{ year} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$$

を用いよ。

問 5 で求められる t_0 の値は、現在宇宙年齢として広く受け入れられている値 (約 138 億年) よりもずっと小さな値である。宇宙論では光速に比べ速度が小さな質量がゼロでない粒子のガスを「物質」と呼び、[I] ではエネルギー密度として「物質」のみを含む宇宙モデル (「物質優勢の宇宙」) を考えていた。問 5 の結果から、このモデルは現実の宇宙を完全には記述していないと考えられ、現実の宇宙に「物質」以外のエネルギー密度も存在する可能性を示唆している。[II], [III] ではこの問題を考えてみよう。

[II] 宇宙加速膨張と暗黒エネルギー

[I] ではエネルギー密度として「物質」に由来する成分のみを扱ったが、圧力を持ち、膨張や収縮にともない仕事をする、より一般的なエネルギー密度の成分に対しては、フリードマン方程式は、 n をある定数、 Ω' をこの成分の密度パラメータとして、

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega'}{a^n} + \frac{1 - \Omega'}{a^2} \quad (\text{II.1})$$

と書かれる。すなわち、ここで考えているエネルギー密度 $\varepsilon(t)$ は、

$$\varepsilon(t) = A c^2 \frac{\Omega'}{a(t)^n}$$

と与えられる (A は問 3 で与えられている正の定数)。

再び宇宙膨張を記述し得る簡単な力学的モデルとして [I] で考えた半径 $R(t) = a(t)R_0$ の球体を考えよう。ただし、今度は一様な圧力が働いていると仮定する。宇宙膨張を断熱過程とみ

なすと、熱力学第一法則は、 p を圧力、 V を球体の体積、 $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \varepsilon V$ を球体内のエネルギー (ε はエネルギー密度) として、

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{tot}} + p \Delta V = 0 \quad (\text{II.2})$$

と表せる。ここで、 $\Delta \mathcal{E}_{\text{tot}}$, ΔV はそれぞれ球体内のエネルギー、体積の微小変化を表している。

問 6 式 (II.2) の両辺を微小時間間隔 Δt で割った後に $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ることで、エネルギー密度の時間変化率 $\dot{\varepsilon}$ を p , ε と $H(t)$ を用いて表せ。

宇宙論では、ここで得られる $\dot{\varepsilon}$ についての方程式を「流体方程式」と呼ぶ。

「物質」以外のエネルギー密度の代表例として、電磁波すなわち光子ガスがあり、宇宙論においては「放射」と呼ばれる。ここで、光子の個数密度 (単位体積当たりの個数) については、問 3 で考えた「物質」のエネルギー密度 ($\propto$ 質量密度) と同じ a 依存性を持ち、宇宙膨張にともない光子 (電磁波) の波長はスケール因子に比例して増大すると仮定する。この現象を宇宙膨張による「赤方偏移」と呼ぶ。

問 7 「放射」のエネルギー密度 ε_r のスケール因子 a に対する依存性を $\varepsilon_r \propto a^{-n}$ と表すときの n を求めよ。さらに、問 6 の結果を用いて、「状態方程式」を $p = w\varepsilon$ (w はある無次元の定数) としたときの w の値を求めよ。

問 8 観測事実により現在の宇宙は加速膨張をしていること ($\ddot{a} > 0$) が判明している。問 4 と同様にフリードマン方程式 (II.1) を力学的エネルギー保存則 (I.2) と解釈することにより、加速膨張が実現するために式 (II.1) の右辺の定数 n が満たすべき条件を求めよ。ただし、 $\Omega' > 0$ であるとする。また、状態方程式 $p = w\varepsilon$ において、上記の n の条件が満たされるための w の条件を求めよ。

宇宙加速膨張の発見は比較的新しく、20 世紀末頃である。この業績により、リース (A. G. Riess), シュミット (B.P. Schmidt), パールムッター (S. Perlmutter) の 3 氏が 2011 年にノーベル物理学賞を受賞している。このような加速膨張を引き起こすエネルギー密度を一般に「暗黒エネルギー」(dark energy) と呼ぶ。特に、 a 依存性をもたない定数であるエネルギー密度 (式 (II.1) で $n = 0$ の場合) は、歴史的な理由で「宇宙定数」と呼ばれ、暗黒エネルギーの代表例として知られている。宇宙定数以外の暗黒エネルギーを「quintessence」(第 5 の力) と呼ぶこともある。問 8 が示唆しているように、暗黒エネルギーとは負の圧力をともない、したがって断熱膨張するにつれてエネルギーが増加するという性質を持つ奇妙なエネルギー密度である。加速膨張の発見から、我々の宇宙には何らかの暗黒エネルギーが存在すると考えられるが、その正体は未だ不明である。

[III] 暗黒エネルギーとアインシュタインの静止宇宙

以下では、「物質」と(宇宙定数以外の)暗黒エネルギーが共存するケースの一例として、次のフリードマン方程式を考察しよう；

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_d}{a} + \frac{1 - \Omega_m - \Omega_d}{a^2} \quad (\text{III.1})$$

ここで、 Ω_m と Ω_d は、それぞれ「物質」と暗黒エネルギーの密度パラメータであり、 $\Omega_m > 0$, $\Omega_d > 0$ と仮定する。

問 9 フリードマン方程式 (III.1) を、問 4 と同様に力学的エネルギー保存則 (I.2) と解釈して関数 $U(a)$ を求め、そのグラフの概形を表せ。さらに、減速膨張 $\ddot{a} < 0$ から加速膨張 $\ddot{a} > 0$ に移行するスケール因子 a の値を a_c と定義するとき、 a_c と $U(a_c)$ の値を Ω_m , Ω_d などを用いて表し、 a_c の位置を描いたグラフに記せ。ただし、 $U(a)$ の原点は、 $\Omega_d = 0$ とおいたときに $\lim_{a \rightarrow \infty} U(a) = 0$ を満たすように定める。

問 10 現在の宇宙の加速膨張の程度を表す無次元の物理量として、 $q = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \Big|_{t=t_0}$ によって定義される「加速パラメータ」 q を観測によって決定することが重要であり、それによって現実の宇宙の密度パラメータへの知見を得ることができる。仮に $q = 0.3$ であるとし、 $\Omega_m + \Omega_d = 1$ (平坦な宇宙) を仮定するとき Ω_m と Ω_d の値を求めよ。

歴史的にアインシュタインが最初に提唱した宇宙モデルは、スケール因子 $a(t)$ が時間に依存しない静的な宇宙であった(「アインシュタインの静止宇宙」)。アインシュタインはこの宇宙モデルを実現するために宇宙定数を導入したが、ここではフリードマン方程式 (III.1) をもとに、上記の暗黒エネルギーの存在を仮定して静止宇宙解を求めてみよう。

問 11 静止宇宙解は、 t によらず $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ を満たすフリードマン方程式 (III.1) の解である。ただし、ここでは $a(t_0) = 1$, $H(t_0) \left(= \frac{\dot{a}}{a} \Big|_{t=t_0} \right) = H_0$ とは限らないとする。 $\Omega_m = 0.36$ とし、静止宇宙解が存在するときの Ω_d の値、および静止宇宙解を表すスケール因子の値 a_s を有効数字 2 桁で求めよ。

問 12 前問の静止宇宙解 $a(t) \equiv a_s$ からわずかに外れたとき、すなわち、ある時刻 t_1 において、 $a(t_1) \equiv a_s$, $a(t_1) \neq a_s$ とするとき何が起こるか考察し簡潔に説明せよ。もし必要であれば簡単な図などを用いて説明してもよい。

アインシュタインが静止宇宙解を考えたのは、ハッブルとルメートルによる宇宙膨張の発見よりも 10 年以上前であり、上でも述べたように、もともとアインシュタインが宇宙定数(暗黒エネルギーの一例)を導入した動機は、静止宇宙解を実現することにあった。この宇宙モデルは球面のような「形」を持ち、大変興味深いものであったが、宇宙膨張の発見によって現実

の宇宙には適合していないことが明らかとなった。こうしてアインシュタインが宇宙定数を導入した主たる動機は失われてしまい、長い間宇宙定数はそれほど注目されて来なかった。しかしながら、20 世紀末の宇宙加速膨張の発見により、宇宙膨張の言わば「加速源」として、宇宙定数、さらにはより一般の暗黒エネルギーの存在が脚光を浴びることとなったのである。