

砂のクレーターと砂丘 (10.0 点)

NASA の探査車スピリット (図 1.(a)) は、火星の地質と水の存在の可能性を調査するため、2004 年に火星に着陸した。着陸地点 (図 1.(b)) は大小さまざまなクレーターに囲まれている。探査中、探査車は火星の砂丘にはまらないようにしなければならない。

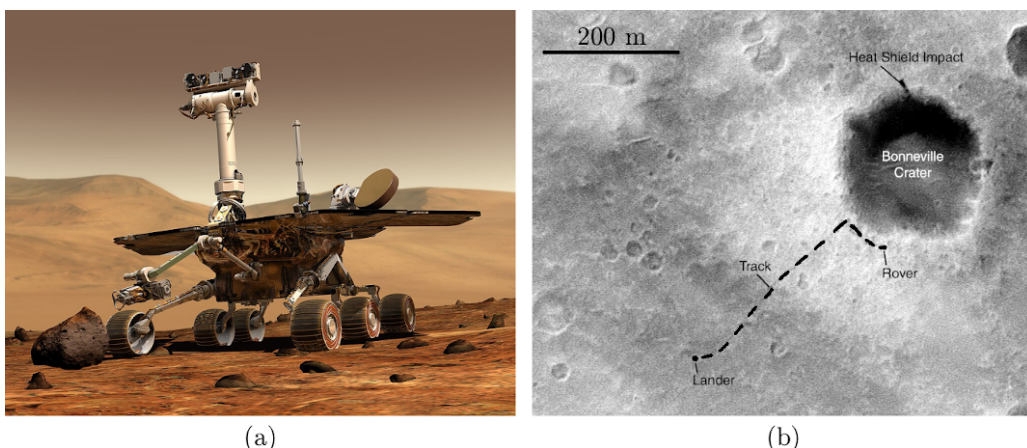


図 1. (a) スピリットの想像図。 (b) 火星着陸地点。スケールバーは 200 m を表す。

この問題には 2 つの独立した部分 A (クレーター形成) と B (砂の捕捉) があり、どのような順番で答えても構わない。機材のリストを以下に示し、図 2 に写真を示す。

- (a) プラスチック製の箱 箱は実験中にあふれた砂を集めるのに使うため空にしておくこと。
- (b) ボウル
- (c) 砂の入った瓶
- (d) 容器に入れてある 6 個の鋼球。ボールの直径は 4 種類あり、一番小さい 3 つは同じ大きさである。
- (e) 巻尺
- (f) ゴム足付き木製トレイ (f1)、クランプスクリュー (f2)、水平ロッド (f3)、垂直ロッド (f4) からなる保持装置。各要素は写真のように組み立てなければならない。
- (g) ふるい：小さなボールが砂の中に紛れ込んでしまったときに、それを見つけるために使う。
- (h) アルミニウム製レール、長さ 1m
- (i) ブラシ 必要であればレールとボールの砂を落とすために使う
- (j) 木製のトラック
- (k) ストップウォッチ
- (l) 接着パテ
- (m) 最後に砂を箱に戻すのに使う扇形
- (n) スプーン
- (o) 定規

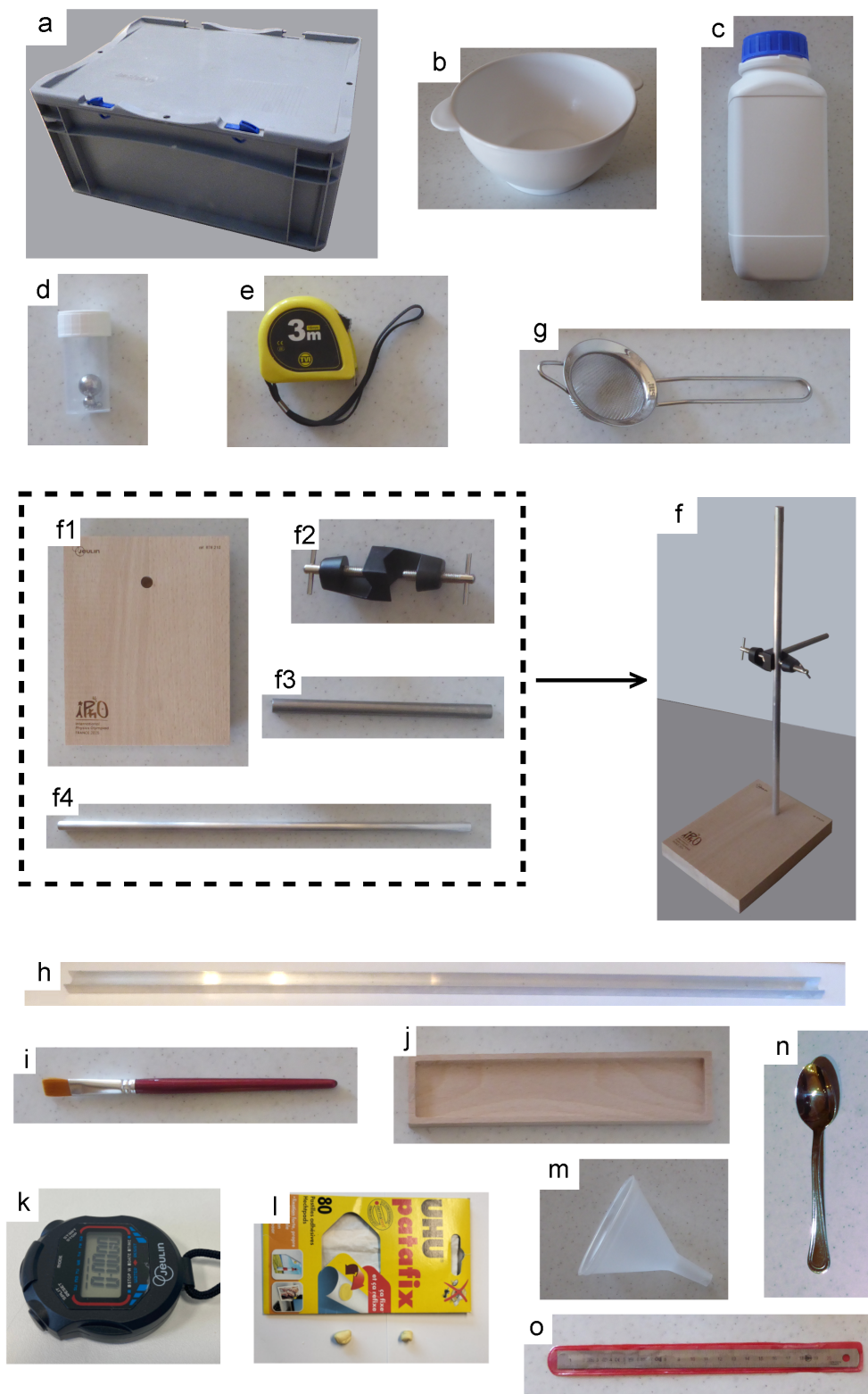


図 2. 全機材の写真

A. 衝突クレーター

火星のクレーターは、直径 D が約 10m から数百 km まで様々で、隕石の衝突によって生じる。衝突のパラメータである衝突体の直径 d 、エネルギー E に、 D がどのように依存するかを予測するさまざまなモデルがある（図 3）。

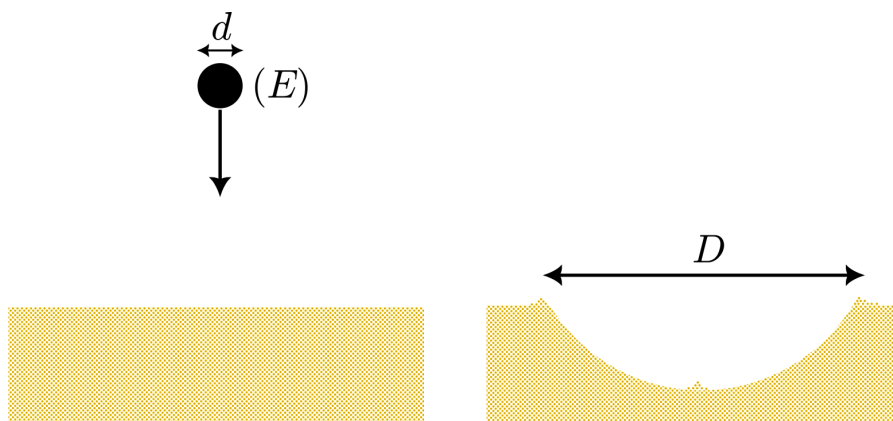


図 3. クレーターの形成

モデル 1: D は衝突体の直径 d にのみ依存するとするもの。

$$D = c_1 d, \quad (1)$$

ここで c_1 は E にも d にも依存しない無次元数である。

モデル 2: 隕石のエネルギー E は衝突の間に体積的な変化の過程を通して変換されるとするもの。このモデルでは、 D は $E^{1/3}$ に比例すると予測される。

$$D = c_2 E^{1/3} \quad (2)$$

ここで c_2 は E にも d にも依存しないパラメータである。

モデル 3: E はクレーター外への物質放出に使われるとするもの。

この仮定では、

$$D = c_3 E^{1/4}. \quad (3)$$

ここで c_3 は E にも d にも依存しないパラメータである。

ここでは、3つのモデルを比較するために、cm スケールでのクレーター形成実験を行う。直径 d と質量 m の異なる剛球（密度 $\rho_a = 7.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ）（機材リスト (d)）を隕石とした。

ボール #1	$d_1 = 2.0 \text{ mm}$	$m_1 = 0.033 \text{ g}$
ボール #2	$d_2 = 5.0 \text{ mm}$	$m_2 = 0.51 \text{ g}$
ボール #3	$d_3 = 9.0 \text{ mm}$	$m_3 = 3.0 \text{ g}$
ボール #4	$d_4 = 16.0 \text{ mm}$	$m_4 = 17 \text{ g}$

砂 (c) を入れたボウル (b) を、余分な砂を集めるのに役立つ空のプラスチック箱 (a) の中に入れる。ボウルを砂で完全に満たし、定規 (o) で慎重に表面を摺り切って平らにする。ボールをボウルの上から落とすには、棒と蝶ネジが付いたスタンド (f) を使います。このスタンドは、ボールをボウルの真上で放すためのガイドとして使い、また、巻尺 (e) を使って、表面からの落下高さ h を測定する。

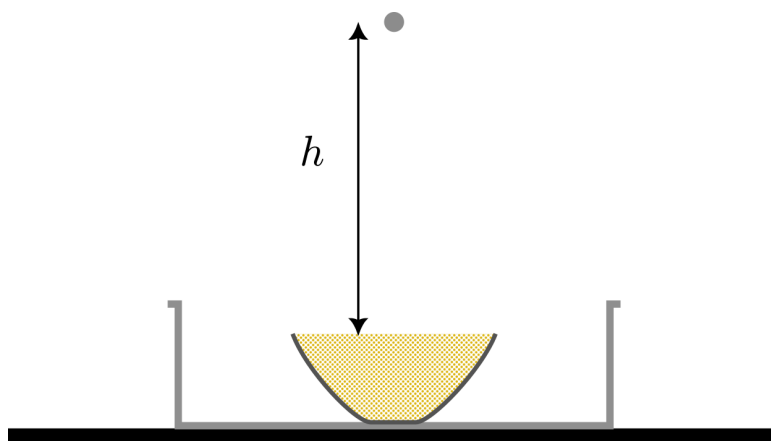


図 4. クレーター形成実験のセットアップ

ボール #3 を高さ $h = 50 \text{ cm}$ から落とし、形成されたクレーターの直径 D を測定する。この実験を 5 回繰り返さない。各衝突の後、スプーン (n) で砂を混ぜ、注意深く定規で摺り切って水平にする。必要に応じて、ふるい (g) を使って、砂の中に紛れ込んだボールを見つけなさい。

A.1 結果を表にして、 D をその不確かさとともに評価しなさい。

0.6pt

落下中、空気による抗力は次の式で与えられる。

$$F = \frac{1}{8} \pi d^2 \rho_0 C_x v^2 \quad (4)$$

ここで v はボールの速度、 $\rho_0 \approx 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ は空気の密度。 C_x は 1 のオーダーの無次元の係数である。

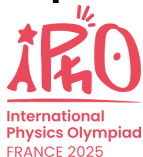
空気による抗力は、ボールが最大落下高さ $h_{\max}$ よりも低い高さから落下する場合には無視できる。ここで、空気による抗力が重力の大きさの 10% 以下である最大の高さを $h_{\max}$ とする。

A.2 最大落下高さ $h_{\max}$ の理論式を決定せよ。利用可能な 4 種類のボールについて $h_{\max}$ を数値的に計算しなさい。

0.5pt

序論で示した 3 つのべき乗則を比較するために、 D と E の関係を実験的に調べる。実験したエネルギーの範囲で指数が変化するかどうかを調べる。そのためには、異なる高さからボールを落として一連の測定を行う。広範囲のエネルギーをカバーしなければならない。**A.2.** で確立した条件を満たしつつ E が高い値になる

Experiment



Q2-5

Japanese (Japan)

ために、ボールを落とす高さは $h = 2\text{m}$ まで取ることができる。各パラメータについて実験は2回だけ行い、 D の平均値を求めよ。

A.3 測定したボールの質量 m 、落下高さ h 、衝突エネルギー E 、およびクレターの直径 D を表に示しなさい。 1.7pt

A.4 結果をグラフ（対数または方眼）にプロットせよ。モデル1、2、3に対応する3本の線を加えよ。3つの理論モデルのうち、実験結果に最も良く一致するのはどれか。 1.2pt

B. 砂地での転がりと泥沼化

着陸から5年後、探査機スピリットは火星の砂丘の砂に埋まった。砂の中での転がりは、砂粒の運動が多くのエネルギーを散逸させるため、特にデリケートである。ここでは、砂の中を転がるボールのブレーキを調べる。最初は静止しているボールを、角度 θ で傾斜したレールの上で加速させ、次に砂のベッドの上で減速させる。

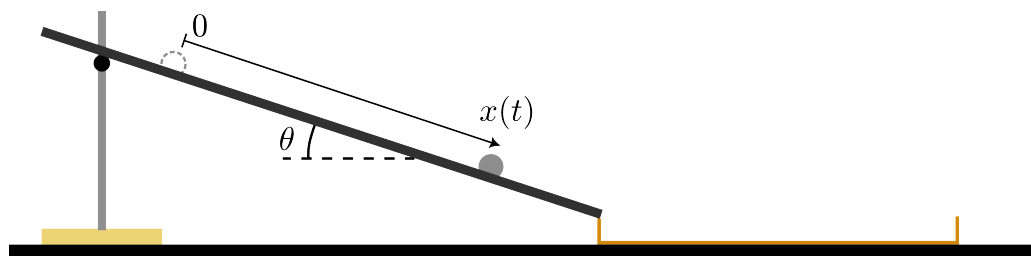


Fig. 5. 傾斜レール (h) と木製トラック (j) の組み合わせ

レールに沿ったボールの動き

ボール #4 は、 x -軸の原点 ($x = 0$) として選ばれたレール (h) 上の任意の点から、初速なしで静かに放出される (図5)。レールに沿ってボールの位置を $x(t)$ とする。質量 m 、直径 d のボールの中心を通る軸に対する慣性モーメントは $J = md^2/10$ で与えられる。角速度 ω で回転しながら速度 v で移動するボールの運動エネルギー K は次式で与えられる。

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2. \quad (5)$$

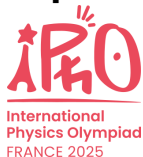
ボールはレール上を滑ることなく転がり、エネルギー散逸は無視されると仮定する。

B.1 $x(t)$ を t , θ および g で表しなさい。 0.4pt

レール (h) の一端は木製トラック (j) の端に置かれ、この時点ではトラックには砂がない。レールのもう一方の端は、水平に対して傾斜角度 $\theta = 5^\circ$ となるようにスタンド (f) で支えるように慎重に調整する。レールは接着パテ (l) で (両側とも) 固定する。

ストップウォッチ (k) を使って、ボールがレールに沿って距離 $l = 50\text{cm}$ を移動するのにかかる時間 t_{50} を測定する。

Experiment



Q2-6

Japanese (Japan)

B.2 5回の測定を行い、その結果を示し、統計的不確かさの桁も示せ。

0.7pt

少なくとも8個の異なる値の ℓ について t を測定し、統計的不確かさとともに示しなさい。

B.3 結果を表にまとめなさい。

0.8pt

B.4 問B.1で示された法則を確認するために、結果をプロットしなさい。定数 g の実験的推定値とその不確かさを求めなさい。

1pt

砂の中のボールの動き

ここで、 ℓ はボールがレール上を移動した距離である。砂の上では、ボールは L (図6を参照)の距離を移動した後には停止する。

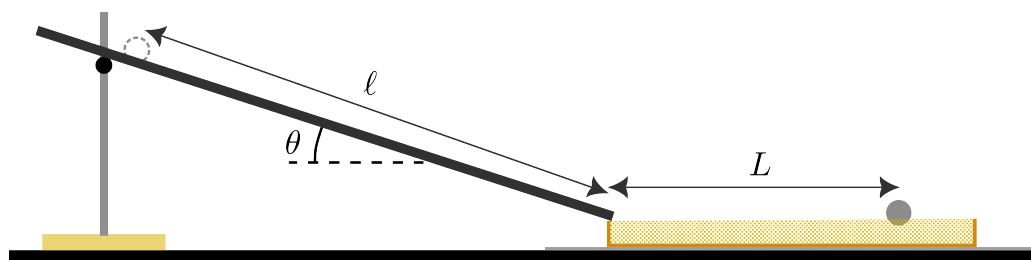


図6. 距離 ℓ 間での加速と、停止するまでの距離 L

L の区間では、抗力(T)によって減速される。この抗力には2つの原因が考えられる：

- モデル #1 (固体摩擦)：相対運動する2つの固体の間で、ボールは砂による一定の抗力 $T = -\mu_{\text{eff}} mg$ を受ける。ここで、 μ_{eff} はボールと砂の接触の有効抗力係数、 m はボールの質量である。
- モデル #2 (流体抗力)：抗力はボールの速度に比例する。 $T = -kv$ 。ここで、 k は定数、 v は速度の大きさである。

ここでの目標は、観測されたブレーキ挙動を最もよく説明する法則を決定することである。

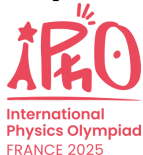
ここで、砂場中を動くボールは質点としてモデル化します。レールの傾斜角が小さい場合は、レールから砂場に落ちる際のエネルギー損失は無視する。2つの状況(固体摩擦または流体抗力)のそれぞれにおいて、 L と ℓ を結びつける理論法則を導きたい。この2つから、指数 α が2つの異なる値をとる $L \sim \ell^\alpha$ の形のべき乗則が導かれる。

B.5 モデル #1 とモデル #2 について、 L と ℓ 、 α の値の関係を示しなさい。

0.6pt

木製トラック (j) を紙の上に置く。トラックに砂を入れ、定規で丁寧に表面を平らにし、均一でなめらかな表面を作ります。砂を圧縮しないように注意する！レールの角度を再度慎重に調整し、 $\theta = 5^\circ$ とする。ボール #4 ($d_4 = 16.0 \text{ mm}$) を傾斜レールから放し、レールの移動距離が $\ell = 50 \text{ cm}$ になるようにします。

Experiment



Q2-7

Japanese (Japan)

各走行の前に、砂をかき混ぜ、再度砂を平らにしてください。ブラシ (i) を使ってレールとボールの砂を落とす。実験の最後に、扇型 (m) を漏斗代わりにして、余分な砂を瓶に戻す。

B.6 ボールが止まるまで砂の中を移動した距離 (L_{50}) を測定する。 L_{50} およびその不確かさを決定するために、数回 (少なくとも 5 回) の測定を行いなさい。 0.8pt

B.7 $\theta = 5^\circ$ を維持しつつ、少なくとも 8 個の異なる値の ℓ について L を測定した後、 L を ℓ の関数としてプロットし、どのモデルが抗力 T を最もよく記述しているかを結論づけなさい。 1.5pt

B.8 選択したモデルに基づいて、抗力 T を特徴付ける係数 μ_{eff} または k の値を指定しなさい。 0.2pt