理論第１問　　水力米つき機

A. はじめに

米は，ほとんどのベトナム人にとって主食である。稲から白米とするためには，殻粒から殻を取り玄米とし（これを脱穀という），さらに，玄米の種皮を剥し白米とする（これを精米という）作業がある。ベトナムの北部にある山岳地帯では，水流が豊富であることもあって，精米作業に水力米つき機を用いている。この水力米つき機を図１に示し，その機能を図２に示した。

B. 米つき機の概要とその機能

１．概要

ベトナム式米つき機（図１）は次の２つの部分からなる。

臼（桶）：玄米を入れる木製の器

てこ：一方が太く，他方が細くなっている木材

この「てこ」は，柱につけた水平軸のまわりに回転する。杵（きね，打ち棒）は，「てこ」の細いほうの端に垂直に付けられている。杵は，「てこ」が水平になっているときに臼の中の米をつくような長さにつくられている。「てこ」の太いほうの端の内部は婉曲に削られており，水の溜まるバケツを形成している。このバケツの形状が，米つき機にとって本質的である。

２．機能

米つき機には２つの状態がある。

機能する状態：この状態では，臼は図２に示される作業サイクルを通して叩かれている。米打ち機の機能は，図２の過程(f)で杵が米を打つことである。何らかの理由で，杵が米に当たらないとき，米打ち機は機能していないと言う。

「てこ」が持ち上げられたままで機能しない状態：図２の作業サイクルの過程(c)では，傾斜角αが増加すると，バケツの中の水の量は減少する。ある時間経過して，水の量が「てこ」の重さとちょうどつり合った瞬間の傾斜角をβとする。「てこ」が角βになり，その角速度がゼロであると，「てこ」は永久にこの位置に保たれる。これは「てこ」が持ち上げられたまま静止した状態である。バケツに流れ込む水の流量Φがある値Φ_2を超えると，この機能しない状態は安定である。別の言い方をすれば，Φ_2は米打ち機が作動する状態にならない最小の水の流量である。

図 1
水力米つき機

水力米つき機の作業過程

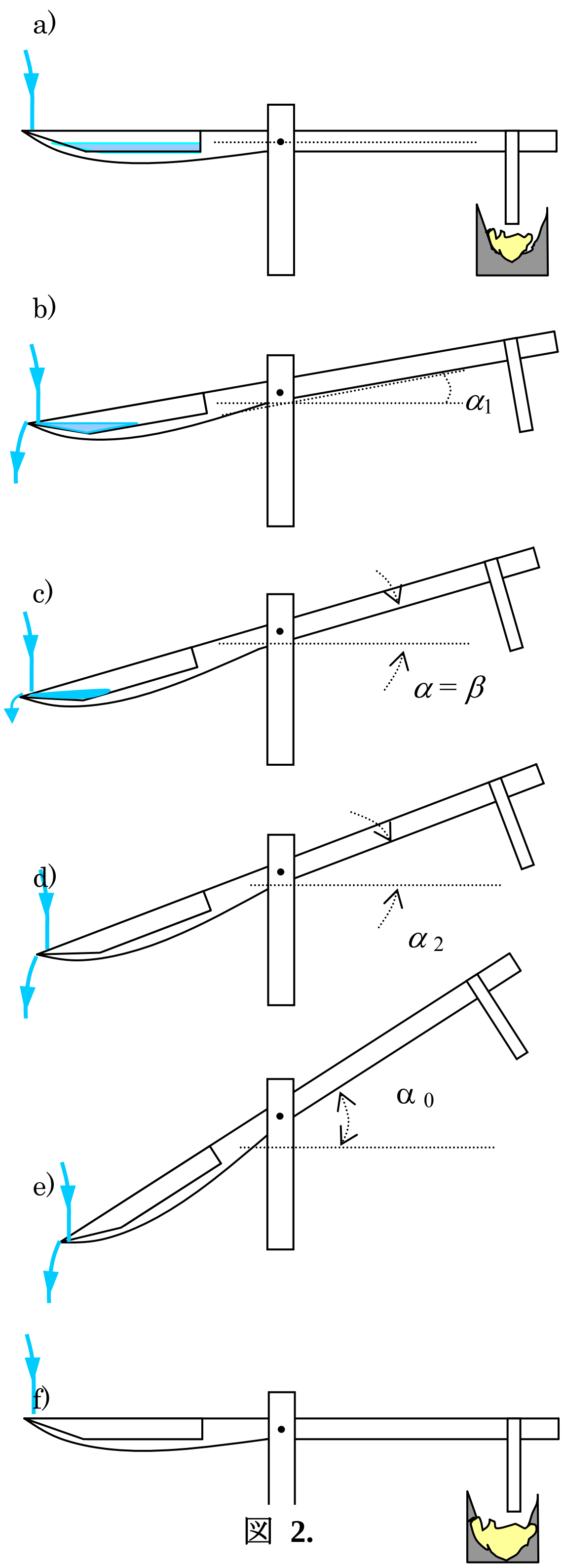


図 **2.**

a) はじめバケツの中には水はなく，杵は臼の上で静止している。水がバケツの中に少量流れ込むが，「てこ」はある時間までは水平を保っている。

b) バケツの中に水がある量溜まると，杵は持ち上がる。「てこ」が傾くため，水はバケツの左端に流れて集まり，「てこ」は急速にさらに傾く。$\alpha=\alpha_1$ になると水は流出し始める。

c) 角 α が増加すると，さらに流れ出る。角 α が $\alpha=\beta$ になると，水平軸のまわりの力のモーメント（トルク）はゼロになる。

d) 角 α は増え続け，バケツの水が流出し続け，バケツは空になる。

e) 角 α は慣性により増え続ける。バケツの形状から，水はバケツの中に落ちても直ちに流れ出る。角 α の慣性による運動は，α が最大値 α_0 に達するまで続く。

f) バケツの水がないので，「てこ」の重さにより，「てこ」は，はじめの水平な位置に戻る。杵は臼の中の米を打ち，新たなサイクルが始まる。

C. 問題

次のようなパラメータを用いて水力米つき機を考える（図 3)。

「てこ」の質量（杵を含むが，水は含まない）は，$M = 30$ kg とする。

「てこ」の重心を G とする。「てこ」は軸 T （図では点 T となっている）を中心として回転する。

軸 T のまわりの「てこ」の慣性モーメントは，$I = 12\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ とする。

バケツに水があるときは，水の質量を m と書き，水の重心を N とする。

水平軸からの「てこ」の傾斜角を α とする。

米つき機とバケツに関する長さの計測値を図 3 に示す。

回転軸の摩擦と水のバケツへの落下による力は無視する。この問題では，水面は常に水平と近似する。

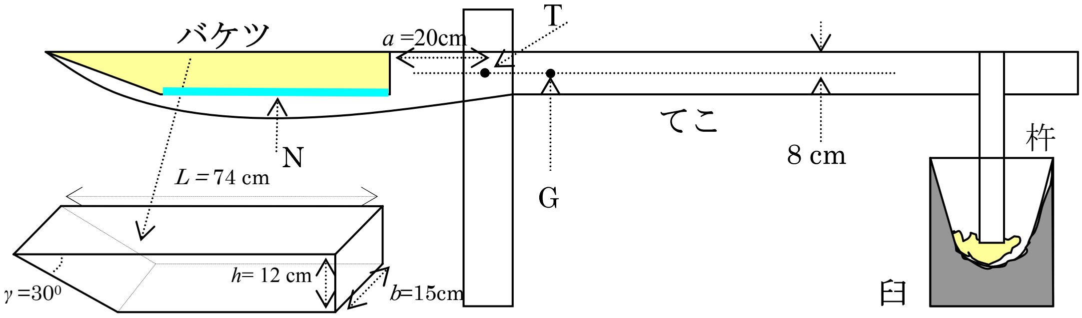


図 3. 米つき機の大きさとデザイン

1. 米つき機の構造

最初，バケツは空であり，「てこ」は水平な位置にある。そして，水がバケツに流れ込み，やがて，「てこ」は回転を始める。このときのバケツ中の水の量は $m = 1.0$ kg である。

1.1. 「てこ」の重心 G から，「てこ」の回転軸 T までの距離を求めよ。バケツが空のとき，GT は水平だとわかっているとする。

1.2. 「てこ」と水平面との間の角が α_1 となると，水がバケツから流れ出す。この角が α_2 となると，バケツが完全に空になる。α_1 と α_2 を求めよ。

1.3. $\mu(\alpha)$ を「てこ」の重さとバケツ中の水の重さによる（軸 T に関する）力のモーメント（トルク）とする。$\alpha = \beta$ のとき，$\mu(\alpha)$ はゼロである。β とこの

ときのバケツ中の水の質量m_1を求めよ。

2. 機能する状態のパラメータ

単位時間に一定で小さい流量Φで，バケツに水が流れ込むとする。「てこ」が動いている間にバケツに流れ込む水の量は十分小さいので，作動水による全体の慣性モーメントの変化は無視する。

2.1. 一回のサイクル中の$\mu(\alpha)$について，横軸を傾斜角α，縦軸をトルクμとするグラフの概形を描け。また，傾斜角$\alpha=\alpha_1$，$\alpha=\alpha_2$，および$\alpha=0$での$\mu(\alpha)$の数値を，それぞれ求めよ。

2.2. 問 2.1.のグラフを用いて，$\mu(\alpha)$により発生する全エネルギーW_{total}と杵から米になされる仕事W_{pounding}それぞれについて，グラフのどの部分に対応するか述べよ。

2.3. αに関するμの同じグラフを用いて，α_0とW_{pounding}の値を求めよ（バケツに流れ込む，または流れ出す水の運動エネルギーは無視する）。グラフの曲線は適切な折れ線で近似して，計算を簡略化してもよい。

3. 機能しない状態

一定の流量Φでバケツに水が流れ込むとし，「てこ」が動いている最中に流れ込む水の量は無視できないとする。

3.1. バケツが水で常にあふれていると仮定する

3.1.1. $\alpha=\beta$の近くで，横軸を傾斜角α，縦軸をトルクμとするグラフの概形を描け。「てこ」が$\alpha=\beta$の位置にあるときは，どのようなつりあいの状態にあるかを選べ。

3.1.2. $\alpha=\beta+\Delta\alpha$とするとき，$\Delta\alpha$が小さいとして，トルク$\mu(\alpha)$を$\Delta\alpha$の一次の項まで求め，その係数は数値で表せ。

3.1.3. $\alpha=\beta+\Delta\alpha$（$\Delta\alpha$は小さい）の位置から初速度ゼロで動き出す「てこ」の動きについて，回転の運動方程式を書き下せ。その方程式から，その回転運動はよい精度で単振動であることを示せ。さらに，その周期τの値を計算せよ。

3.2. あるΦにおいて，「てこ」が十分遅く動いているときに限ってバケツは常に水があふれている。そうすると，前問で求めた単振動の振幅には，Φに依存する上限がある。「てこ」が角度 1^o の角振幅で単振動するときの最小のΦの値Φ_1を kg/s の単位で求めよ。

3.3. Φが十分大きいとすると，α_2からα_1へ傾斜角が減少しながら自由運動しているときには，バケツから常に水があふれる。その結果，もしΦが大きすぎると「てこ」は振動をし，米つき機は機能しない。「てこ」の動きを単振動と仮定して，米つき機が機能しない最小の流量Φ_2のおよその値を有効数字一桁で求めよ。

解答用紙

1. **3 pts**

1.1.	「てこ」の重心から回転軸までの距離 TG =	1
1.2.	$\alpha_1 =$ $\alpha_2 =$	0.5
1.3.	「てこ」にはたらく力のモーメント μ がなくなるとき， $m_1 =$ $\beta =$	1.5

2. **3.5 pts**

2.1.	横軸αに対する縦軸μのグラフ。$\alpha=\alpha_1$, $\alpha=\alpha_2$, $\alpha=0$ に対する各μの数値をわかりやすく記入すること。	2
2.2.	$\mu-\alpha$図においてW_{total}はどのように表されるか。 $\mu-\alpha$図においてW_{pounding}はどのように表されるか。	0.35 0.35
2.3.	$\alpha_0 \approx$ $W_{\text{pounding}} \approx$	0.4 0.4

3. **3.5 pts**

<table>
<tr><td>3.1.</td><td>3.1.1. $\alpha=\beta$ の近くにおける $\mu-\alpha$ 図

$\alpha=\beta$ のとき，つりあいの状態は次のどれか
<table><tr><td>安定</td><td></td></tr><tr><td>不安定</td><td></td></tr><tr><td>どちらでもない</td><td></td></tr></table>（適切なものに〇印を付けよ）

3.1.2. $\mu(\alpha)$ は $\Delta\alpha$ を用いてどう表されるか

3.1.3. 「てこ」の運動方程式

振動の周期 $\tau=$</td><td>0.5

0.2

0.4

0.4</td></tr>
<tr><td>3.2.</td><td>「てこ」が角度 1° の角振幅で単振動するときの Φ の最小値

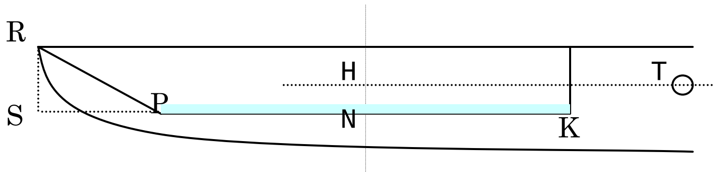
$\Phi_1=$</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>3.3.</td><td>水力米つき機が機能しない流量 Φ の最小値

$\Phi_2=$</td><td>0.5</td></tr>
</table>

理論第１問　　　　　　　　【解答】

1.1 TG の長さの計算

バケツの中の水の体積は$V = 1000\,\mathrm{cm}^3 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$であり，バケツの底辺の長さは $d = L - h\tan 60° = (0.74 - 0.12\tan 60°)\mathrm{m} = 0.5322\mathrm{m}$　である（与えられたデータは有効数字２桁であるので，最終的には有効数字２桁で答えるべきであるが，計算の過程ではより多くの桁を残しておく）。



（解答１）水 F が少量であるので，水の重心 H が上図の PK の中点の真上にあると近似する。このとき，$\mathrm{TH} = a + \frac{d}{2} = 0.4661\mathrm{m}$　である。モーメントのつり合いにより，

$$\mathrm{TG} = \frac{m}{M}\mathrm{TH} = 0.01554\mathrm{m} \approx \underline{0.016\ \mathrm{m}}$$

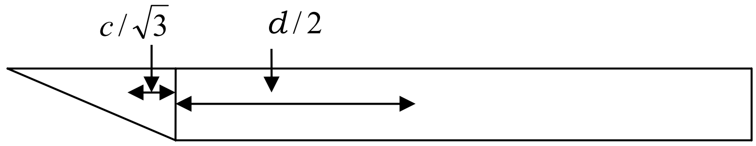
（解答２）バケツの水の深さをcとする。$bcd < V$ なので，$c < 0.01253\mathrm{m}$ である。また, 水の重心の T からの水平距離はバケツの底面の中心と T との水平距離より長く，水面の中心と T との水平距離より短くなるので，$a + \frac{d}{2} < \mathrm{TH} < a + \frac{d + c\tan 60°}{2}$ である。よって，$0.4661\mathrm{m} < \mathrm{TH} < 0.4770\mathrm{m}$，ゆえに，$0.01554\mathrm{m} < \mathrm{TG} < 0.01590\mathrm{m}$ となる。すなわち有効数字２桁では $\mathrm{TG} = \underline{0.016\ \mathrm{m}}$ である。

（解答３）バケツの水の深さcは，以下の方程式から計算できる。

$$V = bcd + b\frac{c}{2}c\tan 60^0 \Rightarrow c = \frac{(d^2 + 2\sqrt{3}V/b)^{1/2} - d}{\sqrt{3}}$$

V, b, d の値を代入して，$c = 0.01228\mathrm{m}$

下図のように水を三角柱と直方体に分割する。水全体の重心は三角柱の重心と直方体の重心とを結んだ線を $bcd : \frac{1}{2}bc^2\tan 60° = 2d : \sqrt{3}c$　に内分する点なので，



$\mathrm{TN} = a + \dfrac{d}{2} + \dfrac{\sqrt{3}c}{\sqrt{3}c + 2d}\left(\dfrac{d}{2} + \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right) = 0.4714\mathrm{m}$ となる。ゆえに,

$$\mathrm{TG} = 0.01571\mathrm{m} \approx \underline{0.016\ \mathrm{m}}$$

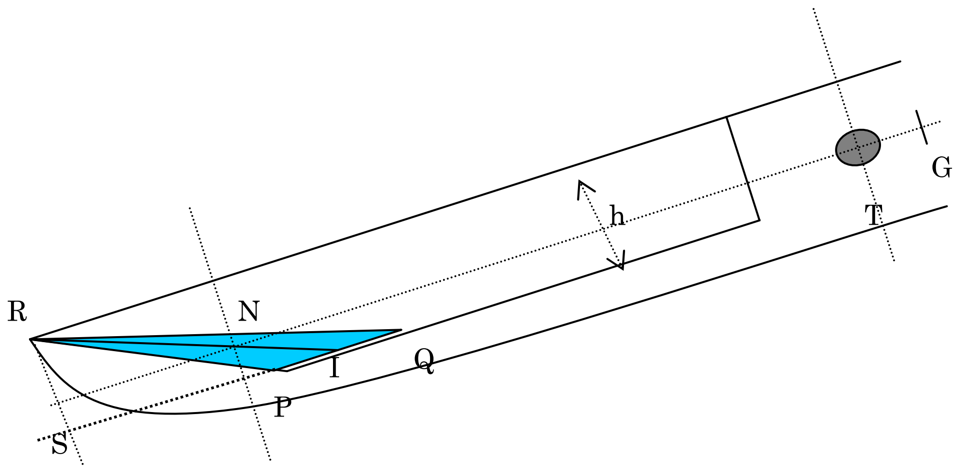
1.2 α_1, α_2 の値の計算

「てこ」が α_1 傾いていると，水面はバケツの縁をとおる。このとき水の体積は $10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ である。$\mathrm{PQ} < d$ とすると，下図より $V = hb \times \mathrm{PQ}/2$ なので，

$\mathrm{PQ} = 0.1111\mathrm{m}$ である。これは，明らかに $\mathrm{PQ} < d$ をみたす($d = 0.5322\,\mathrm{m}$)。

$\tan\alpha_1 = \dfrac{h}{\mathrm{QS}} = \dfrac{h}{\mathrm{PQ} + \sqrt{3}h}$ より， $\alpha_1 = \underline{20.6°}$

また，傾きが $30°$ のとき，バケツは空になる。すなわち，$\alpha_2 = \underline{30°}$



1.3 全トルク（力のモーメント）μ が 0 となるときの「てこ」の傾き β とバケツ内の水量 m_1 の計算

$\mathrm{PQ} = x(\mathrm{m})$ とおく。バケツ内の水量は，水の密度を $\rho_{\mathrm{water}} = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ として，

$m_1 = \rho_{\mathrm{water}} \dfrac{xhb}{2} = 9x$〔kg〕と書ける。$\mu = 0$ のときバケツ内の水が及ぼすトルクと「てこ」の重さによるトルクはつり合う。バケツ内の水の断面は図中の△PQR である。水の重心 N は線分 RI を 2:1 に内分する点なので，３点 N,T,G は共線である。また，$m_1 g \times \mathrm{TN} = Mg \times \mathrm{TG}$ であるので，

$$m_1 \times \mathrm{TN} = M \times \mathrm{TG} = 30 \times 0.01571 = 0.4713 \qquad (1)$$

TN を x を用いて表すと，

$$\mathrm{TN} = L + a - \frac{2}{3}(h\sqrt{3} + \frac{x}{2}) = 0.94 - 0.08\sqrt{3} - \frac{x}{3} = 0.8014 - \frac{x}{3}$$

(1)式に代入すると，

$$m_1 \times \mathrm{TN} = 9x(0.8014 - x/3) = -3x^2 + 7.213x \tag{2}$$

よって，x の方程式

$$-3x^2 + 7.213x = 0.4714 \tag{3}$$

を得る。

(3)の解は，$x = 2.337$ と $x = 0.06723$ であるが，x は 0.5322 より小さいので，$x = x_0 = 0.06723$ である。したがって，

$$m_1 = 9x_0 = 0.6051\,\mathrm{kg} \approx \underline{0.61\mathrm{kg}}$$

また，$\tan\beta = \dfrac{h}{x + h\sqrt{3}} = 0.4362$ より，$\beta = 23.57° \approx \underline{23.6°}$

2.1　1 サイクルでの $\mu(\alpha)$（$\mu(t)$ と $\alpha(t)$ の関係）のグラフ

はじめ，バケツが空のとき，$\alpha = 0$ であり，μ は負で，その大きさは，最大値

$$Mg \times \mathrm{TG} = 30 \times 9.81 \times 0.01571 = 4.624\,\mathrm{N\cdot m}$$

をとる。トルクの符号は，水平軸のまわりの反時計回りの向きを正とする。

バケツに水が流れ込むにつれて，μ が正となり「てこ」が持ち上がるまで，水が及ぼす正のトルクにより μ が増加する。仮定により，このときからバケツ内の水量は一定である。

「てこ」が傾くことにより，水の重心は回転軸から離れ，μ の増加を引き起こす。そして，μ は水がバケツの縁からこぼれはじめる瞬間に最大値をとる。このとき，$\alpha = \alpha_1 = 20.6^0$ である。

簡単な計算により，

$$\mathrm{SI} = \mathrm{SP} + \mathrm{PQ}/2 = 0.12 \times 1.732 + 0.1111/2 = 0.2634\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{TN} = 0.20 + 0.74 - \frac{2}{3}\mathrm{SI} = 0.7644\,\mathrm{m}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\max} &= (1.0 \times \mathrm{TN} - 30 \times \mathrm{TG})g\cos 20.6° \\ &= (1.0 \times 0.7644 - 30 \times 0.01571) \times 9.81 \times \cos 20.6° = 2.691\,\mathrm{N\cdot m} \\ &\approx \underline{2.7\,\mathrm{N\cdot m}}\end{aligned}$$

バケツがこれより傾くと，バケツ内の水量は減少し，ついには$\alpha=\beta$，$\mu=0$となる。そして，慣性のためにαは増加し，μは減少し続ける。

$\alpha=\alpha_2=30°$のとき，バケツは空になり，

$$\mu=-30\times g\times \mathrm{TG}\times\cos 30°=\underline{-4.0\ \mathrm{N\cdot m}}$$

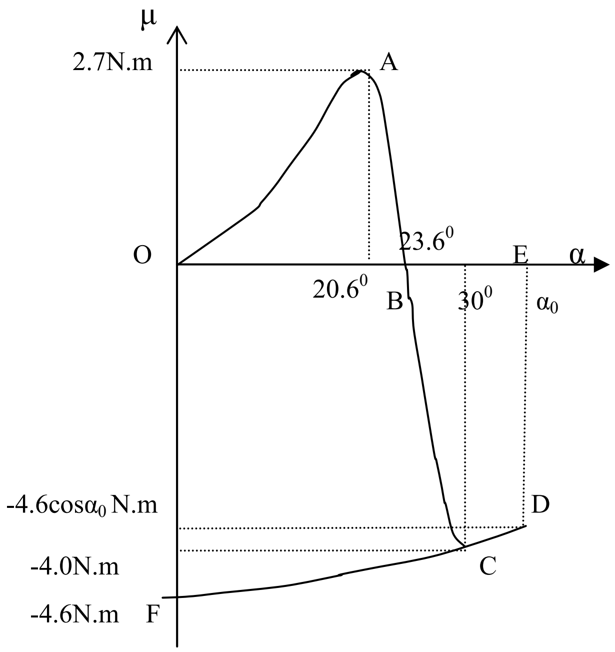
慣性のためにαはα_0に達するまで増加し，

$$\mu=-Mg\cdot\mathrm{TG}\cos\alpha_0=-4.62\cos\alpha_0\ \mathrm{N\cdot m}$$

となり，その後，急速に$\alpha=0$へと減少する。$\alpha=0$のとき，

$$\mu\approx\underline{-4.6\ \mathrm{N\cdot m}}$$

以上をもとに，$\mu(t)$と$\alpha(t)$とのグラフ$\mu(\alpha)$を描くと，下図を得る。



2.2 トルク$\mu(\alpha)$の及ぼす微小な仕事は$dw=\mu(\alpha)d\alpha$と表せる。1サイクルで「てこ」が$\mu(\alpha)$により得るエネルギーは，$w=\int\mu(\alpha)d\alpha$，すなわち，$\mu(\alpha)$のグラフが囲む面積である。よって，W_{total}はグラフ$\mu(\alpha)$における<u>曲線(OABCDFO)の囲む面積</u>に等しい。

「てこ」が臼に与える仕事は，てこが$\alpha=\alpha_0$の状態から水平になる，すなわ

ち$\alpha = 0$となるまでに得るエネルギーに等しい。よって，W_{pounding}はグラフ$\mu(\alpha)$における(OEDFO)の面積であり，その大きさは，はじめ「てこ」がもっていた位置エネルギー$gM \times \mathrm{TG} \times \sin\alpha_0 = 4.6\sin\alpha_0$（J）に等しい。

2.3　点Dで「てこ」のもつ運動エネルギーが0であることを考慮することで，α_0の大きさを計算できる。すなわち，

図形(OABO) = 図形（BEDCB)

OABO を三角形に，BEDCB を台形に近似することにより，

$$23.6 \times 2.7 \times (1/2) = 4.0 \times [(\alpha_0 - 23.6) + (\alpha_0 - 30)] \times (1/2)$$

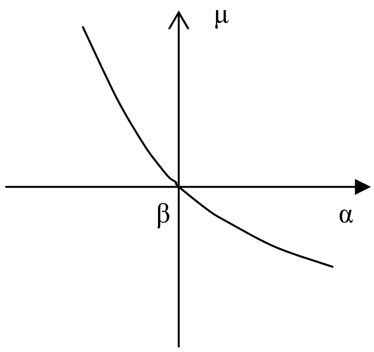
これより，$\alpha_0 = \underline{34.7°}$を得る。よって，

$$W_{\text{pounding}} = \text{領域(OEDFO)} = -\int_{34.76}^{0} Mg \times \mathrm{TG} \times \cos\alpha \, d\alpha$$

$$= 4.62 \times \sin 34.7^0 = 2.63 \approx \underline{2.6\,\mathrm{J}}$$

3.1.1 バケツから常に水があふれている。$\mu(\alpha)$のグラフは$\alpha = \beta$の近傍では単調減少である。グラフによると，$\alpha = \beta$は安定な平衡点であるとわかる。

　αが増加すると，αを減少させる負のトルクが働き，αが減少すると，αを増加させる正のトルクが働く。



3.1.2 $\alpha = \beta + \Delta\alpha$（$\Delta\alpha$は微小）のときのトルクμの計算

「てこ」がαだけ傾いているときバケツ内の水量は$m = (1/2)\rho bh\mathrm{PQ}$であり，

また，$\mathrm{PQ} = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} - \dfrac{1}{\tan 30^0}\right)$である。$\alpha$が$\beta$から$\alpha = \beta + \Delta\alpha$まで増加するとき，バケツ内の水量の増加は，

$$\Delta m = \frac{1}{2}\rho bh\Delta\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\rho bh\frac{\partial\mathrm{PQ}}{\partial\alpha}\Delta\alpha = -\frac{\rho bh^2}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha \approx -\frac{\rho bh^2}{2\sin^2\beta}\Delta\alpha$$

である。

傾き$\alpha = \beta + \Delta\alpha$のとき，「てこ」に作用するトルクは，$\Delta m$によるトルクに等

しい。よって,

$$\mu = \Delta m \times g \times \mathrm{TN} \times \cos(\beta + \Delta\alpha) \approx \Delta m \times g \times \mathrm{TN} \times \cos\beta$$

TN の大きさは「てこ」の傾きが β のときの平衡の条件より計算できる。すなわち,

$$\mathrm{TN} = M \times \mathrm{TG}/m_1 = 30 \times 0.01571/0.605 = 0.779\ \mathrm{m}$$

$$\therefore \quad \mu = -47.2\Delta\alpha \mathrm{N\cdot m} \approx \underline{-47\Delta\alpha\,\mathrm{N\cdot m}}$$

3.1.3 「てこ」の回転運動方程式は,

$$\underline{I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mu} \quad \text{（ただし } \mu = -47.2\Delta\alpha\,\mathrm{N\cdot m},\ \ \alpha = \beta + \Delta\alpha \text{）}$$

I は「てこ」とバケツ内の水の軸 T まわりの慣性モーメントの和である。バケツ内の水量は α に依存するので, I は一定でない。しかし, $\Delta\alpha$ が微小のとき, バケツ内の水量も水の形も変化しないとみなせ, I は近似的に一定である。バケツ内の水は質量 0.605kg の質点とみなせる。よって, 簡単な計算により,

$$I = 12 + 0.605 \times 0.779^2 = 12.37\mathrm{kgm}^2 \approx 12.4\mathrm{kgm}^2$$

$$\therefore \quad 12.4\frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} = -47.2\Delta\alpha$$

これは単振動の方程式であり, その周期は,

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{12.4}{47.2}} = 3.22\mathrm{s} \approx \underline{3.2\mathrm{s}}$$

3.2 バケツから常に水があふれているときの $\alpha = \beta$ 付近での単振動

「てこ」は $\alpha = \beta$ を中心に振幅 $\Delta\alpha_0$ の単振動をしているとする。$t = 0$ のとき $\Delta\alpha = 0$ であるとする。このとき水があふれている。dt の間に傾きは $d\alpha$ 変化する。この問題で調べるべきなのは $d\alpha < 0$, すなわち,「てこ」が α の減少する向きへ運動する場合であり, このとき, バケツをあふれさせる以上の水を供給する必要がある。「てこ」の運動は $\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0 \sin\frac{2\pi}{\tau}t$ と表される。よって,

$$d(\Delta\alpha) = d\alpha = -\Delta\alpha_0 \frac{2\pi}{\tau}\cos\frac{2\pi}{\tau}t dt$$

である。

バケツから水があふれるためには, この間にバケツに流れ込む水量は少なくとも $\quad dm = -\frac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta}d\alpha = \frac{\Delta\alpha_0\pi bh^2\rho}{\tau\sin^2\beta}\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)dt \quad$ である。

dm は $t = 0$ のとき最大となり, $\quad dm_0 = \frac{\pi bh^2\rho\Delta\alpha_0}{\tau\sin^2\beta}dt$

バケツに流れ込む水量と流量 Φ は関係式をみたす。ゆえに,

$$\Phi = \frac{\pi b h^2 \rho \Delta\alpha_0}{\tau \sin^2\beta}$$

単振動をするためにはバケツから水があふれる必要があるので，「てこ」が振幅1°，すなわち $\Delta\alpha_0 = 2\pi/360\,\mathrm{rad}$ の単振動をするためには，

$$\Phi_1 = \frac{\pi b h^2 \rho \cdot 2\pi}{360\tau \sin^2\beta} = 0.2309\,\mathrm{kg/s} \approx \underline{0.23\,\mathrm{kg/s}}$$

として，$\Phi \geq \Phi_1$ をみたす必要がある。

3.3 Φ_2 の計算

傾きが $\alpha_1 = 20.6\,°$ まで減少しても，バケツから水があふれ続けていると，このときバケツ内の水量は 1kg に達し，「てこ」の単振動の振幅は $23.6\,° - 20.6\,° = 3\,°$ となる。流量は $3\Phi_1$ を超えなければならない。よって，

$$\Phi_2 = 3 \times 0.23\,\mathrm{kg/s} = 0.69\,\mathrm{kg/s} \approx \underline{0.7\,\mathrm{kg/s}}$$

これは米つき機が機能しない最小の流量にほかならない。