



一般的な指示: 理論試験 (30 点)

2025 年 5 月 8 日

理論試験は 5 時間、3 問で構成され、各 10 点、合計 30 点満点である。

試験前

- 試験開始を示す音の前に、問題の入った封筒を開けてはならない。
- 試験の開始と終了は音で知らせる。1 時間ごとに経過時間を示すアナウンスがあり、試験終了 15 分前（最終音の前）にもアナウンスがある。

試験中

- 解答を書くための専用の解答用紙が用意されている。最終的な解答は、対応する解答用紙の該当する欄に記入する（A マーク）。すべての問題には、詳細な作業を行うための白紙のワークシートが余分に用意されている（W とマークされている）。常に、現在取り組んでいる問題のワークシートを使用せよ（ヘッダーの問題番号を確認すること）。採点されたくないことを書いてしまった場合は、線で消すこと。すべてのページの表側のみを使用すること。
- 解答では、できるだけ簡潔な表現を心がけること。可能な限り、数式、論理演算子、スケッチを使って自分の考えを説明すること。長い文章の使用は避けること。
- 解答用紙には、主催者が用意した**ペンのみ**を使用せよ。
- 数字を記載する際には、適切な有効桁数を与えること。
- 前の問題を解いていなくても、後の問題を解けることはよくある。
- 許可なく作業ブースを離れることはできない。サポートが必要な場合（飲料水の補給、電卓の故障、トイレなど）は、チームガイドの注意を引くこと。

試験終了時

- 試験終了後、直ちに筆記を中止しなければならない。
- 表紙（C）、問題（Q）、解答用紙（A）、ワークシート（W）の順に並べ替える。
- 1 つのタスクのすべてのシートを対応する封筒に入れる。また、3 つの小さな封筒と一般的注意書（G）を大きな封筒に入れる。空白の用紙も提出すること。試験会場から用紙を持ち出すことはできない。
- 主催者が用意した電卓を持って行ってよい。
- 筆記用具を持って行ってよい。
- 封筒が回収されるまで自分の席で待つこと。封筒が回収されたら、ガイドが試験会場の外まで案内する。

地軸の歳差運動 (10.0 点)

はじめに

地球の自転軸が歳差運動をしていることは古くから知られている。つまり、黄道面に垂直な線、すなわち太陽の周りを回る地球の公転軌道を含む平面に垂直な線の周りを自転軸が回転している。古代ギリシャの天文学者ヒッパルコス、軸の年間角度変位は約 $45''$ (秒角) であると結論づけたが、これは回転軸の歳差運動の周期が 29000 年程度であることを意味する。現代の測定によると、その周期は約 25800 年である。この問題では、ニュートン力学を使ってこの現象を調べることが求められる。

以下の定数を用いてよい：

- 重力定数： $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
- 地球の平均半径 $R = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$
- 地球の質量 $M_E = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$
- 地球から太陽の平均距離： $d_{SE} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
- 太陽の質量： $M_S = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$
- 月の地球からの平均距離 $d_{ME} = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$
- 月の質量 $M_M = 7.348 \times 10^{22} \text{ kg}$
- 地球の軸の傾き： $\alpha = 23.5^\circ$

パート A：地球の形 (1.0 ポイント)

地球が非球形であるため、太陽と月が地球にゼロでないトルクを与え、自転軸の歳差運動が生じる。地球が非球形である主な理由は、地球の自転による遠心力である。地球の表面にある地殻プレートは、数百万年かけて変形し、地殻プレート内の応力を最小限に抑えている。したがって、近似的に、地球を遠心力と重力によって形状が決まる一様な密度の大きな液滴としてモデル化してみよう。このモデルでは、地球の表面は、極半径 R_p 、赤道半径 R_e (図 A.1 参照) を特徴とする扁球 (回転楕円体) である。

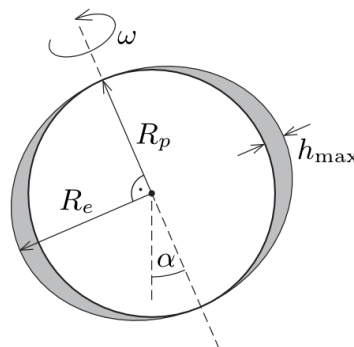


図 A.1. 地球の楕円体形状。極半径と赤道半径が示されている。 $\alpha = 23.5^\circ$ は地球の自転軸と黄道面の法線との間の角度。

地球の赤道半径と極半径の差 $h_{\max} = R_e - R_p$ は、平均半径 $R = (R_e + R_p)/2$ よりもはるかに小さい。無次元係数を別にして、 $h_{\max}$ の値は、地球の自転角速度 ω 、質量 M_E 、平均半径 R で次のように表すことができる。

$$h_{\max} \propto G^{-1} \omega^{\beta} M_E^{\gamma} R^{\delta},$$

ここで、 G は重力定数、 β 、 γ 、 δ は定数指数である。

A.1 指数 β 、 γ 、 δ の値を求めよ。

0.8 pt

A.2 上記の関係における無次元係数が 1 に等しいと仮定して、 $h_{\max}$ の数値を計算せよ。 0.2 pt

A.2. で $h_{\max}$ を計算できたかどうかにかかわらず、以下の問題では経験値 $h_{\max} = 21$ km を使用せよ。

パート B. 太陽の時間平均重力場 (3.2 点)

なぜ太陽が（地球の中心に対して）ゼロでないトルクを地球に及ぼすのか、下の図 B.1 で考えてみよう。太陽からの距離の違いによって、重力 F_1 はその相方 F_2 よりも大きくなる。

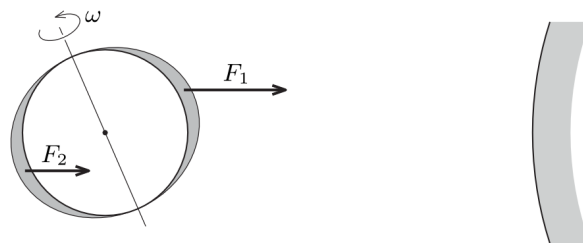


図 B.1. 太陽（図の右側）が地球（左側）に及ぼすゼロでないトルクの説明。

地球に作用するこのトルクの大きさは、1 年の間に連続的に変化する。図 B.1 に示す位置でトルクは最大となり、その 4 分の 1 年後には対称性のためトルクはゼロとなる。半年後、トルクは再び最大になり、4 分の 3 年後、再びゼロになる。軸歳差運動の周期は 1 年よりもはるかに大きいので、この時間依存トルクは 1 年間の平均値でよく近似できる。

太陽が地球に及ぼす平均トルクを計算するには、まず、地球近傍で太陽によって生成される重力場の時間平均を求めよう。この平均は、質量が太陽の質量に等しく (M_S)、半径が太陽と地球の平均距離 (d_{SE}) に等しい、一様密度の質量リング、太陽リングの重力場として計算できる (図 B.2 参照)。

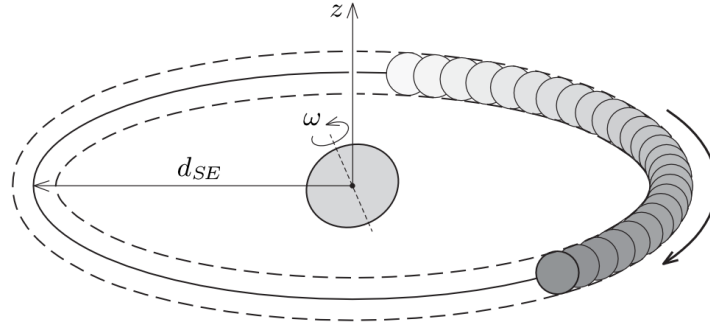


図 B.2. 時間平均は、半径 d_{SE} の円に沿って太陽を一様に広げることと等価である。

円筒座標系の原点を地球の中心とし、 z の軸を黄道面（すなわち太陽リングの平面）に垂直とする。地球の自転軸は、 z 軸と $\alpha = 23.5^\circ$ の角度をなす。

- B.1** z 軸上のある点で、太陽リングが発生させる重力場の方向と大きさを求めよ。答え 1.0 pt
は $M_S, d_{SE},$ 座標 z で書け。 $|z| \ll d_{SE}$ を仮定する。

- B.2** 原点からの距離が r である黄道面上の点で、太陽リングが発生させる重力場の方向 2.2 pt
と大きさを求めよ。 $r \ll d_{SE}$ を仮定する。

パート C. 地球に働くトルク (2.6 点)

ここでは、簡単のため、地球を均質な質量分布を持つ剛体と考える。回転楕円体は、地球の赤道半径 R_e を持つ球体から余分な部分を取り除いたものとして想像できることを考慮に入れよう（図 C.1 参照）。

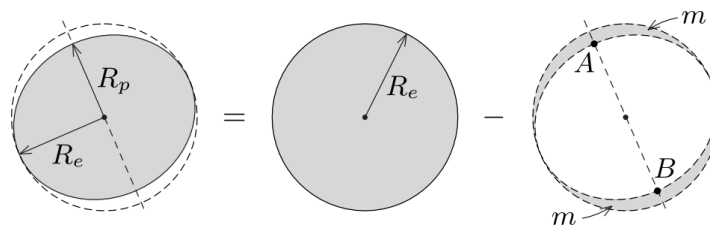


図 C.1. 地球の楕円体形状は、半径 R_e の完全な球体から余分な部分を取り除いたように想像できる。

- C.1** 図 C.1 に示された 2 つの過剰領域のうちの 1 つの質量 m を求めよ。答えは、 $h_{\max}$ 、 0.8 pt
地球の質量 M_E 、極半径 R_p で表せ。

余剰領域に作用するトルクは、極直径の端点 A と B に配置された、それぞれ $2m/5$ に等しい質量を持つ 2 つ

の点質量に作用するトルクと等価であることを示すことができる (図 C.1 参照)。

- C.2** この考え方から、太陽リングが地球に及ぼすトルク τ を求めよ。答えを M_E 、 M_S 、 d_{SE} 、 R (平均半径)、 $h_{\max}$ 、角度 α で表せ。 $h_{\max} \ll R$ を使うことができる。 1.8 pt

パート D. 地軸の歳差運動の角速度 (2.0 点)

地球の自転軸は、 z の軸の周りを非常にゆっくりと円錐運動をしている。つまり、歳差運動である。

- D.1** 地軸の歳差運動の周期 T_1 を表す式を与えよ。答えを M_S 、 d_{SE} 、地球の自転の角速度 ω 、 $h_{\max}$ 、 R 、 α で表せ。 1.8 pt

- D.2** 歳差運動周期 T_1 を年単位で計算せよ。 0.2 pt

パート E. 月の影響 (1.2 ポイント)

パート D で得られた値は、観測値よりもはるかに大きい。その理由は、これまでのところ、太陽が及ぼすトルクだけを考え、月の影響を無視してきたからである。以下の計算では、月の軌道が黄道面にあり、地球を回る月の軌道が半径 d_{ME} の円であると仮定する。月の質量を M_M とし、この修正モデルにおける歳差運動の周期を T_2 とする。

- E.1** 月が及ぼすトルクも考慮すると、地軸の歳差運動の周期は何倍 (T_2/T_1) に変化するか。 d_{ME} 、 d_{SE} 、 M_S 、 M_M を使って答えよ。 1.0 pt

- E.2** データを代入して、歳差運動の周期 T_2 を年単位で計算せよ。 0.2 pt

スピン系における波動と相転移 (10.0 点)

はじめに

古典物理学では、角運動量は、回転するコマ、回転する惑星、原子の軌道を回る電子など、軸を中心とした物体の運動から生じる。しかし量子物理学では、基本粒子はスピンと呼ばれる固有の量子化された角運動量を持っている。この性質は、磁性などの物質的性質から量子コンピューティングなどの現代的応用に至るまで、様々な物理現象において重要な役割を果たしている。

この問題ではスピンを古典的に扱い、定性的には正しい結果を導く。スピン-スピン相互作用、磁場下での運動、統計物理学を通してスピン系の物理を探索し、磁石におけるスピン波や相転移の出現を理解する。

有用な情報：

$\cosh(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $|x| \ll 1$ においては、 $\tanh(x) \equiv \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \approx x - \frac{1}{3}x^3$ と近似できる。

モーメント $\vec{\mu}$ の磁気双極子から $\vec{r}$ 離れた位置での磁場は次式で与えられる (μ_0 は真空の透磁率)：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right) \quad (1)$$

パート A：磁気双極子の歳差運動と相互作用 (1.2 点)

半径 R 、全質量 M 、電荷 $Q > 0$ が一様に分布したリングを考える。リングは質量中心を通る垂直軸の周りを角速度 ω で回転する。

- A.1** リングの磁気モーメント $\vec{\mu}$ は角運動量 $\vec{L}$ を用いて $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$ のように書くことができる。この系の磁気回転比 (ジャイロ磁気係数) と呼ばれる定数 γ を、 Q と M を用いて求めよ。 0.3 pt

リングは弱い一様磁場 $\vec{B} = B\hat{z}$ の中に置かれ、 $\vec{\omega}$ と角度 θ をなす (図 A.1 参照)。

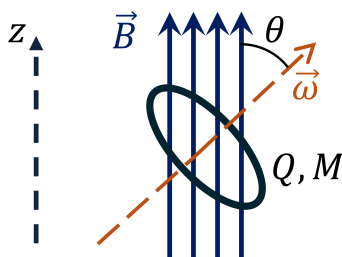


図 A.1.

- A.2** 外部磁場による角運動量歳差運動の角周波数 ω_L （いわゆるラーモア周波数）を B と γ を用いて表せ。正の方向を $+z$ に対して反時計回りとする。 0.4 pt

ここで外部磁場をオフにして、新しいリングの磁気モーメント $\vec{\mu}_2$ が $\vec{\mu}_1$ と角度 θ をなすように、元のリングから水平距離 $d \gg R$ のところに同じリングを配置する（図 A.2 参照）。

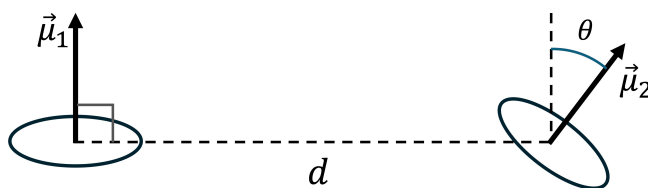


図 A.2.

- A.3** 2つのリングの間の磁気相互作用エネルギーは $U = J_0 \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$ と書ける。ここで、 J_0 は定数、 $\vec{L}_i$ は i 番目のリングの角運動量である。 γ, d と基本定数を用いて、 J_0 を求めよ。 0.5 pt

パート B. スピン波 (4.5 点)

以下ではスピンのダイナミクスを調べる。スピンとは、固有の角運動量 $\vec{S}$ を持つ粒子であり、パート A.1 と同様に磁気回転比を介して $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ で決まる磁気モーメント $\vec{\mu}$ を持つ。

2つのスピンの磁気双極子は互いに相互作用する。しかし、この相互作用は、古典系には存在しない量子力学的な起源から生じる別の相互作用に比べれば無視できる。興味深いことに、この量子相互作用のエネルギーは、**A.3 部**で見いだしたのと同じ形をしており、 $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ に比例するが、符号は逆である。

次に、非常に長いスピンの鎖を考えよう。図 B.1 のように、スピンの位置は x -軸に沿って固定され、互いの距離は a である。最近接スピン間の相互作用のみを考慮することで、系の全エネルギーを次のように近似する。

$$E = -J \sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$$

ここで、 $J > 0$ は相互作用の強さ、 $\vec{S}_i$ は i 番目のスピンの角運動量ベクトルで、大きさは S である。スピンベクトルは 3 次元空間で自由に回転する。エネルギーの符号が前のパートと異なることに注意せよ。この相互作用は純粋に量子力学的なものである。

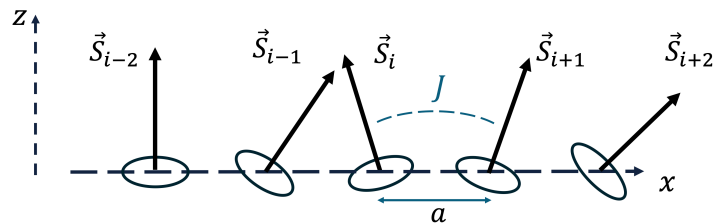


図 B.1.

- B.1** 全エネルギーの中で $\vec{S}_i$ を含むエネルギー項は、有効磁場 $\vec{B}_{i,\text{eff}}$ と $\vec{S}_i$ の磁気モーメントとの間の相互作用エネルギーと見なすことができる。 $\vec{B}_{i,\text{eff}}$ を求め、その答えを J 、ジャイロ磁気比 γ 、および他のスピン $\vec{S}_j$ (添字 j は i との関係を示すこと) を用いて表せ。 0.3 pt

- B.2** 有効磁場の概念を用いて、 i 番目のスピンベクトルの変化率 $d\vec{S}_i/dt$ を、 $J, \vec{S}_i$ と他のスピン $\vec{S}_j$ (添字 j は i との関係を示すこと) で表せ。 0.3 pt

パート B の残りの部分では、系が z 方向に強く磁化されていると仮定する。そのため、図 B.2 のように、各スピンに対して近似値 $S_{i,z} \approx S$ と $dS_{i,z}/dt \approx 0$ を使用する。この前提のもとでは、スピンの時間発展を記述する方程式のセットは、波数ベクトル k と角周波数 ω によって特徴づけられる $S_{i,x}$ と $S_{i,y}$ の進行波解によって満たされる。

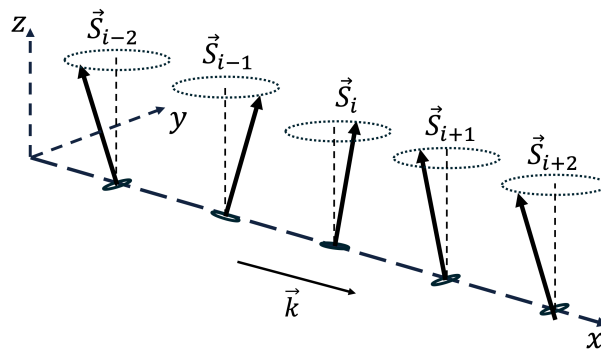


図 B.2.

- B.3** J, S と a を用いて、スピン波の ω と k の関係 (分散関係として知られる、 $\omega(k)$) を求めよ。ヒント: i 番目のスピンの位置を $x = a \cdot i$ として表現する。 2.0 pt

上記のスピン波はエネルギーと運動量を運ぶ。低エネルギーでは、そのエネルギーと運動量の関係は、有効質量 m_{eff} の古典粒子での関係に似ており、準粒子としてとらえられる。

- B.4** 小さい k ($k \ll 1/a$) について、スピン波の有効質量 m_{eff} を求めよ。答えを J, S, a と 0.6 pt
基本定数で表せ。

スピン波は、中性子非弾性散乱を用いて実験的に調べることができる。中性子は正味の電荷はゼロだが、有限のスピンを持っており、他のスピンと相互作用することができる。

- B.5** 初期状態では鎖のスピンはすべて z 方向を向いているとする。図 B.3 に示すように、低エネルギーの中性子が鎖との入射角 θ_{in} で $x-y$ 平面上を進み、角度 θ_{out} で散乱する。中性子が 1 つの低い波数ベクトルのスピン波を励起すると仮定して、スピン波の有効質量 m_{eff} を、 $\theta_{\text{in}}, \theta_{\text{out}}$ と中性子の質量 m_n を用いて求めよ。ただし、鎖は静止していると仮定する。 1.3 pt

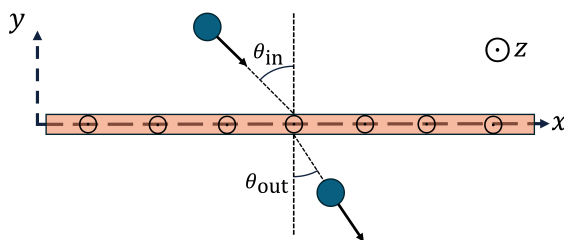


図 B.3.

パート C. スピン鎖の相転移 (4.3 点)

次に、スピンベクトルが z -軸に沿って上下どちらかを指すように制限されていることを除いて、パート B と同じ N スピンからなる鎖を考える。 z に沿ったスピン成分は $S_{i,z} = s_i S$ 、ここで $s_i = \pm 1$ 、図 C.1 を参照せよ。最近接相互作用に加えて、 z -軸に沿った外部磁場があり、系の全エネルギーは次式で与えられる。

$$E = -\tilde{J} \sum_i s_i s_{i+1} - h \sum_i s_i.$$

$\tilde{J} \geq 0$ を仮定し、 h は外部磁場に依存する定数である。スピン系は温度 T の熱浴と平衡にある。鎖の端は無視する。

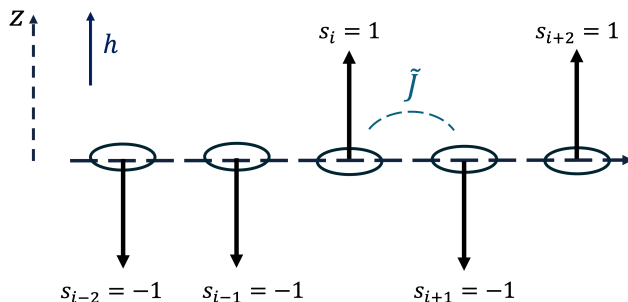


図 C.1.

- C.1** まず、 $\tilde{J} = 0$ とし、あるスピンの磁場の方向を向いている確率 $p_{\uparrow}$ と、磁場と逆方向を向いている確率 $p_{\downarrow}$ の比を求めよ。 $p_{\uparrow}/p_{\downarrow}$ を h, T と基本定数で表せ。 0.5 pt

- C.2** h, T および基本定数を用いて、 $N \gg 1$ に対する系の平均磁化 $\bar{s} \equiv \frac{1}{N} \sum_i s_i$ を求めよ。磁場 h が $-h_0$ から h_0 の範囲にある場合、 $h_0 \gg k_B T, h_0 \approx k_B T, h_0 \ll k_B T$ のそれぞれのケースについて、 h の関数として $\bar{s}$ のスケッチを作成せよ。 1.0 pt

残りの質問では、磁場をオフにするので、 $h = 0$ として $\tilde{J} > 0$ とせよ。

- C.3** 基底状態（最もエネルギーの低い状態）のエネルギー E_g を求めよ。答えを $\tilde{J}$ と N で表せ。 0.2 pt

各スピンとその両隣りのスピンとの相互作用を考える代わりに、各スピンはその近傍の平均磁化 $\bar{s}$ と関係つける。

- C.4** 系のエネルギーを全スピンの和を用いて以下のように近似する。 0.2 pt

$$E = -\tilde{J}_{\text{eff}} \sum_i s_i$$

$\tilde{J}_{\text{eff}}$ を $\tilde{J}$ と $\bar{s}$ で表せ。

- C.5** **C.2** の結果を用いて、平均磁化 $\bar{s}$ が満たすべき方程式を求めよ。この方程式の解の数は T に依存する。解の数が増える臨界温度 T_c を求めよ。答えを $\tilde{J}$ と基本定数で表せ。 1.2 pt

- C.6** $T < T_c$ および $T_c - T \ll T_c$ のとき、 $\bar{s}$ のすべての可能な値を求めよ。答えを T と T_c で表せ。温度 T が $0 \leq T \leq 2T_c$ の範囲にあるときの $\bar{s}$ のすべての可能な値を求めよ。 1.0 pt

- C.7** $T > T_c$ の場合に物質のどの磁気相に対応するか、常磁性か強磁性のどちらかを選べ。 $T < T_c$ の場合についても、常磁性か強磁性のどちらかを選べ。 0.2 pt

大気物理学（10.0 点）

地球の大気は複雑な物理システムであり、その挙動を予測することは、環境学や気象学の目的において極めて重要である。しかし、現代のコンピュータ上で実行される最高の理論モデルでさえ、正確な予測を行うには不十分である。この問題では、簡単なモデルに基づいて基本的な大気現象の理解を試みる。次の定数が必要かもしれない：地球における単位面積当たりの平均太陽エネルギー強度、全太陽放射照度 $F_s = 1370 \text{ W/m}^2$ 、水のモル質量 $\mu_{\text{H}_2\text{O}} \approx 18 \text{ g/mol}$ 、空気の平均モル質量 $\mu_{\text{air}} \approx 29 \text{ g/mol}$ 。この問題の気体はすべて理想気体として扱うことができる。すべての空気分子が5つの自由度を持つと仮定する。次の積分が必要かもしれない。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

パート A：地球の表面温度（1.2 ポイント）

このセクションでは、大気が地表の温度に与える影響を調べる。地球とその大気のアルベド、全入射日射の反射率は $a = 0.3$ であると仮定する。この値をこの問題のすべてのパートで使用してもよい。さらに、地球は黒体として放射すると仮定する。

- A.1** 地球と大気のシステムが受け取る平均正味太陽エネルギー強度 P_0 を、 F_s, a と R_E (地球の半径) で表せ。 0.2 pt

- A.2** 地表が入射太陽放射と黒体としての放射で定常状態にあると仮定して、地表の温度 T_{g0} を推定せよ。大気は無視する。 0.3 pt

A.2 の答えは、予想よりも低くなるはずである。次に、図 A.1 のように、温度 T_a の薄い大気層を追加することを考える。この大気層は、入射太陽放射の一部（割合 t_{sw} ）と地球の熱放射の一部（割合 t_{lw} ）を透過する。それ以外では、大気を黒体として扱ってよい。

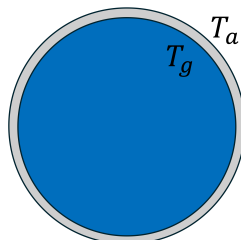


図 A.1

- A.3** システムが定常状態にあると仮定して、地面の温度 T_g を計算せよ。 $t_{\text{sw}} = 0.9$ と $t_{\text{lw}} = 0.2$ を使用せよ。 0.7 pt

パート B. 大気ガスの吸収スペクトル (1.8 ポイント)

地球が放射する赤外線はエネルギーが低く、分子内の電子を励起することはできないが、分子の振動モードや回転モードを励起する能力がある。

- B.1** 単純な二原子分子を、バネ定数 k を持つバネで結ばれた 2 つの点質量 m_A と m_B と 0.5 pt
してモデル化した場合を考える。振動の角周波数 ω_d を求めよ。

- B.2** 量子力学は、光子の吸収による振動励起は量子エネルギー準位を 1 つだけ上げることができると定めている。**B.1** の振動を励起できる光子のエネルギー E_p を求めよ。反跳効果は無視せよ。 0.2 pt

量子力学は、窒素や酸素（地球の大気中に最も多く存在する気体）のような対称的な二原子分子の振動モードが光によって励起されることを禁じている。このことは、 N_2 や O_2 が温室効果に寄与しない理由を説明している。一般に、分子による光の吸収は、分子内の許容エネルギー遷移によって支配される。しかし、吸収される光のエネルギーは、分子のエネルギーギャップと正確に一致する必要はない。静止状態の分子が、周波数 f_o にスペクトル線（許容遷移）を持っているとする。

- B.3** 分子が発光体に向かって速度 $v \ll c$ で移動している場合、スペクトル線のシフト $f - f_o$ を求めよ。 c は光速である。 0.2 pt

温度 T の気体では、分子の速度はマクスウェルの分布に従う。質量 m の分子の場合、1 次元に沿った分子の速度が v と $v + dv$ の間にある確率は $p(v)dv$ で、 $p(v)$ は次式で与えられる確率分布関数である。

$$p_1(v) = C \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

C は確率の合計が 1 になることを保証する規格化定数であり、 k_B はボルツマン定数である。

- B.4** 速度 v が $-\infty$ から $+\infty$ の範囲にあると仮定して、規格化定数 C を求めよ。 0.2 pt

- B.5** 熱運動によりスペクトル線 f_o が f にシフトした分子を見つける確率分布関数 $p_2(f)$ を、 f, f_o, T, m と基本定数を用いて表せ。規格化定数は求めなくてよい。 0.3 pt

- B.6** $f - f_o$ の関数として $p_2(f)$ をスケッチし、 $p_2(f^*)$ がそのピーク値の $1/e$ となるシフト $f^* - f_o$ を決定せよ（ e はオイラー定数）。 0.4 pt

パート C：大気中の空気の安定性 (2.7 ポイント)

地上から高さ z にある小さな円筒形の空気の塊を考える。その高さにおける空気の圧力と質量密度はそれぞれ $p(z)$ と $\rho(z)$ である (図 C.1 参照)。一様な下方重力場 g があり、地表での圧力が p_o であるとする。

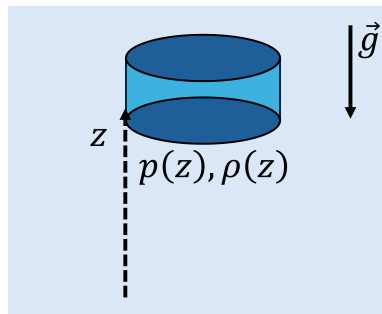


図 C.1

C.1 小さな空気の塊が静水圧平衡にあると仮定して、高さに対する圧力の変化率 dp/dz を g と $\rho(z)$ の式で導け。 0.3 pt

C.2 dp/dz を $\mu_{\text{air}}, g, p(z)$ と $T(z)$ 、高さ z での温度と基本定数で表せ。 0.2 pt

C.3 等温大気を仮定し、 $T(z) = T$ 、 $z, \mu_{\text{air}}, g, p_o, T$ と基本定数から、 $p(z)$ の式を求めよ。 0.2 pt

実際の大気では、温度は一定ではなく、高さによって変化する。高さに伴う温度の減少率 $\Gamma(z) = -dT/dz$ は、気温低減率と呼ばれる。大気中を断熱的に上昇する小さな空気の塊が、周囲と力学的平衡を保つとする。

C.4 断熱的に上昇する空気塊について、断熱的気温低減率 Γ_a を、 c_p (定圧でのモル比熱)、 μ_{air} および g を用いて求めよ。 0.6 pt

大気の安定性を分析するには、平衡状態から出発して、小さな空気の塊を摂動し、その反応を分析することを想像する。最初は高さ z 、温度 T で周囲の空気と平衡状態にある小さな空気の塊を考える。その後、断熱的に鉛直方向に変位 δz_0 だけ動かす。この運動中、空気塊は常に同じ高さの周囲の空気と同じ圧力を持つと仮定する。周囲の大気は変化せず、異なる気温低減率 Γ を持つ。粘性は無視する。

C.5 瞬間的な鉛直方向の移動 δz の運動方程式を求めよ。 z の平衡はどのような条件で安定か？小さな振動の角振動数 ω は？答えを $T, \Gamma, g, \mu_{\text{air}}$ と c_p で表せ。 1.4 pt

パート D 水分 (2.7 点)

大気中に占める水の割合は小さいが、水は気候科学において重要な役割を担っている。水は降水の原因であり、最も重要な温室効果ガスである。水の相は、水系がどのような温度と圧力にあるかによって決まり、図 D.1 ($p - T$) の相図に描かれている。圧力と温度が共存曲線上にあるとき、系には液体の水と水蒸気の両方が存在する。共存曲線の傾きは、クラウジウス-クラペイロンの式で与えられる：

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

ここで、 p_s は飽和圧力、相転移点の圧力、 ΔS と ΔV はそれぞれ相転移に伴うエントロピーと体積の変化である。水蒸気を理想気体として扱う。

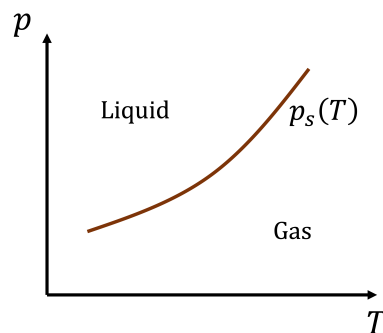


図 D.1

D.1 水の液体と水蒸気の共存曲線の dp_s/dT を、水の蒸発潜熱 L , $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$, p_s , T と基本定数 で表せ。 0.5 pt

D.2 ある基準温度 T_o において $p_s = p_{so}$ とする。 $p_s(T)$ を、 p_{so} , $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$, L , T , T_o と基本定数 を用いて、表せ。 0.2 pt

ここで、温度 T_i から断熱的に上昇する「湿った」空気塊を考える。水蒸気の質量混合比（全質量に対する水蒸気の質量）は ϕ である。空気塊が定圧モル熱 c_p を持つとする。気体定数は、 $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol K})$ である。

D.3 空気塊は $T_i = 17.0^\circ\text{C}$ 、 $p_i = 10^5 \text{ Pa}$. から始まると仮定する。 $\phi = 10^{-2}$ の場合、その中で液体の水が形成され始める温度 T_l を求めよ。空気塊中の含水量は上昇中一定であると仮定する。 $T_i = 17.0^\circ\text{C}$ では $L = 2460 \text{ kJ/kg}$ 、 $p_{so} = 1.94 \times 10^3 \text{ Pa}$ とせよ。 2.0 pt

パート E 太陽ハロー (1.6 ポイント)

適切な大気条件下では、太陽の周りに明るいリングが現れ、これはハローと呼ばれる。ハローは対流圏上層部に存在する氷の結晶によって引き起こされる。ハローの興味深い特徴の一つは、太陽の方向に対して常に特定の角度で現れることである。

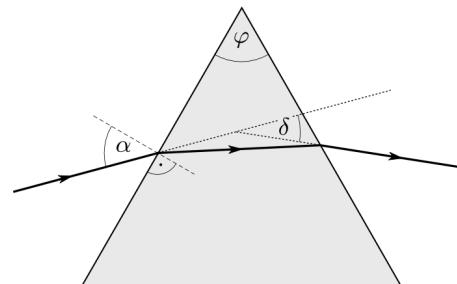


図 E.1. 左側：太陽の周りのハローを示す写真。右側：プリズムを通過する光線の経路。

- E.1** 図 E.1 に示すように、頂角 ϕ の単純なプリズムを考え、そこに入射角 α で光線を当てて。プリズムの屈折率を n とする。プリズムを通過した後の光線の偏角 δ を、 α, n, ϕ の関数として表せ。 0.8 pt

最も一般的なハローは、小さな氷の結晶が正六角柱の形になることで形成される。太陽からの光は、大気中を漂うランダムな向きの氷の結晶に降り注ぎ、さまざまな方向に散乱する。しかし、ある特定の方向では屈折した光の強度が最大となり、これによって明るいリングが現れる角度が決まる。

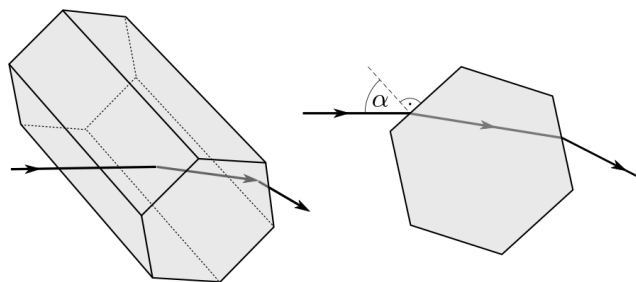


図 E.2.

六角形の氷のプリズムを考えよう。六角形の対称軸は、太陽の光線の方向に対して垂直とする。図 E.2 に示すプリズムの 2 つの長方形の面を屈折する光線を調べてみよう。氷の結晶の向きがランダムであるため、光はさまざまな入射角 α で結晶面に入射する。

- E.2** 光線の偏角 δ が、区間 $[20^\circ, 70^\circ]$ 内の入射角 α にどのように依存するかを、 5° 刻みで解答用紙にプロットせよ。氷の屈折率は $n=1.31$ である。 0.6 pt

Theoretical Exam



APhO

Asian Physics Olympiad

Dhahran - Saudi Arabia 2025

Q3-6

Japanese-Theory-Main (Japan)

E.3 前問のグラフを使って、太陽の方向に対してハローが最も明るく見える角度を決定せよ。 0.2 pt