

地球の磁場測定 (10 points)

イントロダクション

この問題の目的は、地球の磁場（磁界）の水平成分を測定することである。この磁場を測定する前に、まず、いわゆるグーイの磁気天秤を使って磁石の特性を調べる。

問題全体において、不確かさは個々の実験値からではなく、グラフのフィッティングから求めよ。

実験装置のリスト

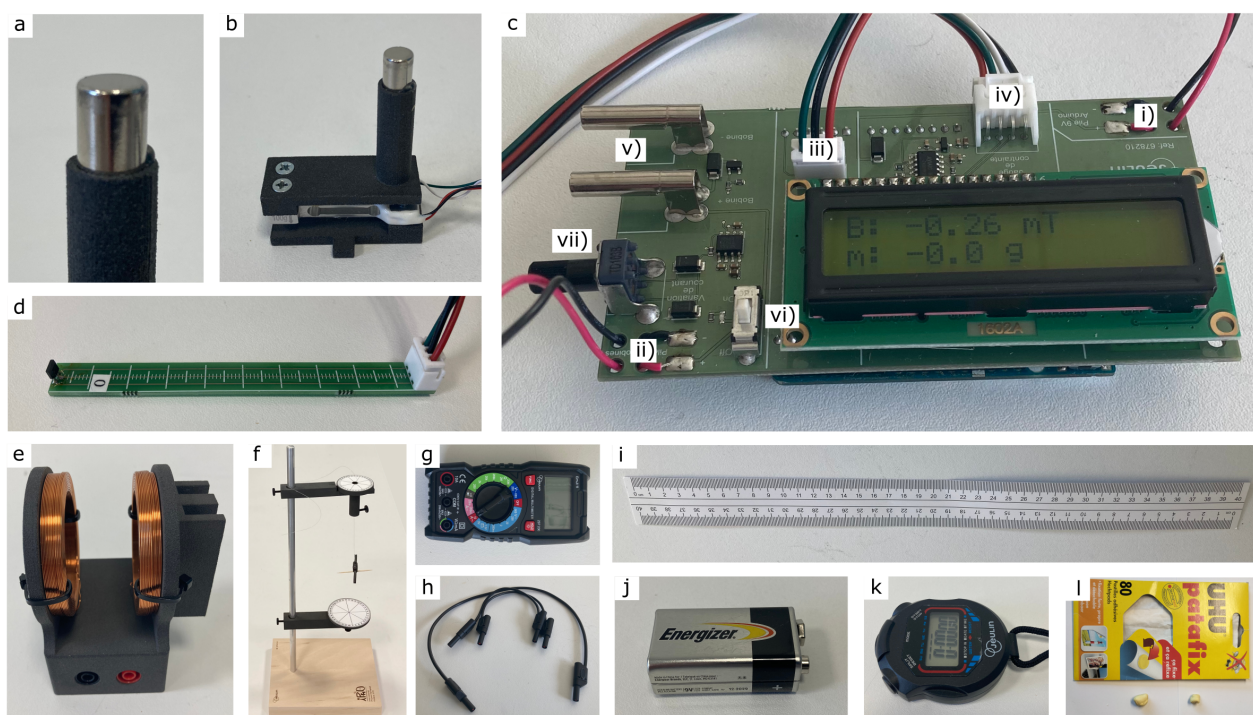


図 1. 全実験装置の写真。

実験装置のリストを以下に示し、写真を図 1 に示す。部品の数が多い場合は、その数が [] 内に示されている。何かがうまく機能していないように思える場合には、助けを求めよ。

- (a) 磁石 [3]。1つの磁石は力センサー (b) に取り付けられており、取り外してはならない。もう1つの磁石はポッド (f) に挿入されており、指定されるまで取り外してはならない。最後の磁石は A.5 で使用する。磁石はすべて同じと考える。
- (b) 力センサー。Arduino マイコン (c) に接続されたこのセンサーは、軸に沿った力を測定する (m_f)。単位はグラム重 ("g") であり、重力場 ($g_0 = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) の下で地表にある 1 グラムの質量が受ける力である。このセンサーには磁石 (a) が 1 つ取り付けられている。スイッチを入れ直すたびに、センサーの表示は状況に関係なく 0 にリセットされる。このセンサーには 200g を超える荷重をかけてはいけない。開梱する際には十分注意すること。
- (c) デジタルディスプレイ付き Arduino マイコン。この機械は、コイル (e) に電力を供給し、力と磁場の測定を行うために使用され、それぞれをグラム重 ("g") と mT の単位で直接表示する。Arduino マイコンに電力を供給する電池 (j) はスロット (i) に、コイル (e) に電力を供給する電池 (j) はスロット (ii) に接続する必要がある (接続するときには、極性に注意すること)。力センサー (b) と磁場センサー (d) はそれぞれスロット (iv) と (iii) に、コイル電源ケーブルはスロット (v) に接続する。スイッチ (vi) はコイル供給回路 (LED で表示) を閉じ、その電流は (vii) で制御できる。

- (d) 定規付き磁場センサー。Arduino マイコン (c) に接続し、定規の方向 ($\vec{e}_z$) に沿った磁場 (B_z) を mT 単位で測定する。
- (e) 反ヘルムホルツ構成 (互いに逆向きに巻かれている) のコイル。これらのコイルを電流計 (g) と Arduino マイコン (c) に直列に接続して磁場を作る必要がある。
- (f) 木製の土台の上に金属製のスタンドがあり、磁石 (a) が最初に挿入される吊り下げ式ポッドと、角度マーカーが付いている。この装置の詳細な組み立て方は下で説明する。
- (g) マルチメーター。10A レンジの電流計としてのみ使用する。使用しないままにしておくと、マルチメーターの電源が切れるので、「OFF」の位置に戻して電源を入れ直す必要がある。マルチメーターのケースに付属している 2 本のケーブルは使用しない。
- (h) 導線 [3]。
- (i) 40 cm 定規。
- (j) 9V 電池 [3]。その容量は、300 mA・h のオーダーである。
- (k) ストップウォッチ。
- (l) 接着剤。問題全体で用いることができる。 粘着性のあるペーストもしくはパテ

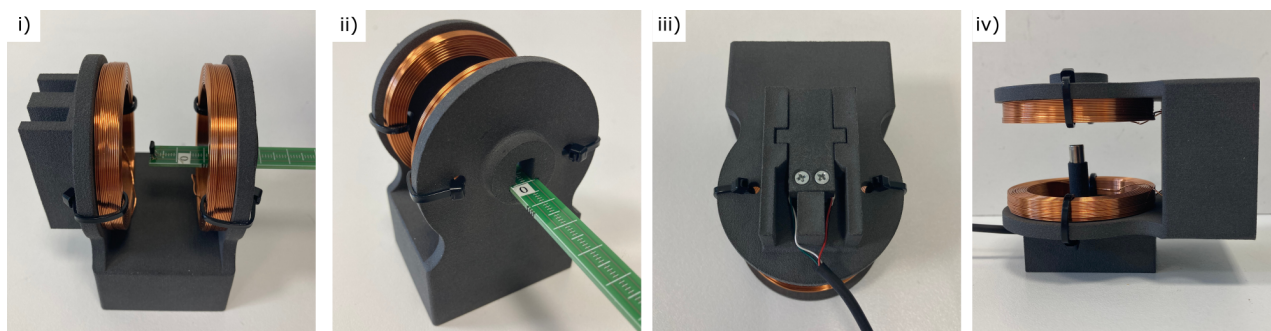


図 2. 反ヘルムホルツ・コイル内部のセンサーの使用。

Arduino マイコンに取り付けられたセンサーの使用法 (図 2)

磁場センサー (d) は図 2(i) に示すようにコイル (e) 内をスライドさせ、その軸上の磁場を測定することができる。センサーの $z = 0$ の位置は図 2(ii) に示されており、コイル内を移動するにつれて z が増大する。

力センサー (b) は図 2(iii) のようにコイルに挿入してから、図 2(iv) のようにコイルを回転させ、力センサーが鉛直になるようにする。その際、電気配線は必ず付けられている溝を通すこと。

実験装置 (f) の設置 (図 3)。 34 cm の長さのワイヤーを使用し、パート B を開始する直前に取り付けること。

- 金属製の支柱 (f0a) をプラスチック製の脚 (f0b) 付きの木製プレートに差し込み、スタンド (f0) を作製する。
- 部品 (f1) は下部に取り付け、ポッドの角度をマークする。アーム (f1b) をネジ (f4) で金属の支柱に取り付け、部品 (f1a) をもう一つのネジ (f4) で固定する。
- 部品 (f2) は上部に取り付け、ポッドを支えるワイヤーを保持する。アーム (f2b) をネジ (f4) で金属の支柱に取り付け、その上に部品 (f2a) を差し込む。
- ポッド (f3) を作るには、磁石 (a) がすでに挿入されているキャリア部品 (f3a) に慣性バー (f3b) と爪楊枝 (f3c) を挿入する。ポッドを支えるワイヤーを部品 (f2a) に挿入し、ネジ (f4) で固定する。部品 (f2a) を回すと、ワイヤーを取り付ける角度が変わる。爪楊枝でポッドの角度位置を正確に測定できる。

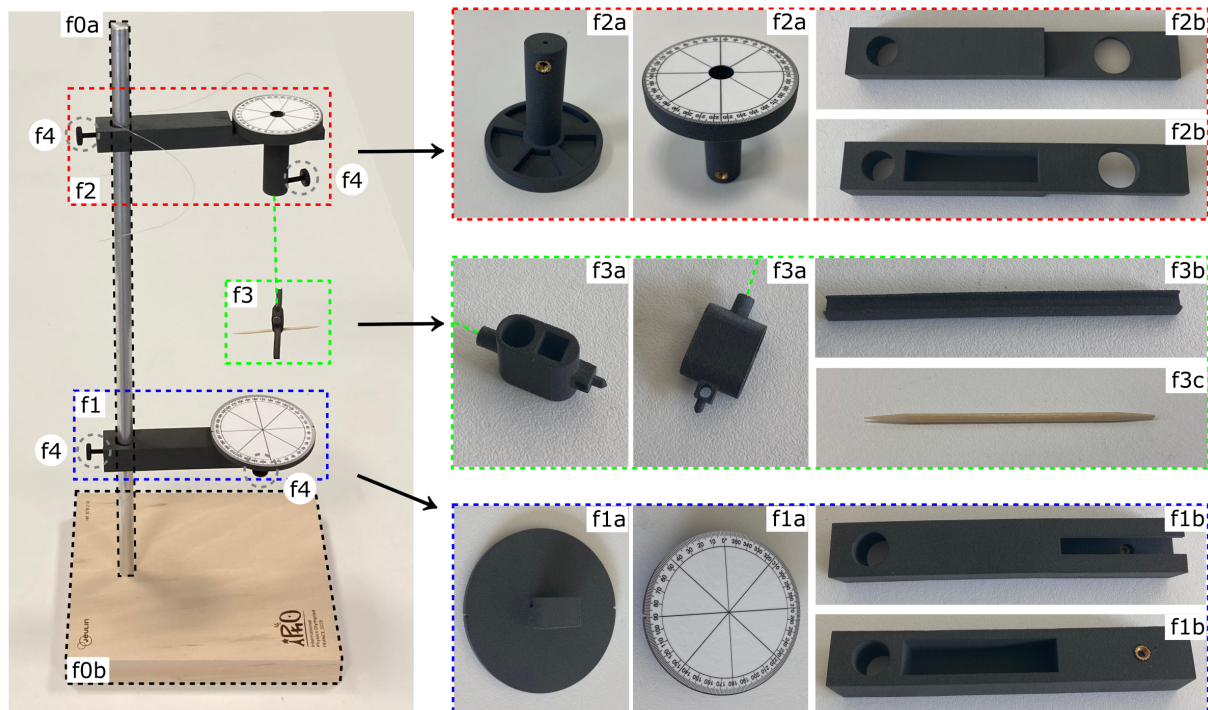


図 3. 金属製スタンドへのポッドの取り付け。部品 (f1a)、(f1b)、(f2a)、(f2b)、(f3a) については、2 つの異なる角度から示している。また、同じプラスチック製ネジ (f4) が 4 つある。

Part A. グーイの磁気天秤と磁気モーメント

モデル化

磁石は磁気モーメント $\vec{m}_m$ の磁気双極子として扱うことができると仮定する。このようなモーメント $\vec{m}_m = m_m \vec{e}_z$ の双極子が磁場 $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$ の中で受ける力は次のように書ける。

$$\vec{F} = m_m \frac{dB(z)}{dz} \vec{e}_z. \quad (1)$$

電流 i が反ヘルムホルツ・コイルに流れると、その回転対称軸 $\vec{e}_z$ 上の磁場 $\vec{B}$ は次のようになる。

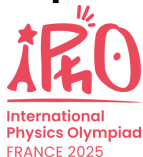
$$\vec{B}(z) = \alpha i (z - z_0) \vec{e}_z. \quad (2)$$

この式は装置の中心付近でのみ有効であり、中心の位置は $z = z_0$ である。

コイルの中の磁場

- A.1** 実験で使用する 1 個の電池について、電流が 2A のオーダーのときの典型的な動作時間 τ を数値的に見積もれ。 0.2pt

Experiment



Q1-4

Japanese (Japan)

後で実験手順を考える際、コイルがパート A でのみ使用されることを考えた上で、この結果を考慮に入れなければならない。必要であれば予備の電池が提供される。

図 2 に示すように、磁場センサーをコイルに挿入する。コイル内のセンサー位置の特定についても、図 2 を参照すること。

- A.2** 一定の電流 $i_0 \approx 1.0\text{A}$ において、磁場 B_z をコイルの軸上のセンサーの位置 z の関数として測定し、グラフを描け。この実験において磁場が位置に対して直線的に変化する最大の領域 $[z_{\min}, z_{\max}]$ を求めよ。 0.8pt

- A.3** この線形の依存性を持つ領域内の 2 つの位置 (z_1, z_2) にセンサーを配置することにより、式 (2) で与えられる $\vec{B}$ の電流に対する依存性を検証するためのグラフを描き、 α の値を不確かさを含めて決定せよ。 0.9pt

グーイの磁気天秤

コイルから磁場センサーを取り外し、図 2 のように力センサーを内部に慎重に配置する。特に、溝の中の電気配線の配置に注意すること。

- A.4** グラム重単位の力 m_f を電流 i の関数として実験的に測定せよ。磁石の磁気モーメント m_m の値を、その不確かさとともに決定するための適切なグラフを描き、 m_m の値を求めよ。 0.8pt

磁気モーメントの代わりにの測定方法

双極子近似では、磁気モーメント m_m の磁石の回転対称軸 z 軸上での磁場は次のように書ける。

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 m_m}{2\pi(z - z_a)^3}, \quad (3)$$

ここで、 z_a は必ずしも磁石の幾何学的中心ではない。また、 $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ である。

- A.5** 自由な磁石の回転対称軸に沿った磁場 B_z を、距離 z の関数として測定せよ。式 (3) で与えられたモデルを検証するためのグラフを描き、その実験的なずれを示せ。 m_m の新しい値を不確かさを含めて求めよ。 1.3pt

- A.6** A.4 と A.5 で得られた 2 つの結果から、 m_m の最終的な実験値をその不確かさを含めて提案せよ。 0.2pt

Part B. 地球の磁場の決定

モデル化

ここで、地球磁場の水平成分 B_e の値を推定するために、水平面内での磁石の振動運動を調べる。図 3 および図 3 の上の組み立て説明書を参照せよ。磁石の入ったポッド (f3) は、垂直軸の周りのトルク（力のモーメント）を 2 つ受ける：

- ワイヤーからの力のモーメントは、 $\Gamma_f = -\frac{C_f}{L}(\theta - \theta_0)$ とモデル化する。ここで、 C_f は定数、 L はワイヤーの 2 つの取り付け部分の間の長さ、 θ_0 はワイヤーがねじられていない状態を 0 とする角度である。

- 地球磁場の角度が θ_e で与えられるとき、地球磁場による力のモーメントは、 $\Gamma_e = -m_m B_e \sin(\theta - \theta_e)$ で与えられる。

ポッドと磁石アセンブリの垂直軸周りの未知の慣性モーメントを J とすると、角運動量の定理を用いて、回転の運動方程式は次のようになる。

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_f + \Gamma_e = -\frac{C_f}{L}(\theta - \theta_0) - m_m B_e \sin(\theta - \theta_e). \quad (4)$$

$\sin(\theta - \theta_e) \simeq \theta - \theta_e$ の近似が有効な場合、周期 T の正弦的な調和振動が発生する。この Part では、接着剤 ペースト (I) を任意の形状やサイズに成形して、他のデバイスに接着可能である。

注意 外部磁場による妨害を避けるため、磁石は金属物や磁気源（他の磁石を含む）から少なくとも 20cm 離して設置する必要がある。

実験のセットアップと最初の実験

粘着性のあるペーストもしくはパテ

質問 B.1～B.5 では、ワイヤーの長さを $L = 34\text{ cm}$ とし、ワイヤーがねじれていないことを確認せよ。この設定では、初めに、ワイヤーからの力のモーメントは地球の磁場からの力のモーメントに対して無視できると仮定せよ。

θ_0 を θ_e に合わせるために、ピース (f2a) を使って θ_0 を調整し、磁石を取り外してもポッド (f3) が回転しないようにせよ。その後、磁石をポッドに再び挿入し、B.5 まで θ_0 を変化させないこと。

B.1 B_e を決定するための実験手順を提案せよ。測定するさまざまな物理量とその単位を書け。これらの物理量を詳細な模式図に描き、指示で与えられた物理量と式で関連付けよ。各物理量について、それが実験手順全体を通して固定 (F) させるか変化 (V) させるかを明記すること。 0.3pt

B.2 上述の実験手順を用いて、 B_e の最初の値を決定するためのグラフを描き、不確かさを含めて求めよ。 1.1pt

ワイヤーからの力のモーメントの評価

B.3 $L = 34\text{ cm}$ を保持したまま、磁石のないポッドの運動を調べ、2 回の周期測定を使用して、実験的な不確かさを含めて C_f の値を決定せよ。 C_f と測定した物理量との関係式を明らかにせよ。 0.7pt

B.4 これまでの測定値を用いて、 Γ_f 中の C_f/L と Γ_e 中の $m_m B_e$ が等しくなる臨界長 L_c の式を導き、数値を求めよ。B.2 では、比 $(C_f/L)/(m_m B_e)$ は何だったか？[A, B]が、A 以上 B 未満であることを表すとして、[0%, 1%];[1%, 5%];[5%, 20%];[20%, 50%];[50%, ∞%]の中から選べ。 0.3pt

静的な状態の測定

ここで、静的な地球磁場の測定を提案する。磁石をポッドに再び挿入せよ。図 3 の部品 (f2a) を使って角度 θ_0 を調整せよ。これでワイヤーがねじられる。

B.5 $L = 34 \text{ cm}$ をまだ固定したままで、磁石の平衡位置 θ_{eq} が角度 θ_0 にどのように依存するかを調べるために、適切なグラフを描き、 B_e の 2 番目の値を、その不確かさを含めて決定せよ。 1.1pt

B.6 ワイヤーからの力のモーメントの L 依存性を検証するために、長さ L を変化させ、他の 2 つの長さについて上と同じ測定を繰り返せ。すべての依存関係をまとめた最終的なグラフを使用して、 B_e の新しい値を、その不確かさを含めて決定せよ。 2.3pt