

水素と銀河（10 点）

この問題は、銀河のダイナミクスや構造といった銀河特有の物理を調べることを目的としている。特に、我々自身が銀河系の中に居ながら、銀河系内の質量分布を測定する方法を説明する。そのために、銀河の主成分である水素に注目する。

この問題では、 $\hbar = h/2\pi$ として定義される $\hbar$ を使う。

パート A - イントロダクション

ボーア模型

水素原子は陽子とその周りを非相対論的に円軌道運動する質量 m_e の電子で構成されると仮定する。

A.1 半径 r の円軌道における電子の速度 v を求めよ。 0.2pt

ボーア模型では、電子の角運動量 L は、整数 $n > 0$ を使って $L = n\hbar$ と量子化されていると仮定する。

また、 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$ と定義する。

A.2 各円軌道の半径は $r_n = n^2 r_1$ で与えられることを示せ。ここで r_1 はボーア半径と呼ばれる。 r_1 を、 α 、 m_e 、 c 、および $\hbar$ によって表し、その数値を求めよ。半径 r_1 の軌道上の速度 v_1 を、 α と c を用いて表せ。 0.5pt

A.3 半径 r_n の円軌道上の電子の力学的エネルギー E_n を、 e 、 ϵ_0 、 r_1 、および n によって表せ。基底状態での E_1 を、 α 、 m_e 、および c によって表せ。また、その数値を eV の単位で求めよ。 0.5pt

水素の微細構造と超微細構造

水素原子1個あたり1000万年に1度というほど稀にしか起きないが、電子のスピンが自発的に反転により、光子が放出される。この放射は宇宙における水素のトレーサーとして機能するため、天体物理学の基礎となっている。この放射を引き起こす遷移を2つのステップに分けて調べよう。

まず、電子のスピンと電子と陽子の相対運動との相互作用を考える。電子から見ると、陽子は電子の周りを半径 r_1 で回っている。これにより磁場 $\vec{B}_1$ が発生する。

A.4 電子の位置における磁場 $\vec{B}_1$ の強度 B_1 を、 μ_0 、 e 、 α 、 c 、および r_1 を使って表せ。 0.5pt

第二に、電子のスピンは磁気モーメント $\vec{\mathcal{M}}_s$ を生成する。その大きさはおよそ $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$ である。微細 (F) 構造は、磁気モーメント $\vec{\mathcal{M}}_s$ が $\vec{B}_1$ に平行な電子と、反平行な電子とのエネルギーの差 ΔE_F に関係している。同様に、超微細 (HF) 構造は、電子と陽子の平行・反平行磁気モーメント間の相互作用によるエネルギー差 ΔE_{HF} に関係している。 ΔE_{HF} は、 m_p を陽子の質量として、 $\Delta E_{HF} \approx 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ であることが分かっている。

A.5 ΔE_F を、 α と E_1 の関数として表せ。超微細構造の2つの状態間の遷移に対応する波長 λ_{HF} を表し、その数値を有効数字2桁で求めよ。 0.5pt

パート B - 銀河の回転曲線

データ

- キロパーセク: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- 太陽質量: $1 M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

中心を点 O とする球状の銀河を考える。任意の点 P において、 $\rho = \rho(P)$ を体積あたりの質量密度、 $\varphi = \varphi(P)$ を重力ポテンシャル（つまり、単位質量あたりのポテンシャルエネルギー）とする。 ρ と φ は、ともに $r = \|\vec{OP}\|$ にのみ依存する。ポテンシャル場 φ のもとで、 P に位置する質量 m の質点は O を含む平面上を運動する。

- B.1** 円軌道の場合について、点 P における質量 m の質点の速度 v_c を、 r と $\frac{d\varphi}{dr}$ によつて表せ。 0.2pt

図 1(A) は、渦巻銀河 NGC 6946 の可視域での写真である（アリゾナ州マウント・レモン スカイ・センターの 0.8m Schulman 望遠鏡による）。図 1(B) の丸印は、この銀河の v_c の測定値である。中心領域 ($r < 1 \text{ kpc}$) はバルジと呼ばれ、この領域では、質量分布はほぼ均一である。赤で示した曲線は、バルジでは均一な質量分布で、その外側での運動はケプラー的 ($\beta > 0$ として、 $\varphi(r) = -\beta/r$)、つまり銀河の全質量がバルジに集中しているとした場合の v_c の予測値である。

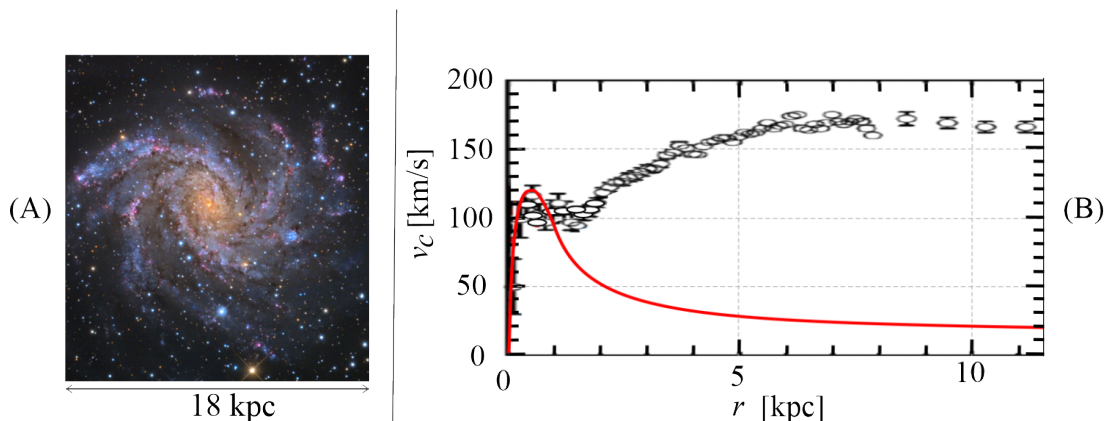


図 1: NGC 6946 銀河：写真 (A) と回転曲線 (B)。

- B.2** 図 1(B) の赤で示した回転曲線から、NGC 6946 のバルジの質量 M_b を太陽質量単位で求めよ。 0.5pt

バルジの重力によるケプラー運動を仮定したモデルと観測データを比較することで、天文学者たちは、質量の一部は写真では見えていないのだと確信している。そこで天文学者たちは、銀河の実際の質量密度は次の式で与えられると仮定した：

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

ここに $C_m > 0$ と $r_m > 0$ は定数である。

- B.3** 式1の質量密度に対応する速度プロファイルは $v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan(\frac{r}{r_m})}{r}}$ と書ける 1.8pt
ことを示せ。 k_1 と k_2 を, C_m , r_m , および G で表せ。

(ヒント: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, および $x \ll 1$ では $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$)

$r \ll r_m$ の場合および $r \gg r_m$ の場合について, $v_{c,m}(r)$ を簡略化せよ。

$r \gg r_m$ の場合, 式1で与えられる質量密度を持つ半径の球内の質量 $M_m(r)$ は単純化されて, C_m と r だけに依存することを示せ。

図1(A)の写真に実際に存在する銀河 NGC 6946 の質量を推定せよ。

パート C - 銀河系の質量分布

渦巻き銀河の場合, 式1のモデルは修正され, 重力ポテンシャルは $\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$ で与えられると考える。ここで, z は銀河面 ($z=0$ と定義する) までの距離, $r < r_0$ は軸半径, $\varphi_0 > 0$ は決定されるべき定数である。

- C.1** このようなポテンシャル場における質量 m の質点の鉛直運動について, r が一定であると仮定して, z についての方程式を求めよ。 $r < r_0$ の場合, 銀河面は安定平衡であることを, 平衡状態からわずかにずれた振動数 ω_0 の微小振動のを考えることによって示せ。 0.5pt

ここからは, $z=0$ として考える。

- C.2** $r \gg r_m$ または $r \ll r_m$ のいずれかの場合には, 式1のモデルは, 適当な φ_0 のもとに $\varphi_G(r, 0)$ の形のポテンシャルになる。この条件では, $v_c(r)$ は, もはや r に依存しない。このことを φ_0 を用いて示せ。 0.6pt

したがって, バルジの外側では, 速度 v_c は銀河系中心までの距離に依存しない。天文学者たちがしている様に, この事実を利用して, 銀河系自身の中に居ながら, 銀河系内の質量分布を求めてみよう。

観測対象としてここで考えている, 星やガス雲などの銀河系内の天体は, 水素を主成分としている。バルジの外側では, これらは銀河中心 C を中心とする円軌道を回っていると仮定する。 S は太陽の位置, E は水素のスペクトルを発している天体の位置である。銀河面において, 観測の方位に対応する視線 SE を考え, その方向の単位ベクトルを $\hat{u}_v$ とする (図2 参照)。

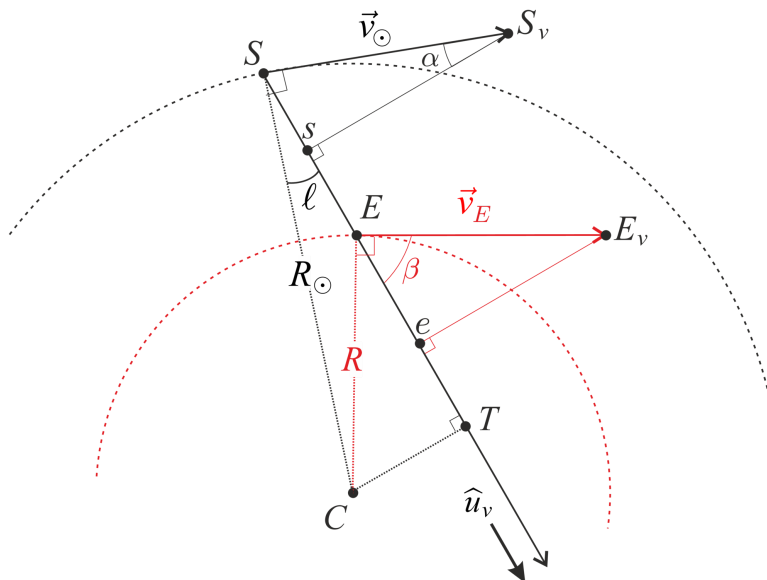


図 2：観測の幾何形状

ℓ を, SC と SE の間の角である, E の銀経とする。半径 $R_{\odot} = 8.00 \text{ kpc}$ の円軌道上の太陽の速度を $\vec{v}_{\odot}$ とする。 E は, 半径 R の別の円上を速度 $\vec{v}_E$ で公転している。先に調べた 21 cm 線のドップラー効果を用いると, $\vec{v}_E - \vec{v}_{\odot}$ を視線上に投影した, 太陽 S に対する E の視線方向速度 $v_{rE/S}$ を求めることができる。

C.3 $v_{rE/S}$ を, ℓ , R , $R_\odot$, および $v_\odot$ を用いて表せ。次に, R を, $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ , $v_{rE/S}$ を用いて表せ。 0.7pt

電波望遠鏡を使い、銀河系の面内で銀経 $\ell = 30^\circ$ 方向の観測を行った。使用した周波数帯は、周波数が $f_0 = 1.42\text{GHz}$ である 21 cm 線を含むものである。その結果を図 3 に示す。

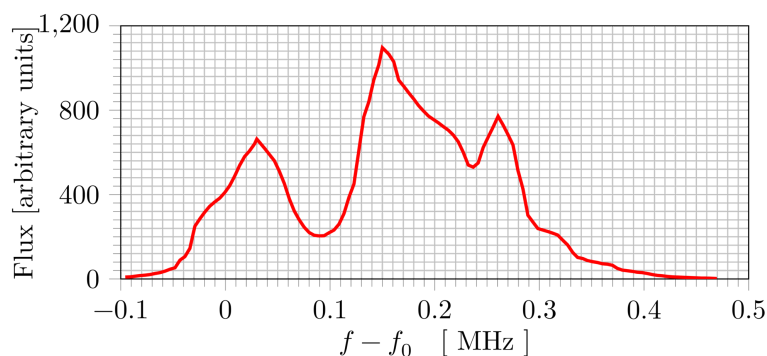


図 3: EU-HOU RadioAstronomy (電波天文学ハンズオン・ユニバース ユーロッパ) を使用して測定した, $\ell = 30^\circ$ 方向の $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$ からの周波数シフトの関数としての電波フラックス

C.4 我々の銀河系では、 $v_0 = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ である。図 3 で観測されている 3 天体の視線速度（有効数字 3 桁）と銀河中心からの距離（有効数字 2 桁）を求めよ。距離は R_0 を単位として表せ。 0.6pt

- C.5** 銀河系の立面図（解答欄）に，図 3 で観測された天体の位置を示せ。
このような観測を ℓ を変えながら行うことによって，何が演繹されるだろうか？

0.6pt

パート D - タリー-フィッシャー関係とモンド理論

図 1 の NGC6946 の中心から遠方での平坦な回転速度曲線は，図 4（左）に見られるように，渦巻銀河によく見られる共通の特徴である。各銀河の全質量 (M_{tot}) の関数として中心から遠方での等速の回転速度 ($v_{c,\infty}$) をプロットすると，タリー-フィッシャー関係と呼ばれる興味深い相関関係が得られる（図 4（右）参照）。

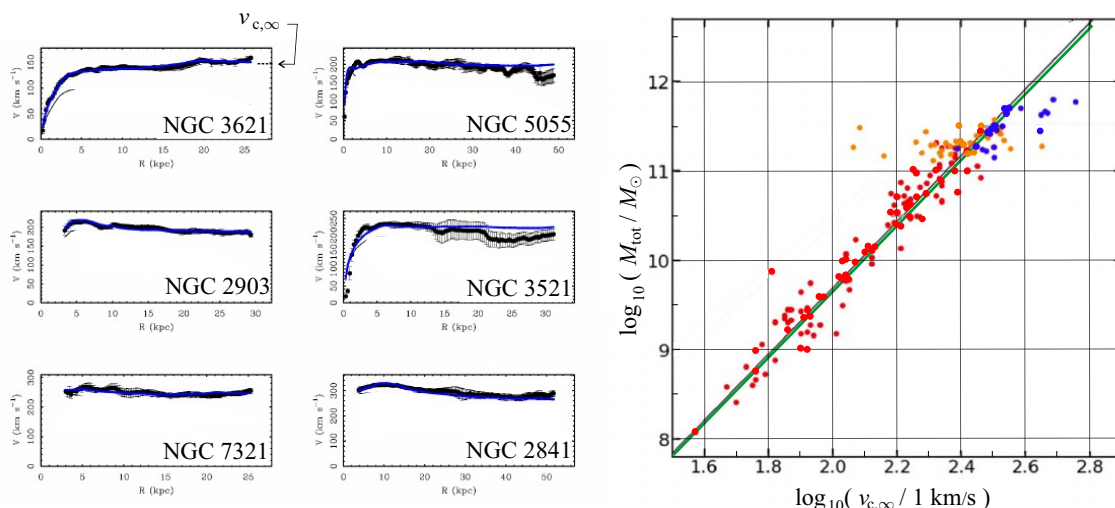


図 4. 左: 典型的な渦巻銀河の回転曲線 - 右: $\log_{10}(v_{c,\infty})$ の関数としての $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ (直線スケール)。色のついた点は，異なる銀河と異なるサーベイに対応している。緑の線はタリー-フィッシャー関係式，黒い線はデータのベストフィット。

- D.1** 銀河の半径 R が質量に依存しないと仮定して，式 1（パート B）のモデルが $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ のような関係を与えることを示せ。ここで， γ と η は指定されるべきパラメータである。
 γ_{TF} を計算して，この式をタリー-フィッシャーの関係と比較せよ。

0.4pt

MODified Newtonian Dynamics (MOND) 理論は， $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ のオーダーという極めて小さい加速度領域では，ニュートンの第二法則を， $\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$ ($a = \|\vec{a}\|$ は加速度の大きさ， $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$) の形に修正できることを示唆している。

- D.2** 図 1 の NGC 6946 のデータを使って，ニュートンの理論の範囲内で，NGC 6946 近傍の質点の加速度の大きさ a_m を求めよ。

0.2pt

- D.3** m を，固定質量 M の重力場において速度 $v_{c,\infty}$ で半径 r の円軌道を回る質量とする。 $a \ll a_0$ とする MOND 理論の範疇で，タリー-フィッシャー指数を決定せよ。
NGC 6946 のデータおよび/またはタリー-フィッシャーの法則を用いて， a_0 を計算し，MOND が適用可能な領域にあることを示せ。

0.8pt

- D.4** MOND 理論に基づいて、半径 R_b 内に均質に分布した質量 M による重力場での、任意の r における $v_c(r)$ を表せ。 0.9pt