

コックスの時計 (10 点)

1765 年、イギリスの時計職人ジェームズ・コックスは、気圧の変動のみをエネルギー源とする時計を発明した。コックスの時計は、水銀を入れた 2 つの容器を使用する。気圧の変化によって水銀が容器の間を移動し、2 つの容器が相対的に動く。この動きが時計のエネルギー源となっている。

この問題ではこの装置を解析する。全体を通して、以下のように仮定する。

- 地球の重力場 $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ は一様、 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 、 $\vec{u}_z$ は単位ベクトルである；
- すべての液体は非圧縮性であり、その密度は ρ と表す；
- 表面張力の影響は考慮しない；
- 高さによる気圧の変化は無視する；
- 周囲の温度 T_a は一様で、すべての変化は等温である。

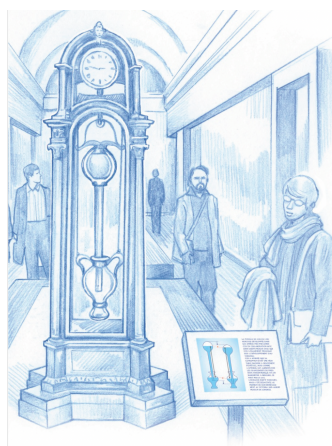


図 1. コックスの時計のアートワーク

パート A - 水没したチューブを引っ張る

まず、半無限空間 $z \leq 0$ を占める水槽を考える。その上の空気の圧力は $P_a = P_0$ である。長さ $H = 1 \text{ m}$ 、断面積 $S = 10 \text{ cm}^2$ 、質量 $m = 0.5 \text{ kg}$ の円筒形の鉛直な管 (チューブ) が水槽に浸かっている。管の下端は開いており、管の上端は閉じている。管の上端の高さを h とし、管内の水の高さを z_ℓ とする。管壁の厚さは無視する。

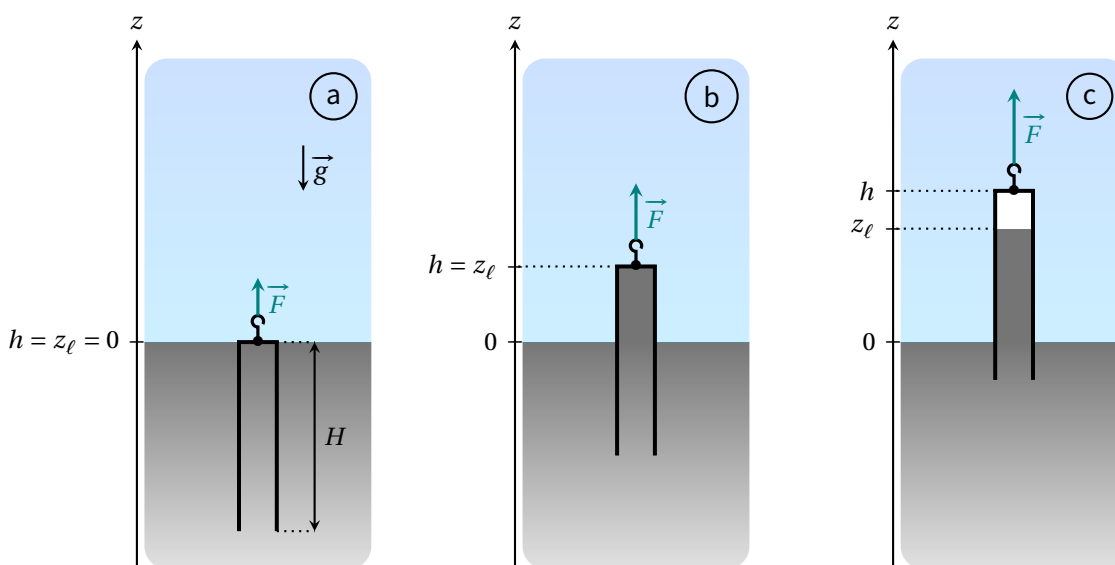


図 2. いろいろな場合のチューブのスケッチ

図 2 のチューブに空気が入っておらず、上端が液面の高さにある状態、 $h = 0$ 、 $z_\ell = 0$ (図 2a) から始める。次に、チューブを下端が液面に達するまでの範囲でゆっくりと持ち上げる。チューブに働く引っ張り力を

$\vec{F} = F \vec{u}_z$ とする。

- A.1** 図 2b に示す場合について、管頂部の水中の圧力 P_w を求めよ。また、管をこの位置に維持するために必要な力 $\vec{F}$ を、 P_0 , ρ , m , S , h , g と $\vec{u}_z$ で表せ。 0.2pt

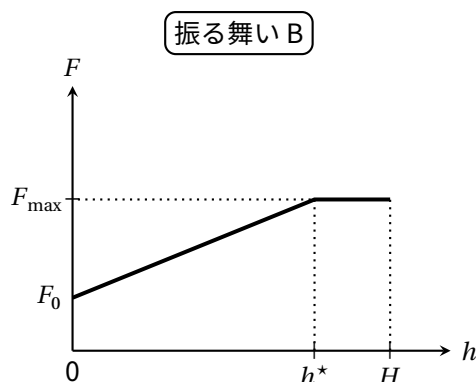
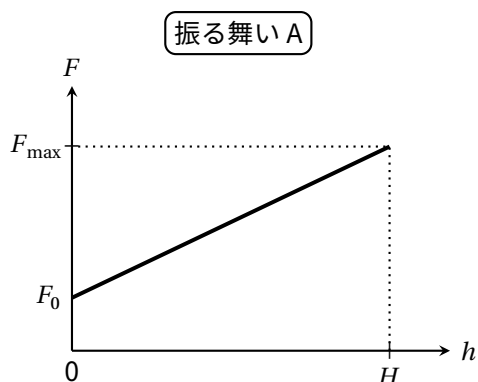
3 つの実験を行った。それぞれ、図 2a に示す初期状態から、表 1 に示す条件で管を持ち上げる。

実験	液体	T_a (°C)	ρ (kg·m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	水	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	水	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	水	99	0.96×10^3	99.8×10^3

表 1. 各実験の実験条件と数値データ

(P_{sat} は純粋液体の飽和蒸気圧)

外部圧力を $P_a = P_0 = 10^5$ Pa として、それぞれの場合に、チューブを高度 h で平衡状態に保つために加えなければならない力 F の変化を調べる。2 つの異なる振る舞いが考えられる。



- A.2** 各実験について、解答用紙の表に、予想される振る舞いと、 F_{max} と、(該当する場合) h^* の数値を記入して表を完成せよ。 F_{max} と h^* の定義は図の通りである。 0.8pt

水を水銀（その特性を下に示す）に置き換えると、振る舞い B が観測される。

液体	T_a (°C)	ρ (kg·m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
水銀	20	13.5×10^3	0.163

- A.3** P_0 と比較して P_{sat} を無視して最大の力 F_{max} を評価した場合に生じる相対誤差 ε の表式を求め、 ε の数値を求めよ。 0.3pt

Part B - 2 つの部分からなるチューブ (気圧管)

ここからは、水銀（密度 $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ）を用いるとし、周囲温度 $T_a = 20^\circ\text{C}$ とする。また、 $P_{\text{sat}} = 0$ を仮定する。

図3のような、異なる寸法の2つの円筒をつないだモデルにより、上部にリザーバーがある2層チューブを考えよう。

- 下部（やはりチューブと呼ぶ）の断面積は S_t で、高さは $H_t = 80 \text{ cm}$ である；
- 上部（バルブと呼ぶ）の断面積は $S_b > S_t$ で、高さは $H_b = 20 \text{ cm}$ である。

この2層チューブを半無限の液体に浸す。

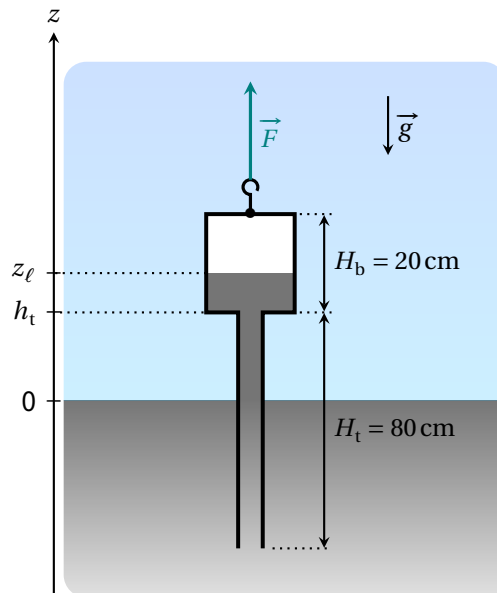


図3. 2層チューブのスケッチ

パートAと同様に、チューブに空気が入らないようにする。チューブとバルブの接合部の高さ h_t によって、チューブの垂直位置を示す。水銀柱の高さをここでも z_ℓ とする。図3に示した状態でチューブを平衡に保つために必要な力 $\vec{F}$ は、次のように書くことができる。

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}}) g \vec{u}_z \quad (1)$$

ここで、 m_{tb} は2層チューブの全質量（水銀がない場合）である。

B.1 解答用紙で、式(1)の項 m_{add} に対応する液体水銀の体積に相当する部分を色を付けることにより示せ。 0.3pt

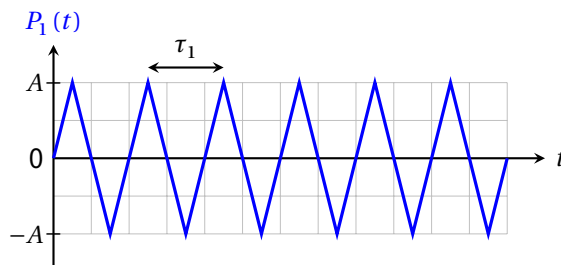
質量 m_{add} は、高さ h_t と大気圧 P_a の両方に依存する。次の問いでは、大気圧は $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$ で一定と仮定する。系が完全に浸された状態から出発して、底（最下端）が液面と同じ高さにならない範囲でチューブをゆっくりと持ち上げる。

B.2 $h_t \in [-H_b, H_t]$ の範囲の h_t の関数として、質量 m_{add} の変化をスケッチせよ。グラフには、 P_0 , ρ , g , S_b , S_t , H_b , H_t により、各セグメントの傾きと、折れ曲がりの点の h_t を示せ。 1.4pt

$P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ の下で持ち上げ、液体の自由表面がバルブの中央に来たところで止める。 h_t をこの値に保ち、次の式で表される大気圧の変動による質量 m_{add} の変動を考察する。

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

ここで、 P_0 は平均値、 P_1 は摂動項である。振幅 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ 、周期 τ_1 を1週間とする周期的な三角波関数によって P_1 をモデル化する。

図 4. 摂動項 $P_1(t)$ の簡略モデル

B.3 $S_t = 5 \text{ cm}^2$ 、 $S_b = 200 \text{ cm}^2$ として、質量 m_{add} の時間的変動の振幅 Δm_{add} を表し、その数値を求めよ。液面は常にバルブに対応する位置にあることを仮定せよ。 0.3pt

パート C - コックスの時計

コックスが開発した時計の実際のメカニズムは複雑である（図 5）。ここでは、以下に説明する、図 6 に描かれた単純化されたものを考える。

- 水銀を入れた円筒形の容器（槽）；
- B で解析したものと同一の 2 層構造のチューブを、空気が完全でない状態で容器の水銀に浸す；
- 容器と 2 層構造のチューブは、それぞれ 1 本のケーブルで吊り下げられている。両ケーブル（伸び縮みせず質量は無視できると仮定）は、理想的なプーリーを経て、水平面上を移動できる一つの錘 M の両側に取り付けられている；
- システムに含まれる液体水銀の総量は $V_\ell = 5 \text{ L}$ である。

各部分の高さ、断面積、質量を表 2 に示す。錘 M の位置は、その質量中心の座標 x によって示す。ここでは、静的係数と動的係数を区別せずに、水平な支持板と錘 M との固体間摩擦を考え、滑るとき力の大きさを F_s とする。

$-X \leq x \leq X$ ($X > 0$) となるように、2 つの滑り止めが、錘 M の変位を制限する。 X の値は以下を満たすと仮定する。

- 2 層構造チューブの底が槽（水銀容器）の底に触れることも、液中から出ることもない；
- 水銀柱の高さ z_ℓ は常に上部のバルブ中に対応する。



図 5. 本物のコックスの時計²（水銀はなし）

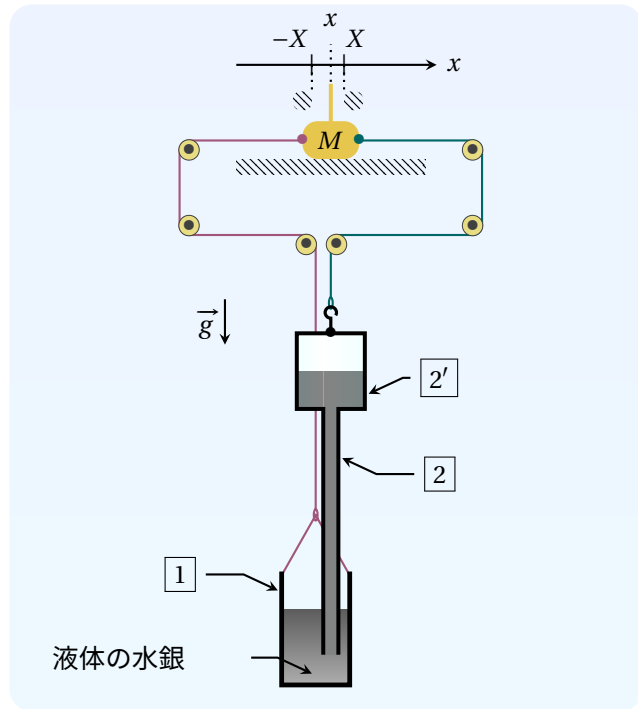


図 6. コックスの時計のモデルのスケッチ

凡例	名称	高さ	断面積	空のときの質量
1	槽 (水銀容器)	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
2	2 層式チューブの下部	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	2 層式チューブ の全質量: m_{tb}
2'	2 層式チューブのバルブ部分	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

表 2. モデルシステムの大きさと記号

このシステムは、図 4 のように圧力が変動する大気の下で動作する: $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ 、周期は $\tau_1 = 1 \text{ week}$. 開始時 $t = 0$ では、錘 M は $x = 0$ で静止しており、 $P_1(0) = 0$ で、錘 M の両側にある 2 本のケーブルが及ぼす張力は釣り合っている。 ξ を次のように定義する。

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

ここで、最右辺は $S_t \ll S_b, S_c$ を用いた (この仮定は問題の最後まで成り立つとする)。

C.1 $\xi > \xi^*$ のときには錘 M が静止したままであるような閾値 ξ^* を求めよ。

1pt

次の問いに限り、錘 M が $x = X$ で一時的にブロックされているとする。

- C.2** 錘 M がこの位置にあり、 $P_1 = 0$ のとき、2 本のケーブルが錘 M に及ぼす総張力 $\vec{T} = T \vec{u}_x$ を ρ, g, X と必要な断面積を用いて表せ。 1pt

$\xi < \xi^*$ の場合、 $x = 0$ 、 $P_1 = 0$ からスタートすると、 $t \geq 0$ に対して 2 つの異なる振る舞いが観測される。この 2 つを区別するために、もう 1 つのパラメータ λ を導入する必要がある。

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

- C.3** 各状態が得られる条件を示すように解答用紙の表を完成入せよ。条件は ξ および/または λ の不等式で表せ。さらに、 $t \in [0, 3\tau_1]$ における $P_1(t)/A$ の変化と対応する $x(t)/X$ の変化をスケッチせよ。点の座標の特定は必須ではない。 2pt

実際のコックスの時計では、装置から得られるエネルギーはラチェットを使用して蓄積され、伝統的な時計のようにカウンターウェイトを上昇させるために使用される。ここで採用している簡略化されたモデルでは、時計が得るエネルギーは、水平面が質量 M に及ぼす摩擦力によって散逸するエネルギーに対応する。これ以降では、時計がエネルギーをこのように回収できる領域で動作するような大きさのシステムであると仮定する。また、恒久的に動作する状態にあると仮定する。1 周期 τ_1 中に固体摩擦力によって散逸されるエネルギーを W とする。 W は、 F_s と X だけで表すことができる。

他の条件が同じであれば、 F_s と X は、エネルギー W を最大化するように調整できる; F_s^* と X^* を、最適な状況におけるそれぞれの値とする。

- C.4** $S_b \simeq S_c$ と $S_t \ll S_b$ を考慮し、 F_s^* と X^* の式を ρ, g, S_c と A の関数として決めよ。対応する最大エネルギー W^* を求め、 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ として、その数値を計算せよ。 1pt

1 周期 の間に最適な状態でシステムが受け取る大気圧の力の仕事を W_{pr}^* とする。

- C.5** W_{pr}^* を求め、比 W^*/W_{pr}^* を計算せよ。 V をシステムの体積として (P, V) のダイアグラムでシステムの状態変化を表すとよい。 1.7pt

Credits:

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: Victoria and Albert Museum, London.