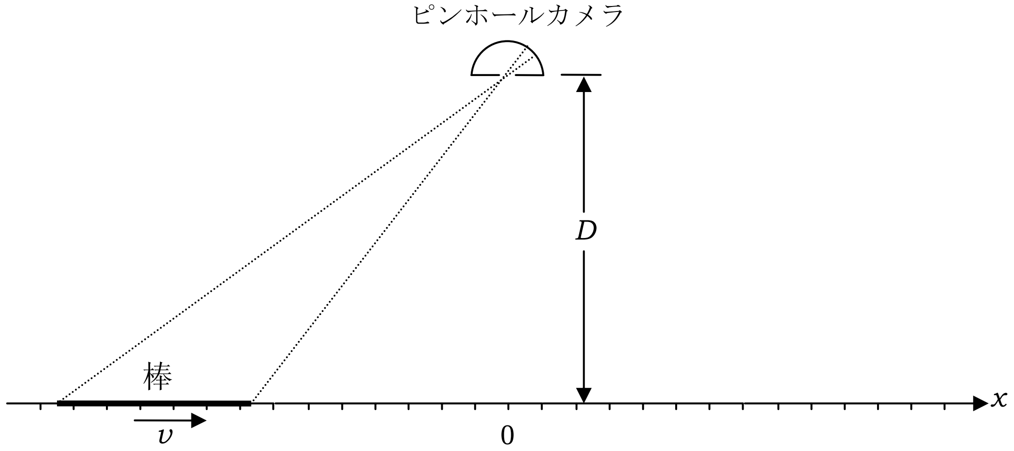
理論問題２：運動している棒の観察

解答は，すべて解答用紙に記入せよ。



設定　x 軸から距離 D だけ離れ，$x=0$ にピンホールをもつピンホールカメラで，非常に短い時間ピンホールを開くことによって棒の写真を撮影する。図に示されているように，x 軸に沿った等間隔の目盛りを用いてピンホールカメラで撮影された写真から棒の見かけの長さを決定することができる。静止系での棒の長さを L とする。ここでは，棒は静止しているのではなく，x 軸に沿って一定速度 v で動いている。

基本的関係　ピンホールカメラで撮影された棒のある微小部分の写真上の位置を $\tilde{x}$ とする。

2.1	写真が撮られた瞬間，この微小部分の*実際の位置* x を求めよ。答は，$\tilde{x}$，D，L，v あるいは光速 c の中で必要なものを用いて表せ。その際，$\beta=\dfrac{v}{c}$ を用いて結果を簡単化せよ。(0.6 点)
2.2	上の逆変換を求めよ。すなわち，$\tilde{x}$ を x，D，L，v あるいは c の中で必要なものを用いて表せ。その際，$\beta=\dfrac{v}{c}$ と $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を用いて結果を簡単化せよ。(0.9 点)

注意：*実際の位置*とは，カメラが静止している座標系での位置である。

棒の見かけの長さ　ピンホールカメラは棒の中心の実際の位置がある点 x_0 に達した瞬間に写真を撮る。

2.3	与えられた変数を用いて，この写真での見かけの長さを求めよ。(1.5 点)
2.4	見かけの長さの時間的変化を示している最も適切な文章を，解答欄の中から１つ選べ。(1.5 点)

対称的な写真　棒の両端がピンホールから等距離にあるピンホールカメラの写真を対称的な写真と呼ぶ。

2.5	この写真の棒の見かけの長さを求めよ。(0.8 点)
2.6	この写真が撮られたとき，棒の中心の実際の位置を求めよ。(1.0 点)
2.7	この写真は棒の中心の像がどこであることを示しているか。中心の像の，先端の像からの距離を求めよ。(1.2 点)

非常に早い時刻と遅い時刻の写真　棒が非常に遠くから近づきつつあるときに，このピンホールカメラで写真を撮った。この写真を早い時刻の写真と呼ぶ。棒が遠ざかり十分に遠方にあったときに写真を撮った。この写真を遅い時刻の写真と呼ぶ。一方の写真は，棒の見かけの長さは1.00 m であり，他の写真は3.00 m であった。

2.8	この写真に写っている長さを示している適切な文章を，解答欄の中から 1 つを選べ。(0.5 点)
2.9	棒の見かけの長さが上の値になるときの棒の速度 v を求めよ。(1.0 点)
2.10	この棒が静止しているときの長さ L を求めよ。(0.6 点)
2.11	これらを用いて，対称的に見える写真において棒の見かけの長さを概算せよ。(0.4 点)

国コード	学生コード	問題番号
		2

解答用紙

基本的関係

2.1　与えられた $\tilde{x}$ に対する x の値：

$x =$

2.2　与えられた x に対する $\tilde{x}$ の値：

$\tilde{x} =$

棒の見かけの長さ

2.3　見かけの長さ：

$\tilde{L}(x_0) =$

2.4　下記の１つをチェックせよ：見かけの長さ：

- □ はじめに増加し，最大値に達した後，減少する。
- □ はじめに減少し，最小値に達した後，増加する。
- □ つねに減少する。
- □ つねに増加する。

For Examiners Use Only

0.6

0.9

1.5

1.5

国コード	学生コード	問題番号
		2

対称的な写真

For Examiners Use Only

2.5　見かけの長さ：

$\tilde{L} =$

0.8

2.6　実際の棒の中心位置：

$x_0 =$

1.0

2.7　写真が示している棒の中心は，棒の像の先端のから距離

$l =$

と与えられる。

1.2

国コード	学生コード	問題番号
		2

非常に早い時刻と遅い時刻の写真

2.8　下記の１つをチェックせよ：
□ 見かけの長さは，早い時刻の写真では1 m，遅い時刻の写真では3 mである。
□ 見かけの長さは，早い時刻の写真では3 m，遅い時刻の写真では1 mである。

2.9　速度は

$\upsilon =$

2.10　静止しているとき，棒の長さは

$L =$

2.11　この対称な写真における見かけの長さは

$\tilde{L} =$

For Examiners Use Only

0.5

1.0

0.6

0.4

理論問題２：運動している棒の観察　【解答】

基本的関係

2.1　写真上に示される位置$\tilde{x}$は，写真が撮られる時刻よりも時間Tだけ前に光が発せられた位置を示しており，その時間は，

$$T=\frac{\sqrt{D^2+\tilde{x}^2}}{c}$$

で与えられる。

時間Tが経過する間，棒の各部分は距離υTだけ動くので，写真が撮られた時刻の実際の位置xは，

$$x=\tilde{x}+\upsilon T=\underline{\tilde{x}+\beta\sqrt{D^2+\tilde{x}^2}} \qquad \cdots①$$

2.2　①式の両辺を２乗して，

$$(1-\beta^2)\tilde{x}^2-2x\tilde{x}+x^2-\beta^2D^2=0$$

①式よりつねに$x>\tilde{x}$であるから，小さい方の解をとって，

$$\tilde{x}=\underline{\gamma^2x-\beta\gamma\sqrt{D^2+(\gamma x)^2}} \qquad \cdots②$$

棒の見かけの長さ

2.3　ローレンツ収縮により，動いている棒の実際の長さは，L/γであるから，棒の両端の実際の位置は，

$$x_\pm=x_0\pm\frac{L}{2\gamma} \qquad \cdots③$$

である。写真に撮られる棒の両端の像の位置は，③式を②式のxへ代入して，

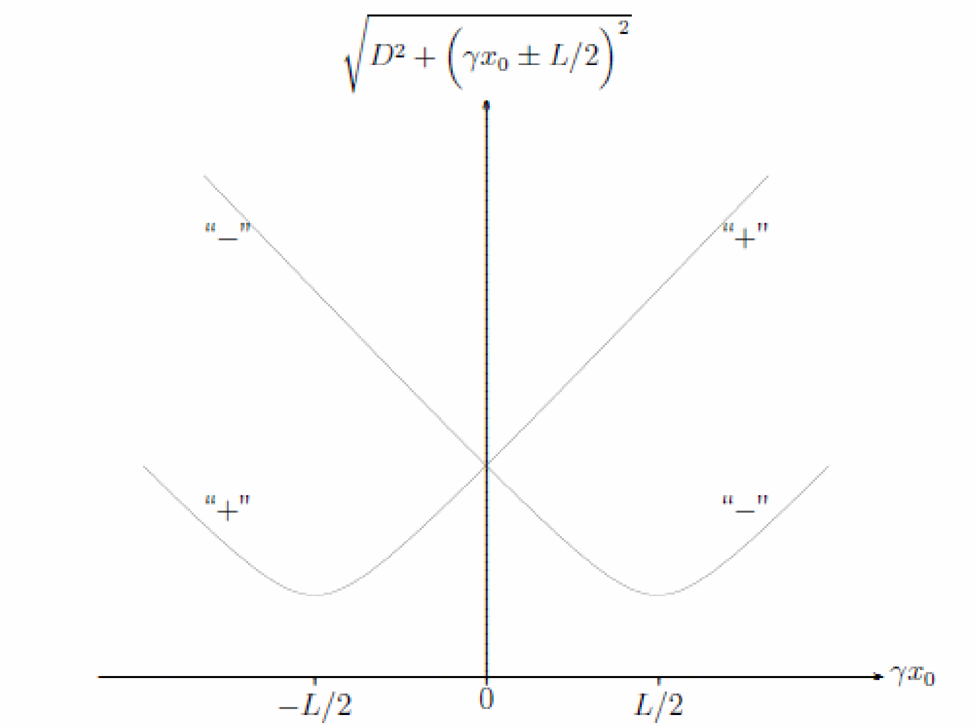
$$\tilde{x}_\pm=\gamma\left(\gamma x_0\pm\frac{L}{2}\right)-\beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0\pm\frac{L}{2}\right)^2}$$

よって，棒の見かけの長さは，

$$\tilde{L}(x_0)=\underline{\gamma L+\beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0-\frac{L}{2}\right)^2}-\beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0+\frac{L}{2}\right)^2}} \qquad \cdots④$$

2.4　棒の後端から発した光がピンホールカメラに達するまでの時間と，棒の先端からカメラに達するまでの時間の差が大きければ大きい程，見かけの棒の長さは長くなる。棒の中心が$x_0<0$のときに発する光については，後端からカメラまでの距離の方が，先端からカメラまでの距離より長いので，その間を光が通過する時間は長くかかり，その時間差は，棒の中心x_0が原点に近づくにしたがって減少し，$x_0=0$となる瞬間に発した光を写真に撮ると，見かけの長さは実際の長さに一致する。棒の中心が$x_0>0$のとき，棒の後端から発した光がカメラに達するまでの時間は先端から達するまでの時間より短く，x_0が増大するにしたがってその時間差は大きくなる。以上より，x軸正方向へ一定の速さ$\upsilon=\dfrac{dx_0}{dt}$で動いている棒のみかけの長さは単調に減少する。

実際，横軸に γx_0 をとったとき，$\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 \pm \dfrac{L}{2}\right)^2}$ のグラフは下記のようになることからも上の結果を得ることができる。



対称的な写真

2.5　対称的な写真では，棒の先端と後端から発せられた光がピンホールカメラに達するまでの時間が等しいので，見かけの長さは，速度 v で動いている実際の棒の長さに等しい。よって，

$$\tilde{L}=\frac{L}{\gamma} \qquad \cdots⑤$$

2.6　棒の中心が $x_0=0$ となる瞬間に棒の先端と後端で発した光がカメラに達するまでの時間は，$T_0=\dfrac{1}{c}\sqrt{D^2+\left(\dfrac{L}{2\gamma}\right)^2}$ であるから，この写真が撮られた瞬間の棒の中心の位置は，

$$x_0=vT_0=\beta\sqrt{D^2+\left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2} \qquad \cdots⑥$$

2.7　対称的な写真において，棒の中心の像の位置 $\tilde{x}_0$ は，②式の x に⑥式の x_0 を代入して，

$$\tilde{x}_0=\gamma^2 x_0-\beta\gamma\sqrt{D^2+(\gamma x_0)^2}$$

$$= \beta\gamma\left(\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{\beta L}{2}\right)^2}\right)$$

ここで，先端と中心の像の距離は，

$$l = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_0 = \frac{L}{2\gamma} - \tilde{x}_0$$

$$= \underline{\frac{L}{2\gamma} - \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} + \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{\beta L}{2}\right)^2}}$$

非常に早い時刻と遅い時刻の写真

2.8 見かけの長さは時間と共に減少するのであるから，見かけの長さは早い時刻の写真では 3m，遅い時刻の写真では 1m である。

2.9 早い時刻と遅い時刻での棒のみかけの長さ $\tilde{L}_e$ と $\tilde{L}_l$ は，④式でそれぞれ $x_0 \to -\infty$，$x_0 \to +\infty$ として，

$$\tilde{L}_e = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}L, \quad \tilde{L}_l = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}L \qquad \cdots ⑦$$

となるから，

$$\frac{\tilde{L}_e}{\tilde{L}_l} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \qquad \therefore \quad \beta = \frac{\tilde{L}_e - \tilde{L}_l}{\tilde{L}_e + \tilde{L}_l} = \frac{1}{2}$$

これより，

$$\underline{v = \frac{1}{2}c}$$

2.10 ⑦式より，

$$L = \sqrt{\tilde{L}_e \cdot \tilde{L}_l} = \sqrt{3} = \underline{1.73\ \text{m}}$$

2.11 対称的な写真における棒の見かけの長さは，⑤式より，$\dfrac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて，

$$\tilde{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \underline{1.50\ \text{m}}$$