Orange

この問題では，乗用車が衝突する際，エアバッグが作動するように設計された加速度計の簡単なモデルを考える。加速度がある限界値を超えると，回路のある点での電圧がしきい値を超えるため，結果として，エアバッグが作動するような電気機械的なシステムをつくりたい。

注：この問題では，重力を無視する。

1　図１に示された平行極板からなるコンデンサーを考える。コンデンサーの極板面積は A であり，極板間隔は d である。極板間隔は，極板の大きさに比べて十分小さい。一方の極板は，弾性定数 k のバネを介して壁とつながれ，もう一方の極板は固定されている。コンデンサー極板に電荷がないとき，極板間の距離は d であり，バネは自然長である。極板間の空気の誘電率は，真空の誘電率 ε_0 に等しいとする。極板間隔が d のときのコンデンサーの容量は $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$ である。いま，極板に電荷 $+Q$ と $-Q$ を与えられて，系は力のつり合いを保っている。

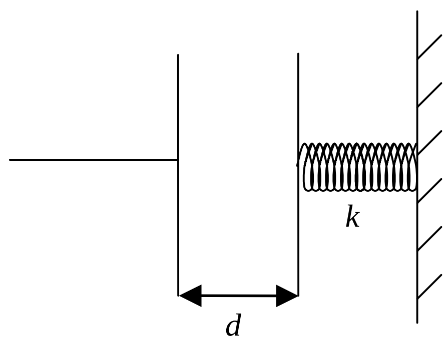

図 1

1.1	このとき，極板間にはたらく電気力の大きさ F_E を求めよ。	0.8
1.2	このとき，極板に電荷がないときに比べ，バネの付いた極板の変位 x を求めよ。	0.6
1.3	この状態で，コンデンサーの極板間の電位差 V を，Q, A, d，k，ε_0 を用いて表せ。	0.4
1.4	この状態でのコンデンサーの電気容量 C は，(電荷)/(電圧)で定義される。C/C_0 を，Q, A, d，k，ε_0 のを用いて表せ。	0.3
1.5	この系に蓄えられた全エネルギー U を，Q, A, d, k, ε_0 を用いて表せ。	0.6

図２では，質量 M の物体は質量の無視できる導電性極板と接続し，さらに自然長が等しく，かつ等しい弾性定数 k をもつ２つのバネに接続されている。この導電性極板は，他に固定された２枚の導電性極板間を，固定された極板と平行

を保ちながら左右に動くことができる。これら３つの極板は同じ極板面積 A をもち，３つの極板は２つのコンデンサーを構成している。図２に示すように，固定された２つの極板には，電位 V と $-V$ が与えられ，真ん中の極板は，スイッチ α または β につなぐことができる。可動極板につながった導線は極板の動きを妨げることはない。装置全体が加速されていないとき，可動極板はそれぞれの固定極板から共に距離 d の位置にあり，固定極板と可動極板との距離は極板の大きさに対して十分小さい。はじめ可動極板の全電荷は 0 であり，その厚さは無視できる。

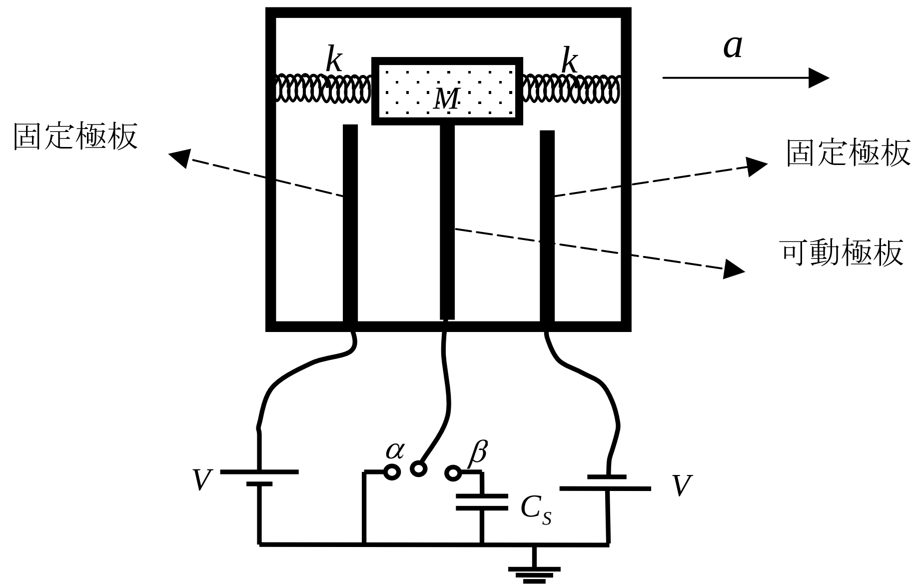

図 2

この可動極板がつくるコンデンサーを含む装置は乗用車と共に加速され，その加速度は一定であるとする。また，この一定の加速度で加速される間，バネは振動せず，このコンデンサーを含む装置はつり合いの状態にあるものとする。すなわち，この装置の各部分は，相対的に静止し，乗用車に対しても静止している。加速により，可動極板は，2 枚の固定極板の中心の位置から x だけ変位している。

２　スイッチが α の位置に入っている場合，すなわち，可動極板が接地されている場合を考えよう。

2.1	左右のコンデンサーに蓄えられる電荷 Q_1，Q_2 を，x の関数として求めよ。	0.4

2.2	可動極板にはたらく静電気力の合力 F_E を，x の関数として求めよ。	0.4

2.3	$d >> x$ とみなし，x^2 の項が d^2 の項に比べて無視できるとする。前問の答を簡単化せよ。	0.2

2.4	可動極板にはたらくすべての力（静電気力とバネの復元力の和）を $-k_{eff}x$ と書いたとき，k_{eff} を求めよ。	0.7

2.5	一定の加速度 a を，x の関数として表せ。	0.4

3　次に，スイッチが β の位置に入っている場合を考える。すなわち可動極板が電気容量 C_S のコンデンサー（初めに充電していない）を通じて接地されているとする。

可動極板の中央からの変位を x として以下に答えよ。

3.1	コンデンサー C_S の極板間電位差 V_S を x の関数として求めよ。	1.5

3.2	$d >> x$ とみなし，x^2 の項が d^2 の項に比べて無視できるとする。このとき，前問の答を簡単化せよ。	0.2

4　この問題で出てくる変数を調整して，エアバッグが通常のブレーキの状態では作動せずに衝突のときには速く開いて運転者の頭部が前窓やハンドルに衝突することがないようにしたい。**2** でみたように，２つのバネと電荷によって可動板にはたらく力は，有効バネ定数 k_{eff} である１つのバネによる力のように置き換えることができる。コンデンサー全体のシステムは，質量 M の物体とバネ定数 k_{eff} のバネが，一定の重力加速度 a の影響のもとにある場合と似ている。ただし，この場合の a は，重力加速度ではなく，乗用車の加速度である。

注意：ここでは，「質量 M の物体とバネとが一定の加速度のもとでつり合いの状態にある，すなわち，乗用車に対して物体とバネが静止している」という仮定は，もはや成り立たない。

摩擦力を無視し，問題で与えられているパラメータについては，以下の数値データを考慮せよ。

$d = 1.0\,\text{cm}$，　$A = 2.5\times10^{-2}\ \text{m}^2$，　$k = 4.2\times10^{3}\ \text{N/m}$，　$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2$，
$V = 12\,\text{V}$，$M = 0.15\,\text{kg}$.

4.1	上記の数値データを用いて，設問 2.3 で計算した電気力とバネの力との比を求め，バネの力に対して電気力が無視できることを示せ。	0.6

スイッチが β に接続されている場合について電気力を計算してはいないが，その場合も電気力は小さく無視できるということを全く同じように示すことができる。

4.2	もし乗用車が一定速度で走行しているときに，一定加速度 a で急停車した場合，可動極板の最大変位はどれだけになるか？　答は上で示された変数を用いて表せ（数値を計算する必要はない）。	0.6

スイッチが β に接続されているとする。また，コンデンサーにかかる電圧が $V_S = 0.15\mathrm{V}$ に達したときにエアバッグが作動するように系全体がデザインされているとする。乗用車の加速度が重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ に達しないような通常の状況でエアバックが作動しないようにしたい。

4.3	そのためには，C_S はいくらであればよいか。	0.6

エアバッグが速く作動することによって運転者の頭部が前窓やハンドルにぶつからないようにしたい。乗用車の衝突の結果，乗用車は g と等しい減速をするが，運転者の頭部は一定速度で動き続けるとする。

4.4	通常の乗用車での運転者の頭部とハンドルの間の距離を見積もり，運転者の頭部がハンドルにぶつかるまでの時間 t_1 を求めよ。	0.8

4.5	エアバッグが作動するまでの時間 t_2 を求めよ。t_1 と比較することによって，エアバッグの作動は間に合うか，答えよ。ただし，エアバッグは，コンデンサーの電圧が $V_S = 0.15\mathrm{V}$ に達すると瞬間的に開くものとする。	0.9

【解答】

1.1) 極板間の電場の強さは，ガウスの法則を用いて，

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

電荷Q，面積Aの極板上の電荷密度は，

$$\sigma=\frac{Q}{A}$$

平行極板間の電場は，各極板のつくる電場の和であり，１つの極板上の電荷は，他の極板のつくる強さ$\frac{1}{2}E$の電場から電気力を受ける。それゆえ，

$$F_E=\frac{1}{2}EQ=\underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}}$$

1.2) 変位xにおけるバネの弾性力は，

$$F_m=-kx$$

前問 1.1 で求めた電気力と弾性力のつり合い$F_m=F_E$より，

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}-kx=0 \qquad \therefore \qquad x=\underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Ak}}$$

1.3) 極板間の電位差Vは，電場Eを用いて，

$$V=E(d-x)$$

問 1.1，1.2 で求めた結果を代入して，

$$V=\underline{\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\left(1-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd}\right)}$$

1.4) コンデンサーの電気容量Cは，

$$C=\frac{Q}{V}$$

であるから，前問 1.3 の結果を用いて，

$$\frac{C}{C_0}=\underline{\left(1-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd}\right)^{-1}}$$

1.5) ばねに蓄えれた弾性エネルギーは,

$$U_m = \frac{1}{2}kx^2$$

コンデンサー蓄えられた静電エネルギーは,

$$U_E = \frac{Q^2}{2C}$$

それゆえ，蓄えられた全エネルギーは,

$$U = U_m + U_E = \underline{\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 A k d}\right)}$$

2.1) 位置 x で各コンデンサーに蓄えられた電気量は,

$$Q_1 = C_1 V = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}}$$

$$Q_2 = C_2 V = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}}$$

2.2) 問 1.1 の結果より，各極板間に作用する力は,

$$F_1 = \frac{{Q_1}^2}{2\varepsilon_0 A}$$

$$F_2 = \frac{{Q_2}^2}{2\varepsilon_0 A}$$

これら 2 力は，可動極板に逆向きに作用するから,

$$F_E = F_1 - F_2, \qquad \therefore \quad F_E = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right)}$$

2.3) x^2 以上の項を落として,

$$F_E = \underline{\frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3}}x$$

2.4) 同じバネ定数 k をもつ 2 つのバネによる弾性力は,

$$F_m = -2kx$$

バネの弾性力と電気力が逆向きになることに注意して,

$$F = F_m + F_E \qquad \therefore \quad F = -2\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)x$$

これより,

$$k_{eff} = \underline{2\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)}$$

2.5) 可動極板の運動方程式は,

$$F = Ma$$

であり，合力 F に前問 2.4 の結果を代入して,

$$\underline{a = -\frac{2}{M}\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)x}$$

3.1) ２つの閉回路に対するキルヒホッフの法則，および，回路の全電荷が 0 であることより,

$$\begin{cases} \dfrac{Q_S}{C_S} + V - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0 \\ -\dfrac{Q_S}{C_S} + V - \dfrac{Q_1}{C_1} = 0 \\ Q_2 - Q_1 + Q_S = 0 \end{cases}$$

$V_S = \dfrac{Q_S}{C_S}$ であることに注意して,

$$V_S = V \frac{\dfrac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}}{C_S + \dfrac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}}$$

3.2) x^2 の項を無視して,

$$V_S = \underline{V \frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 C_S + 2\varepsilon_0 A d}}$$

4.1) 電気力と弾性力の比は,

$$\frac{F_E}{F_m} = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V^2}{k d^3}}$$

数値を代入して,

$$\frac{F_E}{F_m} = \underline{7.6 \times 10^{-9}}$$

この結果から，弾性力に比べて電気力が無視できることがわかる。

4.2) 可動極板に作用する力は，バネの弾性力のみとみなすことができるから,

$$F = 2k\,x$$

単振動する可動極板の振動中心の位置は，慣性力 Ma が作用したときのつり合いの位置だから，

$$x = \frac{Ma}{2k}$$

最大変位は,

$$x_{\max} = 2x = \underline{\frac{Ma}{k}}$$

4.3) 加速度が

$$a = g$$

最大変位は,

$$x_{\max} = \frac{M\,g}{k}$$

さらに，問 3.2 の結果へ代入して，

$$V_S = V\,\frac{2\varepsilon_0 A\,x_{\max}}{d^2 C_S + 2\varepsilon_0 A\,d}$$

このとき，$V_S = 0.15\,\mathrm{V}$ となればよいから，

$$C_S = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{V\,x_{\max}}{V_S\,d} - 1\right) = \underline{8.0\times10^{-11}\,\mathrm{F}}$$

4.4) 運転者の頭とハンドルの距離 l を，

$$l = 0.4\,\mathrm{m}〜1\,\mathrm{m}$$

と見積もる。大きな加速度がかかり始める瞬間，運転者の乗用車に対する相対初速度は 0 であるから，

$$l = \frac{1}{2}g\,t_1^{\,2} \qquad \therefore \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

これより，　$t_1 = \underline{0.3〜0.5\,\mathrm{s}}$

4.5) 求める時間 t_2 は，単振動の周期の半分であるから，

$$t_2 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{M}{2k}} = \underline{0.013\,\mathrm{s}}$$

$t_1 > t_2$ だから，エアーバッグが作動するのに間に合う。