Pink

二つの恒星がそれらの共通の重心の周りを回る場合，連星と言う。われわれの銀河系の星のうちほぼ半分が連星である。しかし，地球から見ると，これらの連星の性質を調べることは簡単ではない。なぜなら，連星を形成する二つの星の間の距離は地球からの距離と比べて非常に小さく，望遠鏡で二つの星を見分けることができないからである。したがって，それが果たして連星であるかどうかを見極めるためには，光度測定あるは分光測定によって特定の星の光の強度の変動あるいはスペクトルの変動を観測しなければならない。

連星の光度測定

二つの星が運動する平面上に，ほぼ，われわれがいるとすると，われわれの観測地点（地球）から見て，連星のうちの一方の星は他方の星の前を，お互いにある時間ごとに横切るので，連星系全体の光の強さが時間とともに変化する。このような連星は食連星（食変光星）と呼ばれる。

1　二つの星が一定の角速度ωでそれらの共通の重心のまわりを円軌道で運動していて，われわれは，正確に連星系の運動する平面上にいるものとする。また，それぞれ星の表面温度（絶対温度）はT_1とT_2 $(T_1 > T_2)$ であり，半径はそれぞれR_1とR_2 $\left(R_1 > R_2\right)$であるとする。地球上で測定された連星系からの光の強さが時間の関数として図 1 にプロットされている。図 1 で示されている 2 種類の極小値は，それぞれ，連星系からの光の最大光度I_0 $\left(I_0 = 4.8\times10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}\right)$の 90%と 63%である。図 1 における縦軸は比率I/I_0を示し，横軸は「日」単位である。

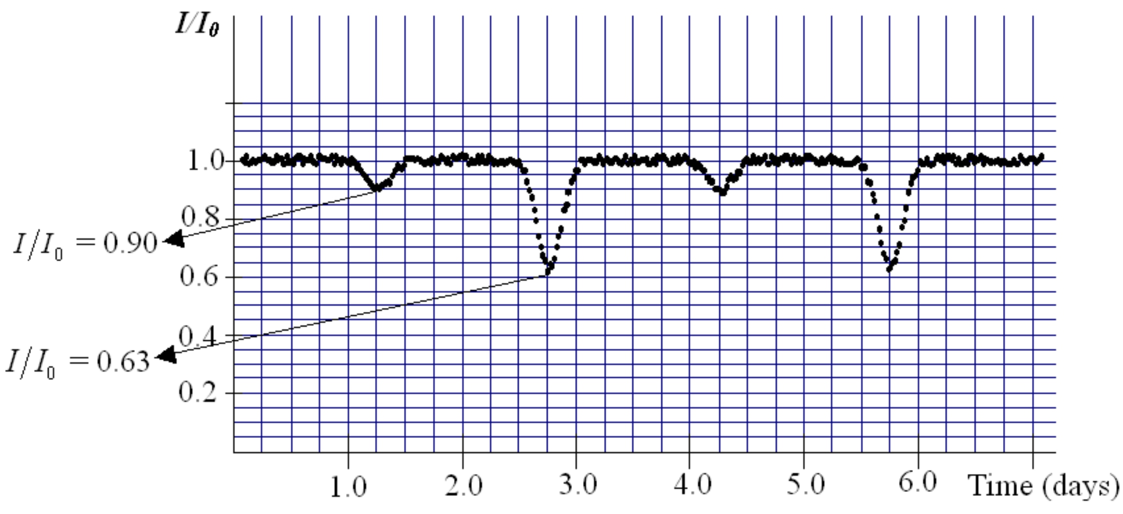


図 1. 観測された連星の相対的光度と時間の関係
縦軸は$I_0 = 4.8\times10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}$　を基準にした光の強さ。時間の単位は日。

(配点)

1.1	この重心のまわりの円運動の周期(s) を求めよ。また，その角速度(rad/s)はいくらか？　これらは，いずれも有効数字２桁で答えよ。	0.8

星からの放射は，星の半径と等しい半径をもつ平らな円板からの均一な黒体放射であると近似できる。したがって，Aをその円板の面積，Tを星の表面温度とすると，星から受け取る単位面積，単位時間あたりのエネルギーは，AT^4に比例する。

1.2	図 1 を用いて，温度の比T_1/T_2と半径の比R_1/R_2を，有効数字２桁で求めよ。	1.6

連星の分光測定

この節では，連星系の分光データを用いて連星の天文学的な性質を計算しよう。

原子は，原子ごとの特徴的な波長の光を放射・吸収する。観測される星のスペクトルには，星の大気中の原子による吸収線がある。ナトリウムのスペクトルには，波長5895.9 Å（10 Å＝1 nm）の特徴的な黄色の線スペクトル（D_1線）がある。前節で考えた連星系で，この波長のナトリウム原子の吸収線を調べた。連星から得られる光のスペクトルは，星が地球に対して運動していることによるドップラー効果の影響を受ける。連星の各星は異なる速さで動いているので，吸収線の波長は，それぞれの星でドップラー効果により異なる量だけシフトする。星の速さは光速に比べて十分に遅いので，ドップラー効果によるシフトを観測するには，精度の高い波長測定が必要である。この問題で考える連星の重心の速さは，それぞれの星の軌道速度（円運動している速さ）に比べて十分小さい。それゆえ，すべてのドップラー効果によるシフトは，星の軌道速度に起因する。表 1 は，連星系を構成している星の，地球で観測したD_1線の測定スペクトルの時間変化である。

表 1: ナトリウム $\mathbf{D_1}$ 線についての連星の吸収線スペクトル

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_1 (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1
t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

2 表１を用いて考える。

2.1	v_1 と v_2 は，それぞれの星の軌道速度の大きさとする。v_1 と v_2 を有効数字２桁で求めよ。真空中の光速度を $c = 3.0\times10^8$ m/s とする。ただし，相対論的効果は無視せよ。	1.8

2.2	これらの星の質量比 (m_1/m_2) を有効数字２桁で求めよ。	0.7

2.3	r_1 と r_2 はこれらの星の共通の重心からのそれぞれの距離である。r_1 と r_2 を有効数字２桁で求めよ。	0.8

2.4	r は，二つの星の間の距離である。r を有効数字２桁で求めよ。	0.2

3 ２つの星の間に働く力は，万有引力だけである。

3.1	それぞれの星の質量を有効数字１桁で求めよ。 万有引力定数は，$G = 6.7\times10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2} である。	1.2

星の一般的特性

4 ほとんどの星が同じメカニズムでエネルギーを生成する。このことから，星の質量 M とその輝度 L （すなわち，その星の単位時間の全放射エネルギー）との間に経験的関係式がある。この関係式は $L/L_{Sun} = (M/M_{Sun})^{\alpha}$ という「ベキ乗則」で表される。ここで，$M_{Sun} = 2.0\times10^{30}$ kg は太陽の質量であり，$L_{Sun} = 3.9\times10^{26}$ W は太陽の輝度である。この関係式は両対数グラフで図２のようになる。

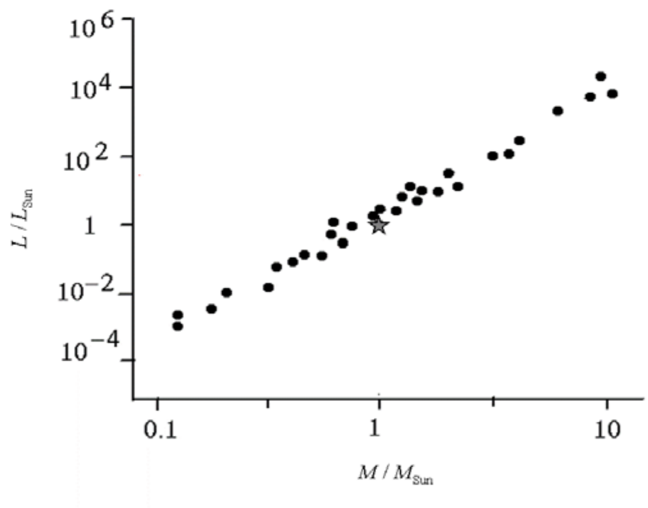


図 2. 星の輝度と質量の関係　星の輝度と質量の関係は上記のベキ乗則にしたがい，図では両対数グラフで表されているので直線状である。星印は太陽を表し，質量は 2.0×10^{30} kg で輝度は 3.9×10^{26} W である。

4.1	グラフから，ベキの指数 α を有効数字 1 桁で求めよ。	0.6

4.2	L_1 と L_2 は，前節で述べた連星のそれぞれの星の輝度を表す。L_1，L_2 を有効数字 1 桁で求めよ。	0.6

4.3	連星と地球の間の距離 d を有効数字 1 桁で光年で表すといくらか？ その距離を求めるために，図 1 で与えた数値を用いよ。 1 光年は光が 1 年の間に進む距離である。	0.9

4.4	地球からみて，二つの星の視差（二つの星の方向がなす角度）θ は最大いくらか？　有効数字 1 桁で求めよ。	0.4

4.5	これらの星を二つと見分けられる最小の望遠鏡の口径 D はいくらか。有効数字 1 桁で求めよ。	0.4

【解答】

1.1) 周期 = 3.0 日 = $\underline{2.6\times10^5\,\mathrm{s}}$.

周期 = $\dfrac{2\pi}{\omega}$ $\Rightarrow$ $\omega = 2.42\times10^{-5} \fallingdotseq \underline{2.4\times10^{-5}\,\mathrm{rad\ s^{-1}}}$.

1.2) 図 1 の極小値を読みとって， $I_1/I_0 = \alpha = 0.90$ ， および， $I_2/I_0 = \beta = 0.63$

ここで， k を比例定数として， $I_0 = k(\pi R_1^2 T_1^4 + \pi R_2^2 T_2^4)$， $I_1 = k\pi R_1^2 T_1^4$，
$I_2 = k\{\pi(R_1^2 - R_2^2)T_1^4 + \pi R_2^2 T_2^4\}$ と書けるから，

$$\frac{I_0}{I_1} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right) = \frac{\beta}{\alpha}$$

この結果から，

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \underline{1.6}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \underline{1.4}$$

2.1) ドップラー効果の式より,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cong \frac{v}{c}$$ (あるいは，これと同等の関係式)

最大および最小の波長は: $\lambda_{1,\mathrm{max}} = 5897.7$ Å , $\lambda_{1,\mathrm{min}} = 5894.1$ Å

$\lambda_{2,\mathrm{max}} = 5899.0$ Å , $\lambda_{2,\mathrm{min}} = 5892.8$ Å

最大および最小の波長差は: $\Delta\lambda_1 = 3.6$ Å , $\Delta\lambda_2 = 6.2$ Å

波長差は円軌道の速度の 2 倍になることに注意して，ドップラー効果の関係式より,

$$v_1 = c\frac{\Delta\lambda_1}{2\lambda_0} = 9.16\times10^4 \fallingdotseq \underline{9.2\times10^4\ \mathrm{m/s}}$$

$$v_2 = c\frac{\Delta\lambda_2}{2\lambda_0} = 1.58\times10^5 \fallingdotseq \underline{1.6\times10^5\ \mathrm{m/s}}$$

2.2) 題意より，重心の速度は無視できるので，運動量保存則より,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \underline{1.7}$$

2.3) $r_i = \dfrac{v_i}{\omega}$ （$i=1,2$）であるから,

$$r_1 = \underline{3.8\times10^9\ \mathrm{m}}\,,\quad r_2 = \underline{6.5\times10^9\ \mathrm{m}}$$

2.4)

$$r = r_1 + r_2 = \underline{1.0\times10^{10}\ \mathrm{m}}$$

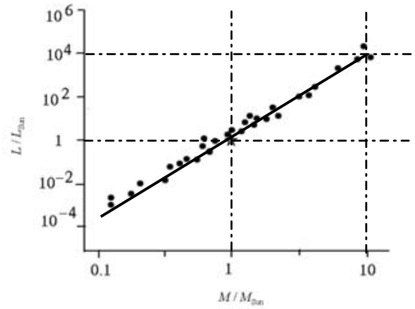
3.1)円運動の運動方程式より,

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1\frac{{v_1}^2}{r_1} = m_2\frac{{v_2}^2}{r_2}$$

それゆえ,

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{r^2 {v_2}^2}{G r_2} \\ m_2 = \dfrac{r^2 {v_1}^2}{G r_1} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \underline{\begin{cases} m_1 = 6\times10^{30}\,\mathrm{kg} \\ m_2 = 3\times10^{30}\,\mathrm{kg} \end{cases}}$$

4.1) 図２より，有効数字１桁で， $\alpha = \underline{4}$



4.2)

前問の結果より， $L_i = L_{Sun}\left(\dfrac{m_i}{M_{Sun}}\right)^4$ と書けるから，

$$L_1 = \underline{3\times10^{28}\,\mathrm{Watt}}$$
$$L_2 = \underline{2\times10^{27}\,\mathrm{Watt}}$$

4.3) 連星系の全輝度を半径 d の円周上で測定するから，光度 I_0 は,

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = 7.3\times10^{17} \fallingdotseq 7\times10^{17}\ \mathrm{m} \ = 77 \fallingdotseq \underline{80\ \mathrm{ly}}$$

4.4) $$\theta \cong \tan\theta = \frac{r}{d} = \underline{1\times10^{-8}\ \mathrm{rad}}$$

4.5) 波長の平均的な値を λ_0 とすると，光の回折現象による分解能の議論より,

$$D = \frac{d\,\lambda_0}{r} = 43 \fallingdotseq \underline{40\ \mathrm{m}}$$