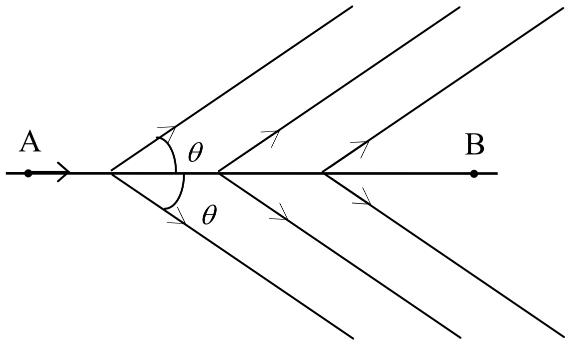
理論第２問　チェレンコフ光とリング像カウンター

光は真空中を速さcで伝播する。cより速く運動する粒子はない。しかし，透明な媒質の中を速さυで運動する場合，粒子は光より速く運動することがある。なぜなら, その媒質の屈折率がnであるならば, 光の速さが$\frac{c}{n}$になるからである。屈折率nの透明媒質のなかを速さυで運動する荷電粒子は, 実験（チェレンコフ, 1934 年）および理論（タムとフランク，1937 年）によると，$\upsilon > \frac{c}{n}$のとき，チェレンコフ光と呼ばれる放射を出す。この光は，粒子の軌跡に対して角度

$$\theta = \mathbf{arccos}\frac{1}{\beta n} \qquad (1)$$

をなす。ここで，$\beta = \frac{\upsilon}{c}$である。



1. 上記のことを確かめるため，右図のように，一定速度$\upsilon > \frac{c}{n}$で直線上を運動する粒子を考える。時刻 0 に点 A を通過し，時刻t_1に点 B を通過する。軌道 AB に対して回転対称なので，軌道 AB を含む一つの平面（この紙面）上での光線を考えれば十分である。

点 A と点 B の間の任意の点 C において, 粒子は球面波の光を出しながら進む。それぞれの球面波の波面は速さ$\frac{c}{n}$で伝播する。そうすると，ある時刻tでのチェレンコフ光の波面は，それらすべての球面波に接する面（包絡面）で表せる。

1.1. 時刻t_1におけるチェレンコフ光の波面と軌道 AB を含む平面（紙面）との交線を解答用紙の図中に作図せよ。

1.2. 粒子の軌道 AB と上で求めた交線とがなす角度φをnとβを用いて表せ。

2. 解答用紙の図のように，速さ$\upsilon > \frac{c}{n}$で直線 IS に沿って運動する荷電粒子ビームを考える。このときのチェレンコフ光の角度θは小さいとする。このビームは，凹面鏡に点 S で交わる。ただし，凹面鏡の焦点距離をf，凹面鏡の球面の中心を点 C とする。凹面鏡の中心軸 SC はビームの軌跡 SI と小さな角度αをなす。そうすると，凹面鏡の焦点面にチェレンコフ光によるリング状の像ができる。この

ことを解答用紙の図に作図して示せ。また，リング状の像の中心（点 O とする）の位置（つまり F と O の距離）およびリング像の半径 r を求めよ。

このような設定はリング像チェレンコフカウンター(RICH)と呼ばれる検出器で使われる。また，そこで使われる媒質を放射媒体(radiator)と呼ぶ。

注意: 以下の計算では，角度 α および θ は小さいので，これらの 2 乗以上の高次の項は無視してよい。

3. この荷電粒子ビームは，一定の運動量 $p = 10.0\,\mathrm{GeV}/c$ をもつ 3 種類の粒子，すなわち陽子(p)，K 中間子(K)，および π 中間子(π)が混ざっているものとする。

これらの粒子の静止質量は，それぞれ M_p=0.94 GeV/ c^2， M_K=0.50 GeV/ c^2，

M_π=0.14 GeV/ c^2 である。ここで， pc と Mc^2 はエネルギーの次元をもち，1 eV は 1 V の電圧で電子が加速されて得るエネルギーである。また，1 GeV= 10^9 eV, 1 MeV= 10^6 eV である。

圧力 P の空気を放射媒体として，この荷電粒子ビームがその空気中を進むとする。空気の屈折率は圧力 P （atm 単位で測る）に依存して次のように変わる：

$n = 1 + aP$ ，ここで $a = 2.7\times10^{-4}\ \mathrm{atm}^{-1}$ である。

3.1. 上記の 3 種類のそれぞれの粒子に対して，チェレンコフ光放射が起こる最低の気圧 $P_{\min}$ を atm 単位で求めよ。

3.2. K 中間子のリング像の半径が π 中間子のリング像の半径のちょうど半分になる空気の気圧 $P_{\frac{1}{2}}$ を atm 単位で求めよ。また，このとき K 中間子と π 中間子のチェレンコフ光の角度 θ_K および θ_π の値もそれぞれ計算せよ。

また，この空気の圧力では，陽子ビームのリング像は観察されるか？

4. ここで，荷電粒子ビームは完全には単色でないと仮定する。つまり，粒子の運動量が，10.0 GeV/ c のまわりにある幅でばらついている。そのばらつきの半値半幅（運動量の分布を表すピークの半分の高さのところの幅の半分）を Δp とする。このために各粒子のリング像が幅をもってしまう。つまり，チェレンコフ光の角度 θ の分布が半値半幅 $\Delta\theta$ をもつことになる。放射媒体である空気の圧力は問 3.2

で求めた $P_{\frac{1}{2}}$ であるとする。

4.1. K 中間子および π 中間子に対する $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ 値，つまり $\frac{\Delta\theta_K}{\Delta p}$ および $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$ を計算せよ。

4.2. K 中間子と π 中間子のそれぞれのリング像の間隔 $\theta_\pi - \theta_K$ が半値半幅の和 $\Delta\theta = \Delta\theta_K + \Delta\theta_\pi$ の 10 倍より大きいとき（つまり $\theta_\pi - \theta_K > 10\Delta\theta$ のとき），2 つのリング像をはっきりと区別できる。2 つの像がはっきり区別できるときの運動量のばらつき Δp の最大値を計算せよ。

5. チェレンコフは，放射線源の近くに置いた水の入ったビンを観察しているときに，チェレンコフ光を発見した。ビンのなかの水から光が放射されていたのである。

5.1. 静止質量 M の荷電粒子が水の中を通過するときにチェレンコフ光を発するためにもつべき最低の運動エネルギー $T_{\min}$ を求めよ。ただし，水の屈折率を $n = 1.33$ とする。

5.2. チェレンコフが使っていた放射線源は，静止質量 $M_\alpha = 3.8\ \mathrm{GeV}/c^2$ のα粒子(ヘリウム原子核)か静止質量 $M_\mathrm{e} = 0.51\ \mathrm{MeV}/c^2$ のβ粒子(電子)を放射する。α粒子とβ粒子に対する $T_{\min}$ の値を計算せよ。

また，放射線源から放射される粒子の運動エネルギーは数 MeV 以上にならないことを利用して，チェレンコフが観測した光を発した粒子は，α粒子なのか，β粒子なのか答えよ。

6. ここまでは，チェレンコフ光の波長 λ 依存性を無視してきた。これからは，1 個の粒子から放射されるチェレンコフ光がさまざまな波長をもつ連続スペクトルをもつことを考慮に入れる。その光は可視光の領域(波長が 0.4 μm から 0.8 μm)まで含んでいる。可視光の範囲内では，一定気圧の空気の屈折率 n は，波長が長くなるにつれて減少し，最短波長に対する $(n-1)$ の値は，最長波長に対する値より，2%だけ大きい。

6.1. 6 atm の空気中を一定の運動量 $10.0\ \mathrm{GeV}/c$ で運動する π 中間子のビームが放射するチェレンコフ光を考える。可視光の最短波長および最長波長に対するチェレンコフ光の角度 θ の差 $\delta\theta$ の値を計算せよ。

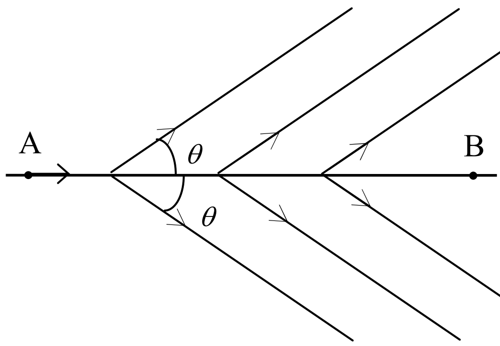
6.2. 以上のことをもとに，π 中間子のリング像に対する波長分布の影響を定性的に調べてみる。ただし，π 中間子ビームの運動量は，$p = 10\ \mathrm{GeV}/c$ を中心に半値半幅 $\Delta p = 0.3\,\mathrm{GeV}/c$ の分布をもつとする。

6.2.1. 可視光の波長の幅に起因するリング像の幅の半値半幅，および粒子の運動量のばらつきに起因するリング像の幅の半値半幅の値をそれぞれ計算せよ。

6.2.2. 上記の理由でリング像は幅をもつ。そのリング像の内側から外側にかけて色はどのように変るか，解答用紙の表に○印をつけて示せ。

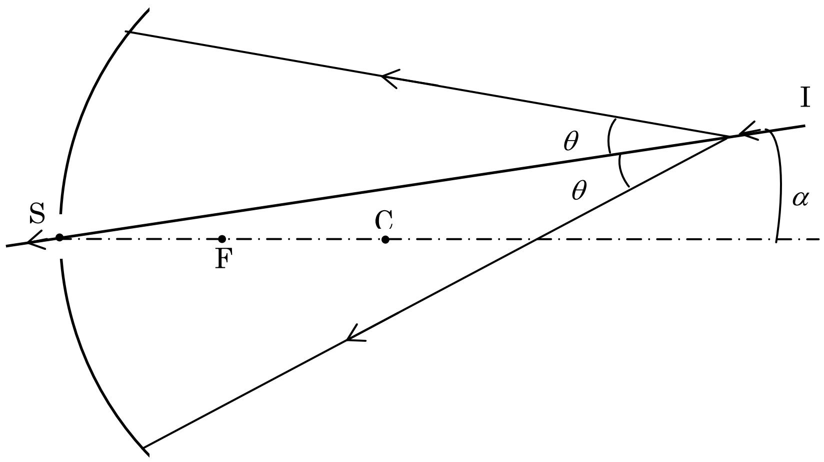
解答用紙

1. **1 pts**

1.1.	$t = t_1 > 0$ における放射光の波面と紙面との交線を描け。  	0.5
1.2.	$\varphi =$	0.5

2. **1.5 pts**

直線 IS に沿って，$\dfrac{c}{n}$ より速い速さで走る荷電粒子ビームのチェレンコフ放射光のリング像の作図。S は粒子ビームと凹面鏡との交点，F は凹面鏡の焦点，C は凹面鏡の球面の中心点。



リング像の中心点 O の位置，つまり，
点O と焦点 F との距離　　　　　FO = **............................**

リング像の半径　　　　　　　　r = **................................**

3. **2.5 pts**

3.1.	陽子に対して, P_{min} = ...	1.25
	K 中間子に対して, P_{min} = ...	
	π 中間子に対して, P_{min} = ...	
3.2.	$P_{\frac{1}{2}}$ = ... θ_κ = ... θ_π = ...	0.5 0.25 0.25
	陽子によるリング像は見えるか? Yes ☐ No ☐	0.25

4. **2 pts**

4.1.	$\frac{\Delta\theta_K}{\Delta p} =$ $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p} =$	1
4.2.	最大値 Δp	1

5. **1.75 pts**

5.1.	水の中でチェレンコフ効果が起こるために必要な粒子の最低運動エネルギー: $T_{\min} =$	1.0
5.2.	α 粒子の最低運動エネルギー: $T_{\min} =$	0.25
	β 粒子の最低運動エネルギー: $T_{\min} =$	0.25
	水中でチェレンコフ光を発した粒子は	0.25

6. **1.25 pts**

6.1.	$\delta\theta =$	0.5
6.2.	6.2.1. 可視光の波長分布の幅に起因するリングの幅の半分の値	0.25
	粒子の運動量のばらつきに起因するリングの幅の半分の値	0.25
	6.2.2. 色 • リングの内側の縁の色 • リングの中ほどの色 • リングの外側の縁の色 適切な欄に○印をつける。	0.25

	青	白	赤
リングの内側の縁の色			
リングの中ほどの色			
リングの外側の縁の色			

理論第２問　【解答】

1.

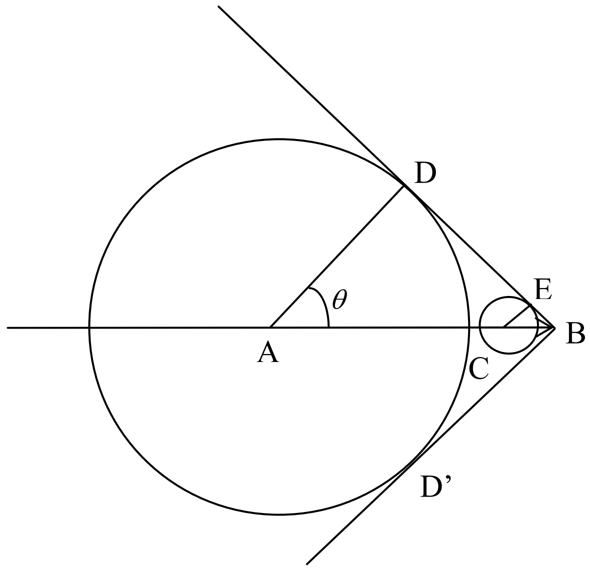


図 1

粒子の軌跡を含む平面で考えよう。粒子は時刻$t=0$に点 A の位置にあり，時刻$t=t_1$に点 B に達する。図 1 において，A から出た球面波の半径は，時刻$t=t_1$には AD となっている。また，AB 間の任意の点 C から出た球面波の半径は，時刻$t=t_1$には CE となっている。ここで，その半径 CE は，次に示すように中心 C と B の距離 CB に比例する。

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB}}=\frac{c(t_1-t)/n}{\upsilon(t_1-t)}=\frac{1}{\beta n}=\text{const.}$$

したがって，全ての球面波に接する包絡面は，B を頂点とする，半頂角$\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\beta n}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の円錐となる。（θは粒子の軌跡と光線のなす角）

1.1. 波面とこの紙面の交線は，2 つの（半）直線 BD と BD'。

1.2. 粒子の軌道と交線のなす角度は，$\underline{\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\beta n}}$

2. リング状の像ができることを示す作図は，粒子の軌跡と凹面鏡の中心軸を含む

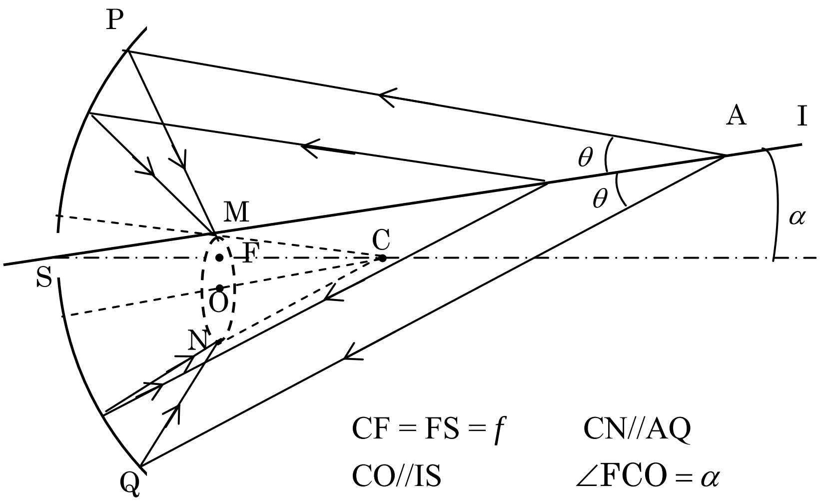
平面内で考える。また，問題文にもあるが，次の表記を用いる。

S – 荷電粒子のビームと凹面鏡の交わる点

F – 凹面鏡の焦点

C – 凹面鏡の球面の中心

IS – 荷電粒子のビームの軌跡。凹面鏡の中心軸と小さな角度 α をなす。



$\mathrm{CF} = \mathrm{FS} = f$ 　　CN//AQ

CO//IS 　　$\angle\mathrm{FCO} = \alpha$

図２ 　CM//AP 　　$\angle\mathrm{MCO} = \angle\mathrm{OCN} = \theta$

まず，C を通る直線を IS に平行に引く。この直線と焦点面は点 O で交わる。次に，C から，CO と θ の角度をなす直線を CO の両側に引き，それらと焦点面との交点をそれぞれ M，N とする。すると，粒子ビームから出る AP(//CM)方向のすべての光は M に集まり，AQ(//CN)方向のすべての光は N に集まる。三次元的に考えても同じように，ビームからある方向へ放射される全ての光は，C を通るその方向への直線と焦点面の交点に集まる。よって，図２の点線のように，焦点面上に O を中心として半径 OM のリング状の像ができることがわかる。

また，α と θ は小さな角度なので，$\mathrm{FO} \approx \underline{f\alpha}$，$r = \mathrm{MO} \approx \underline{f\theta}$ となる。

3.1 チェレンコフ光放射が起こるためには $v > \dfrac{c}{n}$ であることが必要なので，そのための最低の屈折率は，$n_{\min} = \dfrac{c}{v}$ である。$\xi_{\min} = n_{\min} - 1 = aP_{\min}$ とおくと，

$$\xi_{\min} = aP_{\min} = \frac{c}{v} - 1 = \frac{1}{\beta} - 1 \tag{1}$$

また，$K=\dfrac{Mc^2}{pc}$ とおくと，

$$K=\frac{Mc^2}{pc}=\frac{Mc}{p}=\frac{Mc}{\dfrac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \tag{2}$$

これより，β を K で表すと，

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \tag{3}$$

となる。ここで，K の値はそれぞれ $K=0.094$（陽子），0.05（K 中間子），0.014（π 中間子）なので，3 種類のどの粒子に対しても $K^2<<1$ である。K の 2 乗より高次の項を無視すると，(3)式は次のように表せる。

$$1-\beta=1-\frac{1}{\sqrt{1+K^2}}\approx\frac{1}{2}K^2=\frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \tag{3a}$$

$$\frac{1}{\beta}-1=\sqrt{1+K^2}-1\approx\frac{1}{2}K^2=\frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \tag{3b}$$

(3b)式を(1)式に代入すると，

$$P_{\min}=\frac{1}{2a}K^2 \tag{4}$$

これに上で求めたそれぞれの K の値を代入すれば，最低の気圧は次のように求まる。

$P_{\min}$ = <u>16 atm</u>　（陽子）
$P_{\min}$ = <u>4.6 atm</u>　（K 中間子）
$P_{\min}$ = <u>0.36 atm</u>　（π 中間子）

3.2　問題 **2.**より，リング像の半径は $r=\mathrm{MO}\approx f\times\theta$ と書ける。これより，K 中間子のリング像の半径が π 中間子のリング像の半径の半分であるから，$\theta_\pi=2\theta_K$ が成り立つ。2 倍角の公式

$$\cos\theta_\pi=\cos 2\theta_K=2\cos^2\theta_K-1 \tag{5}$$

より，

$$\frac{1}{\beta_\pi n}=\frac{2}{\beta_K^2 n^2}-1 \tag{6}$$

また ε を，

$$\varepsilon=1-\beta=1-\frac{1}{\sqrt{1+K^2}}\approx\frac{1}{2}K^2 \tag{7}$$

と定め，$\beta = 1-\varepsilon$ と $n = 1+\zeta$ を(6)式に代入する。このとき，ε と ζ は十分に小さいので，これらの 2 次以上の項は全て無視する。すると(6)式は，

$$1-\zeta+\varepsilon_\pi = 1-4\zeta+4\varepsilon_K$$

となり，題意を満たす $\zeta = \zeta_{\frac{1}{2}}$ と $P = P_{\frac{1}{2}}$ と n は，それぞれ次のように求まる。

$$\zeta_{\frac{1}{2}} = \frac{4\varepsilon_K - \varepsilon_\pi}{3} = \frac{1}{6}\left(4K_K^2 - K_\pi^2\right) = \frac{1}{6}\left[4\times(0.05)^2 - (0.014)^2\right]$$

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\zeta_{\frac{1}{2}} = \underline{6\,\mathrm{atm}}\,,\quad n = 1.00162$$

この n と前問で求めた K_K を $\theta = \arccos\frac{1}{\beta n} \approx \arccos\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}K^2\right)$ に代入すると，

$$\theta_K = \underline{1.6^\circ}\,,\quad \theta_\pi = 2\theta_K = \underline{3.2^\circ}$$

また，この空気の圧力では，

$$P_{\frac{1}{2}} = 6\,\mathrm{atm} < 16\,\mathrm{atm} = P_{\min}\quad \text{（陽子）}$$

なので，<u>陽子ビームのリング像は観察されない</u>。

4.1

$\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$ の両辺の対数をとって β で微分すると（以下，$d\theta \to \Delta\theta$，$d\beta \to \Delta\beta$ と表す），

$$\frac{\sin\theta\cdot\Delta\theta}{\cos\theta} = \frac{\Delta\beta}{\beta} \tag{8}$$

(3a)式の両辺の対数をとって微分すると，

$$\frac{\Delta\beta}{1-\beta} = 2\frac{\Delta p}{p} \tag{9}$$

を得る。(8)，(9)式より $\Delta\beta$ を消去すると，

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta p} = \frac{2}{\tan\theta}\frac{1-\beta}{p\beta}$$

となり，さらに (3b)式と近似 $\tan\theta \approx \theta$ を用いると，次のように書ける。

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta p} = \frac{2}{\tan\theta}\frac{1-\beta}{p\beta} \approx \frac{K^2}{\theta p} \tag{10}$$

K 中間子の場合は，$K_K = 0.05$，$\theta_K = 1.6^\circ = 1.6\frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}$ を代入して，

$$\frac{\Delta\theta_K}{\Delta p} = \frac{0.05^2}{1.6\frac{\pi}{180}\times 10\ \text{GeV}/c}\times\frac{180}{\pi} = \underline{0.51\,°/(\text{GeV}/c)}$$

π 中間子の場合は，$K_\pi = 0.014$，$\theta_\pi = 3.2° = 3.2\frac{\pi}{180}\text{rad}$ を代入して，

$$\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p} = \frac{0.014^2}{3.2\frac{\pi}{180}\times 10\ \text{GeV/c}}\times\frac{180°}{\pi} = \underline{0.02\,°/(\text{GeV}/c)}$$

4.2　2 つの像が区別できる条件は，

$$\Delta\theta < 0.1(\theta_\pi - \theta_K) = 0.16°$$

この $\Delta\theta$ は，

$$\Delta\theta = \Delta\theta_K + \Delta\theta_\pi = \frac{\Delta\theta_K + \Delta\theta_\pi}{\Delta p}\Delta p = \left(0.53\,°/(\text{GeV}/c)\right)\cdot\Delta p$$

と表されるので，Δp について解けば，次式を得る。

$$\Delta p < \frac{1}{10}\times\frac{1.6}{0.53} = \underline{0.3\,\text{GeV}/c}$$

5.1　チェレンコフ光放射が起こるために必要な β の最低の値は，

$$\beta = \frac{1}{n} = \frac{3}{4} \tag{11}$$

また，静止質量 M，エネルギー E の粒子の運動エネルギー T は，

$$T = E - Mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - Mc^2 = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right] \tag{12}$$

と表される。よって，(11)式の β を(12)式に代入して，チェレンコフ光を発するために荷電粒子がもつべき最低の運動エネルギー $T_{\min}$ を得る。

$$T_{\min} = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{16}}} - 1\right] = \underline{0.51\,Mc^2} \tag{13}$$

5.2　α 粒子は静止質量 $M_\alpha = 3.8\ \text{GeV}/c^2$，$\beta$ 粒子は静止質量 $M_e = 0.51\ \text{MeV}/c^2$ である。これらを(13)式に代入すると，$T_{\min}$ はそれぞれ次のようになる。

$$T_{\min}(\alpha\,粒子) = 0.51\times 3.8\ \text{GeV} = \underline{1.94\,\text{GeV}}$$

$$T_{\min}(\beta\,粒子) = 0.51\times 0.51\ \text{MeV} = \underline{0.26\,\text{MeV}}$$

また，放射線源から放射される粒子の運動エネルギーは数 MeV 以上にならないことから，チェレンコフが観測した光を発した粒子は，$\underline{\beta \text{粒子}}$。

6.1　一定の運動量をもつ荷電粒子のビームに対してθは,

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} \tag{14}$$

と表された。この両辺の対数をとってnで微分する（βは定数）と,

$$\frac{\sin\theta\cdot\delta\theta}{\cos\theta} = \frac{\delta n}{n} \quad . \tag{15}$$

となる。いま，δnは可視光の最短波長に対する空気の屈折率n_{v}，および最長波長に対する屈折率n_{r}の差$\delta n = n_{\mathrm{v}} - n_{\mathrm{r}}$である。題意より,

$$n_{\mathrm{v}} - 1 = (1 + 0.02)(n_{\mathrm{r}} - 1)$$

$$\therefore \quad \delta n = n_{\mathrm{v}} - n_{\mathrm{r}} = 0.02(n_{\mathrm{r}} - 1) \approx 0.02(n - 1)$$

と表される。問題 3.2 より，$P = 6$ atm の空気に対して$\theta_{\pi} = 3.2° = 3.2\dfrac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}$，$n = 1.00162$ を用いると，$\delta\theta$は次のように求められる。

$$\delta\theta = \frac{\delta n}{n\tan\theta} \approx \frac{\delta n}{\theta} = \frac{0.02\times(1.0016-1)}{3.2\times\dfrac{\pi}{180}} \times \frac{180}{\pi} = \underline{0.033\,°}$$

ここで，$\tan\theta \approx \theta$，$n \approx 1$と近似した。

6.2.1 可視光の波長の幅に起因するリング像の幅の半値半幅は, 問題 6.1 で求めた$\delta\theta$の半分なので,

$$\frac{1}{2}\delta\theta = \underline{0.017\,°}$$

運動量の幅に起因するリング像の幅の半値半幅は，問題 4.1 で得られた関係式$\dfrac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} = 0.02\,°/(\mathrm{GeV}/c)$と，運動量の半値半幅$\Delta p = 0.3\,\mathrm{GeV}/c$を用いて,

$$0.02\,°/(\mathrm{GeV}/c)\times 0.3\,\mathrm{GeV}/c = \underline{0.006\,°}$$

と計算できる。これは，波長に起因するリング像の幅のばらつきの 3 分の 1 程度である。

6.2.2 波長が短くなるにつれ，空気の屈折率nは大きくなる。nが大きくなると，関係式$\cos\theta = \dfrac{1}{\beta n}$より，$\theta$は大きくなる。したがって，リング像の内側から外側に向かうにつれて，放射される光の波長は短くなる。このことを解答用紙の表に書き込むと，

- リングの内側の縁の色
- リングの中ほどの色
- リングの外側の縁の色

となる。

	青	白	赤
リングの内側の縁の色			○
リングの中ほどの色		○	
リングの外側の縁の色	○		