

## 一般的な指示: 理論試験 (30 点)

以下の条件を満たさない場合、失格となる場合があります。

2025 年 7 月 21 日

理論試験は 5 時間で、合計 30 点満点。

試験の開始と終了がアナウンスされるほか、1 時間ごとに経過時間が示され、試験終了の 30 分前、15 分前、5 分前も示される。

指示があるまで封筒を開けないこと。

机上に用意された次のものを使うことができる: (1) ボールペン、(2) シャープペンシル、(3) 消しゴム、(4) 目盛り付き定規、(5) コンパス、(6) 科学計算用電卓。

### 試験中

- 用意されたボールペンを使うこと。メモ、図、表、グラフの下書きにシャープペンシルを使う場合は、必ず最終版のアウトラインをボールペンでなぞること。
- 最終的な解答には、**A** と書かれたシートを使用し、適切な箇所に解答と必要な考察を記入すること。必要な (求められた) グラフを描くこと。採点して欲しくない不要な答えは取り消し線で消すこと。
- 作業用に、**W** と書かれた白紙のワーキングシートが用意されている。指定されたものを使用すること。必要のない解答や採点の必要のない下書きは取り消し線で消すこと。各シートの表の面のみを使用し、枠外の余白には記入しないこと。
- 希望すれば、**Z** と書かれた追加のワーキングシートを使用できる。「Help」の旗を上げて、試験監督に知らせること。
- 解答は簡潔で読みやすくすること。方程式、論理演算子、記号、スケッチなど、あなたの考えを最もよく伝えるものを使うこと。採点者は多言語に対応していない可能性があるため、長文や冗長な表現は避けること。
- 特に指定がない限り、不確かさ (誤差) の定量的評価は必要ない。
- 許可なくブースを離れないこと。トイレ休憩やその他のサポートが必要な場合は、「Toilet」「Water」「Help」と書かれた旗を上げて知らせること。

### 試験終了時

- 試験の終了が告げられたら、すぐに筆記をやめること。
- すべてのシートを窓付き封筒に入れる。表向きに、上から、カバーシート、一般的指示、問題用紙 (**Q**)、解答用紙 (**A**)、作業用紙 (**W**)、(もし、あれば) 追加作業用紙 (**Z**) の順に重ねる。また、それぞれはページ番号順にする。最終チェックでは、カバーシートの ID、氏名、座席番号が封筒の窓から見えることを確認する。
- 退出は試験官が指示する。回収されなかったもの、例えば、ボールペン、シャープペンシル、目盛り付き定規、消しゴム、コンパス、電卓、飲料水のボトル、スナックなどを持って退出すること。

### 特に注意すること

試験では、特に断りのない限り、常に指示された物理量を用いること。すべての場合に、使用するすべての物理量の単位を示すこと。

## 一般データシート

定数	表記	数値	単位
真空中の光速	$c$	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
プランク定数	$h$	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
換算プランク (ディラック) 定数	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ボルツマン定数	$k_B$	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
アボガドロ定数	$N_A$	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
(モル) 気体定数	$R$	8.314 462 618 153 24	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
電気素量 (素電荷)	$e$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
万有引力定数	$G$	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
標準重力加速度	$g$	9.806 65	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
ステファン・ボルツマン定数	$\sigma$	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
真空の透磁率 (磁気定数)	$\mu_0$	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
真空の誘電率 (電気定数)	$\epsilon_0$	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
リュドベリ定数	$R_\infty$	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	$\text{m}^{-1}$
電子の質量	$m_e$	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
陽子の質量	$m_p$	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
中性子の質量	$m_n$	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
原子質量定数	$m_u$	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
電子ボルト	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

## 水素と銀河 (10 点)

この問題は、銀河のダイナミクスや構造といった銀河特有の物理を調べることを目的としている。特に、我々自身が銀河系の中に居ながら、銀河系内の質量分布を測定する方法を説明する。そのために、銀河の主成分である水素に注目する。

この問題では、 $\hbar = h/2\pi$  として定義される  $\hbar$  を使う。

### パート A - イントロダクション

#### ボーア模型

水素原子は陽子とその周りを非相対論的に円軌道運動する質量  $m_e$  の電子で構成されると仮定する。

**A.1** 半径  $r$  の円軌道における電子の速度  $v$  を求めよ。 0.2pt

ボーア模型では、電子の角運動量  $L$  は、整数  $n > 0$  を使って  $L = n\hbar$  と量子化されていると仮定する。

また、 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$  と定義する。

**A.2** 各円軌道の半径は  $r_n = n^2 r_1$  で与えられることを示せ。ここで  $r_1$  はボーア半径と呼ばれる。 $r_1$  を、 $\alpha$ 、 $m_e$ 、 $c$ 、および  $\hbar$  によって表し、その数値を求めよ。半径  $r_1$  の軌道上の速度  $v_1$  を、 $\alpha$  と  $c$  を用いて表せ。 0.5pt

**A.3** 半径  $r_n$  の円軌道上の電子の力学的エネルギー  $E_n$  を、 $e$ 、 $\epsilon_0$ 、 $r_1$ 、および  $n$  によって表せ。基底状態での  $E_1$  を、 $\alpha$ 、 $m_e$ 、および  $c$  によって表せ。また、その数値を eV の単位で求めよ。 0.5pt

#### 水素の微細構造と超微細構造

水素原子1個あたり1000万年に1度というほど稀にしか起きないが、電子のスピンが自発的に反転により、光子が放出される。この放射は宇宙における水素のトレーサーとして機能するため、天体物理学の基礎となっている。この放射を引き起こす遷移を2つのステップに分けて調べよう。

まず、電子のスピンと電子と陽子の相対運動との相互作用を考える。電子から見ると、陽子は電子の周りを半径  $r_1$  で回っている。これにより磁場  $\vec{B}_1$  が発生する。

**A.4** 電子の位置における磁場  $\vec{B}_1$  の強度  $B_1$  を、 $\mu_0$ 、 $e$ 、 $\alpha$ 、 $c$ 、および  $r_1$  を使って表せ。 0.5pt

第二に、電子のスピンは磁気モーメント  $\vec{\mathcal{M}}_s$  を生成する。その大きさはおよそ  $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$  である。微細 (F) 構造は、磁気モーメント  $\vec{\mathcal{M}}_s$  が  $\vec{B}_1$  に平行な電子と、反平行な電子とのエネルギーの差  $\Delta E_F$  に関係している。同様に、超微細 (HF) 構造は、電子と陽子の平行・反平行磁気モーメント間の相互作用によるエネルギー差  $\Delta E_{HF}$  に関係している。 $\Delta E_{HF}$  は、 $m_p$  を陽子の質量として、 $\Delta E_{HF} \approx 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$  であることが分かっている。

**A.5**  $\Delta E_F$  を、 $\alpha$  と  $E_1$  の関数として表せ。超微細構造の2つの状態間の遷移に対応する波長  $\lambda_{HF}$  を表し、その数値を有効数字2桁で求めよ。 0.5pt

### パート B - 銀河の回転曲線

#### データ

- キロパーセク:  $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- 太陽質量:  $1 M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

中心を点  $O$  とする球状の銀河を考える。任意の点  $P$  において、 $\rho = \rho(P)$  を体積あたりの質量密度、 $\varphi = \varphi(P)$  を重力ポテンシャル（つまり、単位質量あたりのポテンシャルエネルギー）とする。 $\rho$  と  $\varphi$  は、ともに  $r = \|\vec{OP}\|$  にもみ依存する。ポテンシャル場  $\varphi$  のもとで、 $P$  に位置する質量  $m$  の質点は  $O$  を含む平面上を運動する。

- B.1** 円軌道の場合について、点  $P$  における質量  $m$  の質点の速度  $v_c$  を、 $r$  と  $\frac{d\varphi}{dr}$  によって表せ。 0.2pt

図 1(A) は、渦巻銀河 NGC 6946 の可視域での写真である（アリゾナ州マウント・レモンスカイ・センターの 0.8m Schulman 望遠鏡による）。図 1(B) の丸印は、この銀河の  $v_c$  の測定値である。中心領域 ( $r < 1 \text{ kpc}$ ) はバルジと呼ばれ、この領域では、質量分布はほぼ均一である。赤で示した曲線は、バルジでは均一な質量分布で、その外側での運動はケプラー的 ( $\beta > 0$  として、 $\varphi(r) = -\beta/r$ )、つまり銀河の全質量がバルジに集中しているとした場合の  $v_c$  の予測値である。

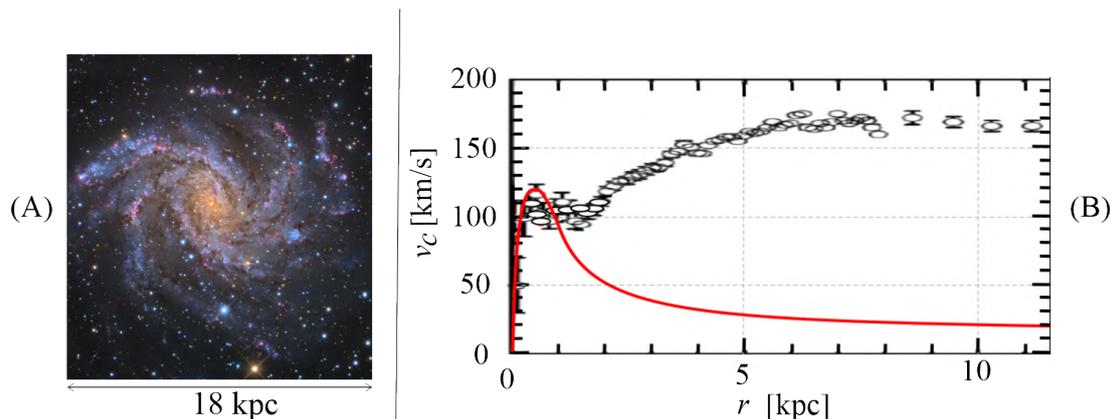


図 1: NGC 6946 銀河：写真 (A) と回転曲線 (B)。

- B.2** 図 1(B) の赤で示した回転曲線から、NGC 6946 のバルジの質量  $M_b$  を太陽質量単位で求めよ。 0.5pt

バルジの重力によるケプラー運動を仮定したモデルと観測データを比較することで、天文学者たちは、質量の一部は写真では見えていないのだと確信している。そこで天文学者たちは、銀河の実際の質量密度は次の式で与えられると仮定した：

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

ここに  $C_m > 0$  と  $r_m > 0$  は定数である。

**B.3** 式1の質量密度に対応する速度プロファイルは  $v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan(\frac{r}{r_m})}{r}}$  と書ける 1.8pt  
ことを示せ。 $k_1$ と $k_2$ を, $C_m$ , $r_m$ , および $G$ で表せ。

(ヒント:  $\int_0^r \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$ , および  $x \ll 1$  では  $\arctan(x) \approx x - x^3/3$ )

$r \ll r_m$  の場合および  $r \gg r_m$  の場合について,  $v_{c,m}(r)$  を簡略化せよ。

$r \gg r_m$  の場合, 式1で与えられる質量密度を持つ半径の球内の質量  $M_m(r)$  は単純化されて,  $C_m$  と  $r$  だけに依存することを示せ。

図1(A)の写真に実際に存在する銀河 NGC 6946 の質量を推定せよ。

### パート C - 銀河系の質量分布

渦巻き銀河の場合, 式1のモデルは修正され, 重力ポテンシャルは  $\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$  で与えられると考える。ここで,  $z$  は銀河面 ( $z=0$  と定義する) までの距離,  $r < r_0$  は軸半径,  $\varphi_0 > 0$  は決定されるべき定数である。

**C.1** このようなポテンシャル場における質量  $m$  の質点の鉛直運動について,  $r$  が一定であると仮定して,  $z$  についての方程式を求めよ。 $r < r_0$  の場合, 銀河面は安定平衡であることを, 平衡状態からわずかにずれた振動数  $\omega_0$  の微小振動のを考えることによって示せ。 0.5pt

ここからは,  $z=0$  として考える。

**C.2**  $r \gg r_m$  または  $r \ll r_m$  のいずれかの場合には, 式1のモデルは, 適当な  $\varphi_0$  のもとに  $\varphi_G(r, 0)$  の形のポテンシャルになる。この条件では,  $v_c(r)$  は, もはや  $r$  に依存しない。このことを  $\varphi_0$  を用いて示せ。 0.6pt

したがって, バルジの外側では, 速度  $v_c$  は銀河系中心までの距離に依存しない。天文学者たちがしている様に, この事実を利用して, 銀河系自身の中に居ながら, 銀河系内の質量分布を求めてみよう。

観測対象としてここで考えている, 星やガス雲などの銀河系内の天体は, 水素を主成分としている。バルジの外側では, これらは銀河中心  $C$  を中心とする円軌道を回っていると仮定する。 $S$  は太陽の位置,  $E$  は水素のスペクトルを発している天体の位置である。銀河面において, 観測の方位に対応する視線  $SE$  を考え, その方向の単位ベクトルを  $\hat{u}_v$  とする (図2参照)。

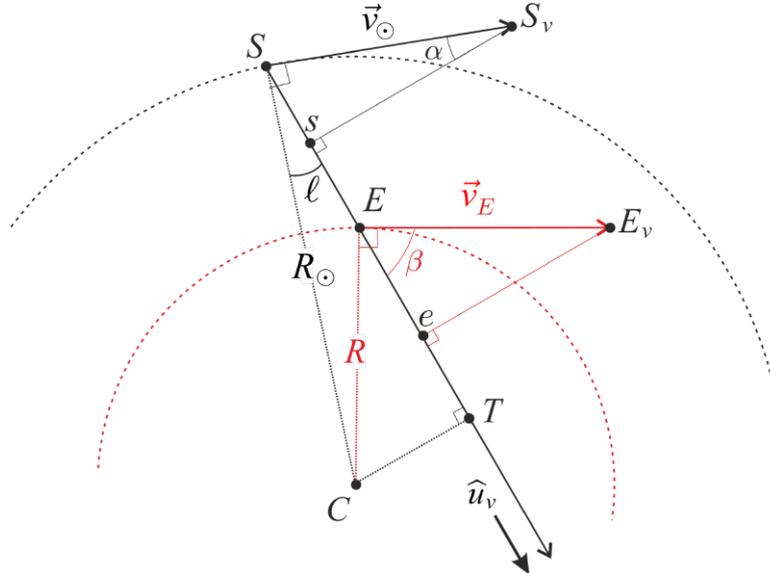


図 2：観測の幾何形状

$\ell$  を、 $SC$  と  $SE$  の間の角である、 $E$  の銀経とする。半径  $R_{\odot} = 8.00 \text{ kpc}$  の円軌道上の太陽の速度を  $\vec{v}_{\odot}$  とする。 $E$  は、半径  $R$  の別の円上を速度  $\vec{v}_E$  で公転している。先に調べた  $21 \text{ cm}$  線のドップラー効果を用いると、 $\vec{v}_E - \vec{v}_{\odot}$  を視線上に投影した、太陽  $S$  に対する  $E$  の視線方向速度  $v_{rE/S}$  を求めることができる。

**C.3**  $v_{rE/S}$  を、 $\ell$ 、 $R$ 、 $R_{\odot}$ 、および  $v_{\odot}$  を用いて表せ。次に、 $R$ 、 $R_{\odot}$ 、 $v_{\odot}$ 、 $\ell$ 、 $v_{rE/S}$  を用いて表せ。 0.7pt

電波望遠鏡を使い、銀河系の面内で銀経  $\ell = 30^\circ$  方向の観測を行った。使用した周波数帯は、周波数が  $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$  である  $21 \text{ cm}$  線を含むものである。その結果を図 3 に示す。

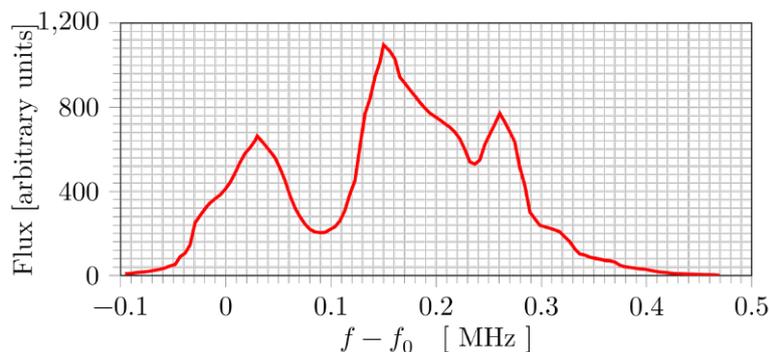


図 3：EU-HOU RadioAstronomy（電波天文学ハンズオン・ユニバースヨーロッパ）を使用して測定した、 $\ell = 30^\circ$  方向の  $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$  からの周波数シフトの関数としての電波フラックス

**C.4** 我々の銀河系では、 $v_{\odot} = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  である。図 3 で観測されている 3 天体の視線速度（有効数字 3 桁）と銀河中心からの距離（有効数字 2 桁）を求めよ。距離は  $R_{\odot}$  を単位として表せ。 0.6pt

- C.5** 銀河系の立面図（解答欄）に、図3で観測された天体の位置を示せ。 0.6pt  
このような観測を  $\ell$  を変えながら行うことによって、何が演繹されるだろうか？

### パートD-タリー-フィッシャー関係とモンド理論

図1のNGC6946の中心から遠方での平坦な回転速度曲線は、図4（左）に見られるように、渦巻銀河によく見られる共通の特徴である。各銀河の全質量 ( $M_{\text{tot}}$ ) の関数として中心から遠方での等速の回転速度 ( $v_{c,\infty}$ ) をプロットすると、タリー-フィッシャー関係と呼ばれる興味深い相関関係が得られる（図4（右）参照）。

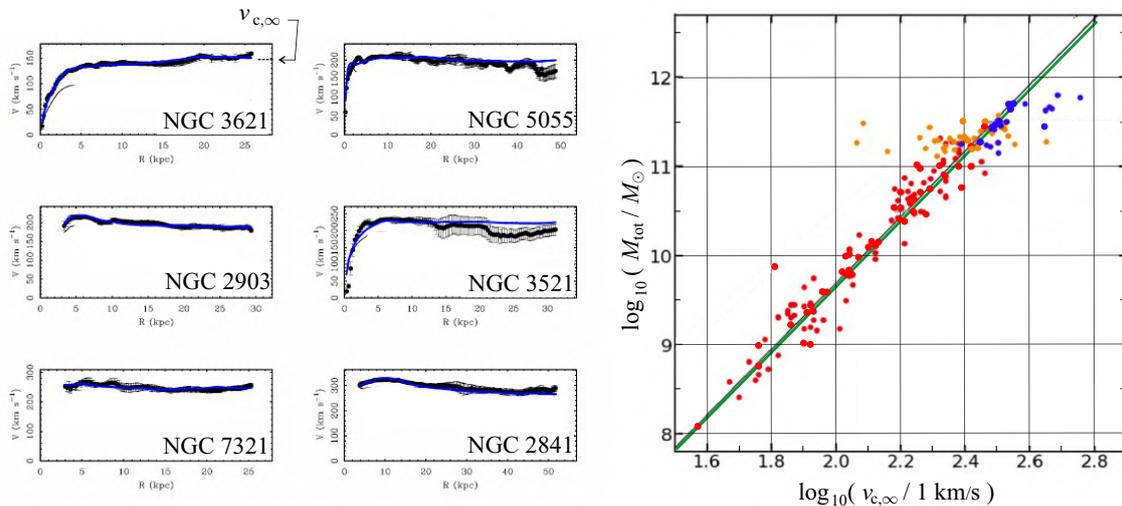


図4. 左: 典型的な渦巻銀河の回転曲線 - 右:  $\log_{10}(v_{c,\infty})$  の関数としての  $\log_{10}(M_{\text{tot}})$  (直線スケール)。色のついた点は、異なる銀河と異なるサーベイに対応している。緑の線はタリー-フィッシャー関係式、黒い線はデータのベストフィット。

- D.1** 銀河の半径  $R$  が質量に依存しないと仮定して、式1（パートB）のモデルが  $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$  のような関係を与えることを示せ。ここで、 $\gamma$  と  $\eta$  は指定されるべきパラメータである。 0.4pt  
 $\gamma_{TF}$  を計算して、この式をタリー-フィッシャーの関係と比較せよ。

MODified Newtonian Dynamics (MOND) 理論は、 $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  のオーダーという極めて小さい加速度領域では、ニュートンの第二法則を、 $\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$  ( $a = \|\vec{a}\|$  は加速度の大きさ、 $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ ) の形に修正できることを示唆している。

- D.2** 図1のNGC 6946のデータを使って、ニュートンの理論の範囲内で、NGC 6946 近傍の質点の加速度の大きさ  $a_m$  を求めよ。 0.2pt

- D.3**  $m$  を、固定質量  $M$  の重力場において速度  $v_{c,\infty}$  で半径  $r$  の円軌道を回る質量とする。  $a \ll a_0$  とする MOND 理論の範疇で、タリー-フィッシャー指数を決定せよ。 0.8pt  
NGC 6946のデータおよび/またはタリー-フィッシャーの法則を用いて、 $a_0$  を計算し、MONDが適用可能な領域にあることを示せ。



- D.4** MOND 理論に基づいて、半径  $R_b$  内に均質に分布した質量  $M$  による重力場での、任意の  $r$  における  $v_c(r)$  を表せ。 0.9pt

## コックスの時計 (10点)

1765年、イギリスの時計職人ジェームズ・コックスは、気圧の変動のみをエネルギー源とする時計を発明した。コックスの時計は、水銀を入れた2つの容器を使用する。気圧の変化によって水銀が容器の間を移動し、2つの容器が相対的に動く。この動きが時計のエネルギー源となっている。

この問題ではこの装置を解析する。全体を通して、以下のように仮定する。

- 地球の重力場  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  は一様、 $g = 9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 、 $\vec{u}_z$  は単位ベクトルである；
- すべての液体は非圧縮性であり、その密度は  $\rho$  と表す；
- 表面張力の影響は考慮しない；
- 高さによる気圧の変化は無視する；
- 周囲の温度  $T_a$  は一様で、すべての変化は等温である。



図1. コックスの時計のアートワーク

### パートA - 水没したチューブを引っ張る

まず、半無限空間  $z \leq 0$  を占める水槽を考える。その上の空気の圧力は  $P_a = P_0$  である。長さ  $H = 1\text{m}$ 、断面積  $S = 10\text{cm}^2$ 、質量  $m = 0.5\text{kg}$  の円筒形の鉛直な管(チューブ)が水槽に浸かっている。管の下端は開いており、管の上端は閉じている。管の上端の高さを  $h$  とし、管内の水の高さを  $z_\ell$  とする。管壁の厚さは無視する。

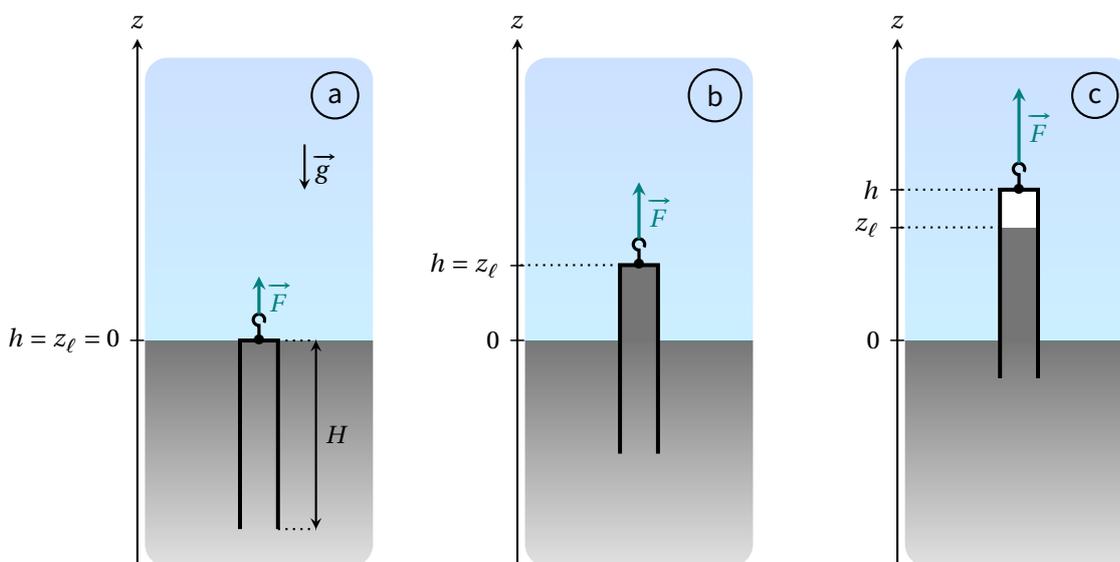


図2. いろいろな場合のチューブのスケッチ

図2のチューブに空気が入っておらず、上端が液面の高さにある状態、 $h = 0$ 、 $z_\ell = 0$  (図2a) から始める。次に、チューブを下端が液面に達するまでの範囲でゆっくりと持ち上げる。チューブに働く引っ張り力を

$\vec{F} = F \vec{u}_z$  とする。

- A.1** 図 2b に示す場合について、管頂部の水中の圧力  $P_w$  を求めよ。また、管をこの位置に維持するために必要な力  $\vec{F}$  を、 $P_0$ 、 $\rho$ 、 $m$ 、 $S$ 、 $h$ 、 $g$  と  $\vec{u}_z$  で表せ。 0.2pt

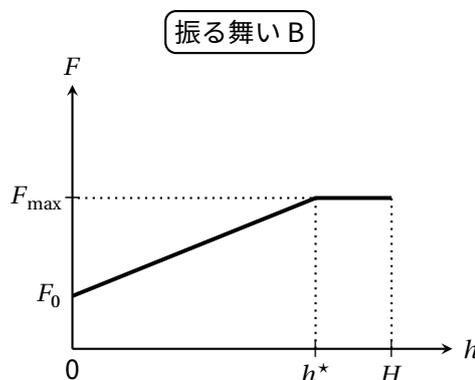
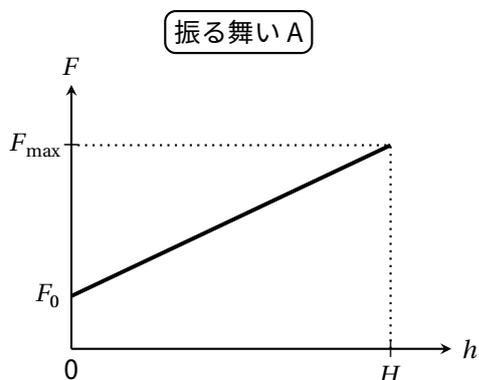
3つの実験を行った。それぞれ、図 2a に示す初期状態から、表 1 に示す条件で管を持ち上げる。

実験	液体	$T_a$ (°C)	$\rho$ (kg·m <sup>-3</sup> )	$P_{\text{sat}}$ (Pa)
1	水	20	$1.00 \times 10^3$	$2.34 \times 10^3$
2	水	80	$0.97 \times 10^3$	$47.4 \times 10^3$
3	水	99	$0.96 \times 10^3$	$99.8 \times 10^3$

表 1. 各実験の実験条件と数値データ

( $P_{\text{sat}}$  は純粋液体の飽和蒸気圧)

外部圧力を  $P_a = P_0 = 10^5$  Pa として、それぞれの場合に、チューブを高度  $h$  で平衡状態に保つために加えなければならない力  $F$  の変化を調べる。2つの異なる振る舞いが考えられる。



- A.2** 各実験について、解答用紙の表に、予想される振る舞いと、 $F_{\text{max}}$  と、(該当する場合)  $h^*$  の数値を記入して表を完成せよ。 $F_{\text{max}}$  と  $h^*$  の定義は図の通りである。 0.8pt

水を水銀（その特性を下に示す）に置き換えると、振る舞い B が観測される。

液体	$T_a$ (°C)	$\rho$ (kg·m <sup>-3</sup> )	$P_{\text{sat}}$ (Pa)
水銀	20	$13.5 \times 10^3$	0.163

- A.3**  $P_0$  と比較して  $P_{\text{sat}}$  を無視して最大の力  $F_{\text{max}}$  を評価した場合に生じる相対誤差  $\varepsilon$  の表式を求め、 $\varepsilon$  の数値を求めよ。 0.3pt

ここからは、水銀（密度  $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ）を用いるとし、周囲温度  $T_a = 20^\circ\text{C}$  とする。また、 $P_{\text{sat}} = 0$  を仮定する。

図3のような、異なる寸法の2つの円筒をつないだモデルにより、上部にリザーバーがある2層チューブを考えよう。

- 下部（やはりチューブと呼ぶ）の断面積は  $S_t$  で、高さは  $H_t = 80 \text{ cm}$  である；
- 上部（バルブと呼ぶ）の断面積は  $S_b > S_t$  で、高さは  $H_b = 20 \text{ cm}$  である。

この2層チューブを半無限の液体に浸す。

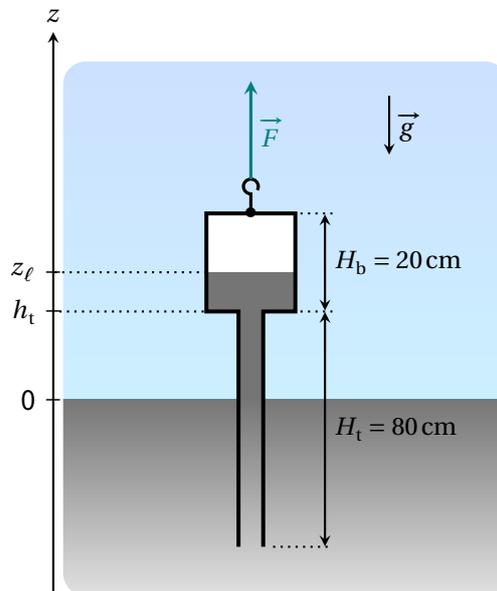


図3. 2層チューブのスケッチ

パートAと同様に、チューブに空気が入らないようにする。チューブとバルブの接合部の高さ  $h_t$  によって、チューブの垂直位置を示す。水銀柱の高さをここでも  $z_l$  とする。図3に示した状態でチューブを平衡に保つために必要な力  $\vec{F}$  は、次のように書くことができる。

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}}) g \vec{u}_z \quad (1)$$

ここで、 $m_{\text{tb}}$  は2層チューブの全質量（水銀がない場合）である。

- B.1** 解答用紙で、式(1)の項  $m_{\text{add}}$  に対応する液体水銀の体積に相当する部分を色を付けることにより示せ。 0.3pt

質量  $m_{\text{add}}$  は、高さ  $h_t$  と大気圧  $P_a$  の両方に依存する。次の問いでは、大気圧は  $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$  で一定と仮定する。系が完全に浸された状態から出発して、底（最下端）が液面と同じ高さにならない範囲でチューブをゆっくりと持ち上げる。

- B.2**  $h_t \in [-H_b, H_t]$  の範囲の  $h_t$  の関数として、質量  $m_{\text{add}}$  の変化をスケッチせよ。グラフには、 $P_0$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $S_b$ ,  $S_t$ ,  $H_b$ ,  $H_t$  により、各セグメントの傾きと、折れ曲がりの点の  $h_t$  を示せ。 1.4pt

$P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$  の下で持ち上げ、液体の自由表面がバルブの中央に来たところで止める。 $h_t$  をこの値に保ち、次の式で表される大気圧の変動による質量  $m_{\text{add}}$  の変動を考察する。

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

ここで、 $P_0$  は平均値、 $P_1$  は摂動項である。振幅  $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ 、周期  $\tau_1$  を1週間とする周期的な三角波関数によって  $P_1$  をモデル化する。

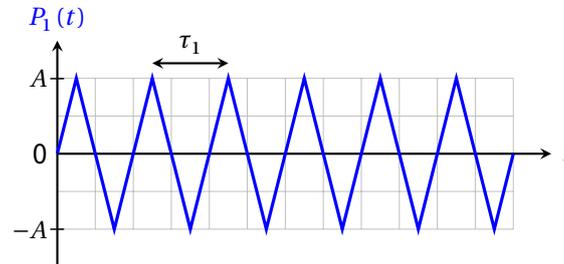


図 4. 摂動項  $P_1(t)$  の簡略モデル

**B.3**  $S_t = 5 \text{ cm}^2$ 、 $S_b = 200 \text{ cm}^2$  として、質量  $m_{\text{add}}$  の時間的変動の振幅  $\Delta m_{\text{add}}$  を表し、その数値を求めよ。液面は常にバルブに対応する位置にあることを仮定せよ。 0.3pt

### パート C - コックスの時計

コックスが開発した時計の実際のメカニズムは複雑である (図 5)。ここでは、以下に説明する、図 6 に描かれた単純化されたものを考える。

- 水銀を入れた円筒形の容器 (槽)；
- B で解析したものと同一の 2 層構造のチューブを、空気が完全でない状態で容器の水銀に浸す；
- 容器と 2 層構造のチューブは、それぞれ 1 本のケーブルで吊り下げられている。両ケーブル (伸び縮みせず質量は無視できると仮定) は、理想的なプーリーを経て、水平面上を移動できる一つの錘  $M$  の両側に取り付けられている；
- システムに含まれる液体水銀の総量は  $V_\ell = 5 \text{ L}$  である。

各部分の高さ、断面積、質量を表 2 に示す。錘  $M$  の位置は、その質量中心の座標  $x$  によって示す。ここでは、静的係数と動的係数を区別せずに、水平な支持板と錘  $M$  との固体間摩擦を考え、滑るとき力の大きさを  $F_s$  とする。

$-X \leq x \leq X$  ( $X > 0$ ) となるように、2 つの滑り止めが、錘  $M$  の変位を制限する。 $X$  の値は以下を満たすと仮定する。

- 2 層構造チューブの底が槽 (水銀容器) の底に触れることも、液中から出ることもない；
- 水銀柱の高さ  $z_\ell$  は常に上部のバルブ中に対応する。



図 5. 本物のコックスの時計<sup>2</sup> (水銀はなし)

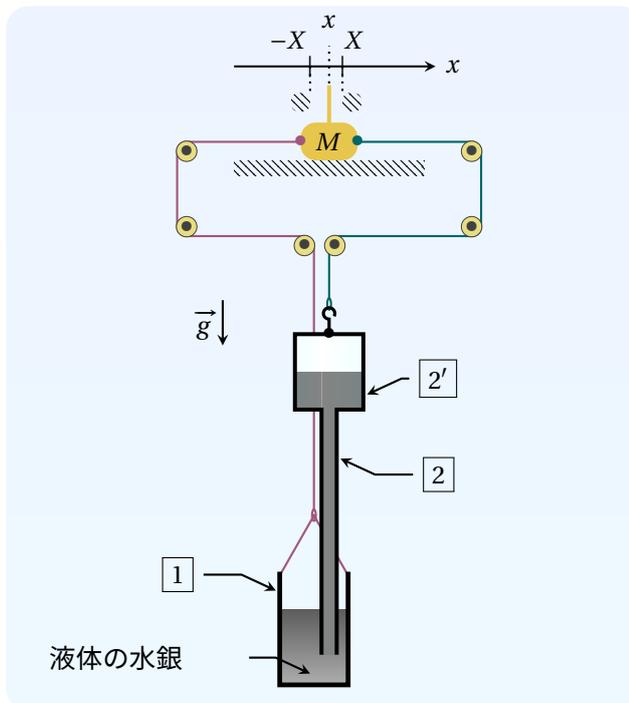


図 6. コックスの時計のモデルのスケッチ

凡例	名称	高さ	断面積	空のときの質量
1	槽 (水銀容器)	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	$m_c$
2	2層式チューブの下部	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	2層式チューブ の全質量: $m_{tb}$
2'	2層式チューブのバルブ部分	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

表 2. モデルシステムの大きさと記号

このシステムは、図 4 のように圧力が変動する大気の下で動作する:  $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ 、周期は  $\tau_1 = 1 \text{ week}$ 。開始時  $t = 0$  では、錘  $M$  は  $x = 0$  で静止しており、 $P_1(0) = 0$  で、錘  $M$  の両側にある 2 本のケーブルが及ぼす張力は釣り合っている。 $\xi$  を次のように定義する。

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \approx \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

ここで、最右辺は  $S_t \ll S_b, S_c$  を用いた (この仮定は問題の最後まで成り立つとする)。

C.1  $\xi > \xi^*$  のときには錘  $M$  が静止したままであるような閾値  $\xi^*$  を求めよ。 1pt

次の問いに限り、錘  $M$  が  $x = X$  で一時的にブロックされているとする。

- C.2** 錘  $M$  がこの位置にあり、 $P_1 = 0$  のとき、2本のケーブルが錘  $M$  に及ぼす総張力  $\vec{T} = T \vec{u}_x$  を  $\rho, g, X$  と必要な断面積を用いて表せ。 1pt

$\xi < \xi^*$  の場合、 $x = 0, P_1 = 0$  からスタートすると、 $t \geq 0$  に対して2つの異なる振る舞いが観測される。この2つを区別するために、もう1つのパラメータ  $\lambda$  を導入する必要がある。

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

- C.3** 各状態が得られる条件を示すように解答用紙の表を完成させよ。条件は  $\xi$  および/または  $\lambda$  の不等式で表せ。さらに、 $t \in [0, 3\tau_1]$  における  $P_1(t)/A$  の変化と対応する  $x(t)/X$  の変化をスケッチせよ。点の座標の特定は必須ではない。 2pt

実際のコックスの時計では、装置から得られるエネルギーはラチェットを使用して蓄積され、伝統的な時計のようにカウンターウェイトを上昇させるために使用される。ここで採用している簡略化されたモデルでは、時計が得るエネルギーは、水平面が質量  $M$  に及ぼす摩擦力によって散逸するエネルギーに対応する。これ以降では、時計がエネルギーをこのように回収できる領域で動作するような大きさのシステムであると仮定する。また、恒久的に動作する状態にあると仮定する。 $i$  1 周期  $\tau_1$  中に固体摩擦力によって散逸されるエネルギーを  $W$  とする。 $W$  は、 $F_s$  と  $X$  だけで表すことができる。

他の条件が同じであれば、 $F_s$  と  $X$  は、エネルギー  $W$  を最大化するように調整できる; $F_s^*$  と  $X^*$  を、最適な状況におけるそれぞれの値とする。

- C.4**  $S_b \simeq S_c$  と  $S_t \ll S_b$  を考慮し、 $F_s^*$  と  $X^*$  の式を  $\rho, g, S_c$  と  $A$  の関数として決めよ。対応する最大エネルギー  $W^*$  を求め、 $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$  として、その数値を計算せよ。 1pt

1 周期 の間に最適な状態でシステムが受け取る大気圧の力の仕事を  $W_{\text{pr}}^*$  とする。

- C.5**  $W_{\text{pr}}^*$  を求め、比  $W^*/W_{\text{pr}}^*$  を計算せよ。 $V$  をシステムの体積として  $(P, V)$  のダイアグラムでシステムの状態変化を表すとよい。 1.7pt

Credits:

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: Victoria and Albert Museum, London.

## シャンパン (10 点)

**警告：**過度の飲酒は健康を害し、法定年齢未満の飲酒は禁止されています。

シャンパンはフランスのスパークリング・ワインである。糖分の発酵により、瓶内で二酸化炭素 ( $\text{CO}_2$ ) が発生する。液相の  $\text{CO}_2$  モル濃度  $c_\ell$  と気相の分圧  $P_{\text{CO}_2}$  は、ヘンリーの法則として知られる  $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$  の関係にある。 $k_H$  はヘンリー一定数と呼ばれる。

### データ

- ・ シャンパンの表面張力  $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- ・ 液相の密度  $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- ・  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  におけるヘンリー一定数  $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- ・  $T_0 = 6^\circ\text{C}$  におけるヘンリー一定数  $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- ・ 大気圧  $P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- ・ 気体は断熱係数  $\gamma = 1.3$  を持つ理想的な気体である。



図 1. シャンパンで満たされたグラス

### パート A：泡の核生成，成長，上昇

温度  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  のシャンパンの瓶の栓を開けた直後、グラスに注ぐ。液体中の圧力は  $P_0$  で、温度は  $T_0$  のままであると仮定する。溶解したシャンパンの  $\text{CO}_2$  濃度  $c_\ell$  は平衡濃度を超過しており、ここでは  $\text{CO}_2$  気泡の核生成について調べよう。気泡の半径を  $a$ ，内圧を  $P_b$  と表す。

**A.1** 圧力  $P_b$  を、 $P_0$ ， $a$ ，および  $\sigma$  を使って表せ。

0.2pt

液体中では、溶存濃度  $\text{CO}_2$  は気泡までの距離に依存する。遠距離では  $c_\ell$  の値となり、気泡表面の近傍での濃度は  $c_b$  とする。ヘンリーの法則によれば、 $c_b = k_H P_b$  である。以下のすべての問題においては、気泡は  $\text{CO}_2$  のみを含むと仮定する。

$c_\ell \neq c_b$  ゆえ、 $\text{CO}_2$  分子は濃度の高い領域から低い領域へと拡散する。また、液相から気泡表面に到達した分子はすべて蒸気に移行すると仮定する。

**A.2** 気泡が成長すると予想される臨界半径  $a_c$  を、 $P_0$ ， $\sigma$ ， $c_\ell$ ，および  $c_0$  ( $c_0 = k_H P_0$ ) で表せ。 $c_\ell = 4c_0$  について  $a_c$  の数値を計算せよ。

0.5pt

実際には、気泡は主に既存のガス空洞から成長する。そこで、初期半径  $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$  を持つ静止状態の球状気泡を考える。単位面積と時間あたりにその気泡表面に移動する  $\text{CO}_2$  のモル数を  $j$  と記す。 $j$  には 2 つのモデルが考えられる。

- ・ モデル (1)  $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$  ここで、 $D$  は液体中の  $\text{CO}_2$  の拡散係数である。
- ・ モデル (2)  $j = K(c_\ell - c_b)$  ここで、 $K$  は定数である。

実験的に、気泡半径  $a(t)$  は図 2 に示すように時間に依存することがわかっている。ここで、 $c_\ell \approx 4c_0$  であり、気泡は目に見えるほど大きいので、表面張力による圧力は無視することができ、 $P_b \approx P_0$  である。

- A.3** 気泡内の  $\text{CO}_2$  のモル数  $n_c$  を,  $a, P_0, T_0$ , および気体定数  $R$  を用いて表せ。両方のモデルについて  $a(t)$  を求めよ。どちらのモデルが図 2 の実験結果をより良く説明するかを示せ。その答えに応じて,  $K$  または  $D$  を数値計算せよ。 1.2pt

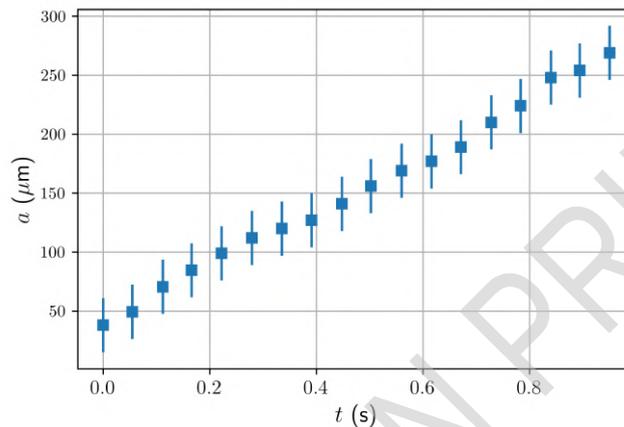


図 2. シャンパングラス内の  $\text{CO}_2$  の気泡半径の時間変化 ([1] より引用)

最終的に気泡はグラスの底から離脱し, 上昇しながら成長を続ける。図 3 は気泡の列を示している。この気泡の列は, 同じ初期半径から, 周波数  $f_b = 20\text{Hz}$  の一定時間差で形成された気泡である。

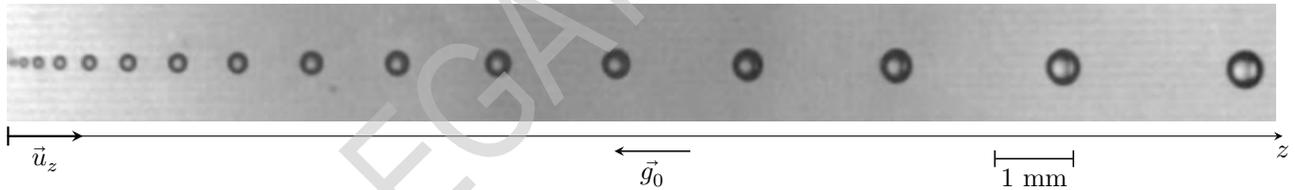


図 3. 泡の列。写真はページレイアウトのために, 90 度回転させて, 水平に表示している ([1] からの引用)。

ここで調べた速度範囲では, 動粘性率  $\eta$  の液体中を速度  $v$  で移動する半径  $a$  の気泡にかかる抗力  $F$  は, ストークスの法則  $F = 6\pi\eta av$  で与えられる。測定によれば, どの瞬間においても, 気泡の上昇速度は, 終端速度であると仮定できる。

- A.4** 鉛直に上昇する気泡に作用する主な力の表式を示せ。  $v(a)$  の表式を求めよ。  $\rho_\ell, g_0$ , および図 3 から測れる量を用いて,  $\eta$  の数値を推定せよ。 0.8pt

気泡の準定常成長率  $q_a = \frac{da}{dt}$  は, 気泡の上昇中にも適用できるものとする。

- A.5** 自由表面に到達した気泡の半径  $a_{H_\ell}$  を, 移動した高さ  $H_\ell$  と成長率  $q_a = \frac{da}{dt}$ , および必要な定数で表せ。  $a_{H_\ell} \gg a_0$ , および  $q_a$  一定を仮定し,  $H_\ell = 10\text{cm}$  と図 2 に対応する  $q_a$  から,  $a_{H_\ell}$  の数値を求めよ。 0.5pt

気泡の核生成サイトが  $N_b$  あるとする。気泡の核生成はシャンパングラスの底 (体積  $V_\ell$  に対して高さ  $H_\ell$ ) で一定の頻度  $f_b$  で起こると仮定し,  $a_0$  はまだ無視できるものとする。自由表面での  $\text{CO}_2$  の拡散は無視する。

A.6  $c_\ell(t)$  の微分方程式を書け。この方程式から、液体中の溶存濃度  $\text{CO}_2$  の減衰の特性 1.1pt  
 時間  $\tau$  を求めよ。

パート B. 気泡崩壊時の音の発生

小さな気泡は自由表面に到達するとほぼ球形になる。気泡と空気を隔てる液膜が十分に薄くなると、液膜に半径  $r$  の円形の穴が形成され、表面張力によって非常に速く開く (図 4. 左)。実験によると、液膜の液体は穴の周囲に半径  $R_m$  がほぼ一定の円筒形の縁に溜まる。 $r \gg R_m$  の場合を考える。穴は一定の速度  $v_f$  で開く (図 4. 右)。縁の外側の液膜は、一定の厚さ  $h$  のまま静止しているとする。

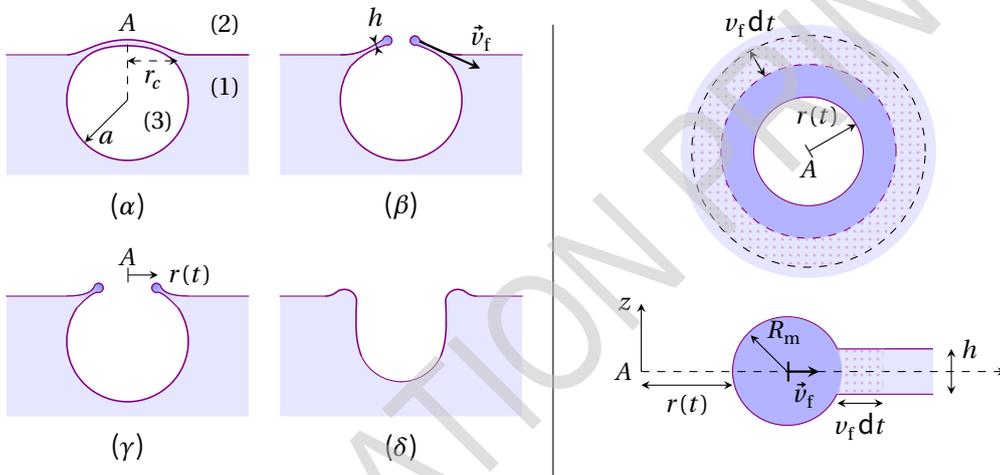


図 4 (左) (α) 表面での気泡：(1) 液体、(2) 圧力  $P_0$  の空気、(3) 圧力  $P_0$  の  $\text{CO}_2$ 、(β) および (γ) 液膜の収縮、ここで縁は紺色、(δ) 気泡の崩壊。(右) 時刻  $t$  における液膜の収縮。上：穴が空いた液膜を上方から見た図。下：収縮中の液膜と縁の断面図。dt の間に縁に液体が溜まる (点線)。

散逸過程により、時刻  $t$  と  $t + dt$  の間の縁の表面エネルギーの差異の半分だけが縁と液膜液体の運動エネルギーに変換される。縁の表面の変化は、液膜の変化に比べれば、無視できるものとする。

B.1  $v_f$  を、 $\rho_\ell, \sigma$ , および  $h$  で表せ。 1.1pt

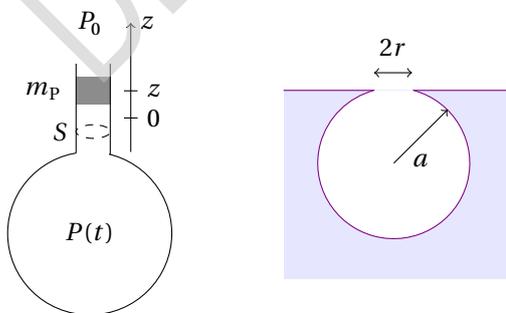


図 5 (左) ヘルムホルツ共鳴器。(右) 振動子としての気泡

薄膜が破裂すると、内部圧力が解放され、音が発生する。この音響放射を、面積  $S$  (図 5 左) の開口部を通して圧力  $P_0$  の大気開放された空洞であるヘルムホルツ共鳴器でモデル化する。開口部では、 $m_p$  の質量が、気体が断熱的に膨張または圧縮する際に受ける圧力による力によって、小振幅の振動をすることになる。重力は圧力に比べれば無視できるほど小さいものとする。 $V_0$  を質量  $m_p$  の気体の  $z=0$  における  $P=P_0$  での体積とする。

B.2  $m_p$  の振動の周波数  $f_0$  を表せ。ヒント： $\varepsilon \ll 1$  においては  $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\varepsilon$ 。 1.1pt

ヘルムホルツ・モデルは、半径  $a$  の気泡に適用できる。 $V_0$  を閉鎖気泡の体積とする。文献から、等価のピス

トンの質量は  $m_p = 8\rho_g r^3/3$  である。ここに  $r$  は円形開口部の半径、気体の密度は  $\rho_g = 1.8\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$  である (図 5. 右)。破裂する過程で、 $r$  は、0 から  $r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_l g}{\sigma}}$  で与えられる  $r_c$  になる。同時に、放出音の周波数最高値は 40kHz まで増加し、破裂時間は  $t_b = 3 \times 10^{-2}\text{ms}$  とする。

**B.3** 気泡と大気を隔てるシャンパン薄膜の半径  $a$  と厚さ  $h$  を求めよ。

1.1pt

### パート C. シャンパンを開ける

瓶内では、 $\text{CO}_2$  の総量は  $n_T = 0.2\text{mol}$  であり、体積  $V_L = 750\text{mL}$  の液体シャンパンに溶解しているか、コルクの下で体積  $V_G = 25\text{mL}$  の気体として存在する (図 6. 左)。  $V_G$  は  $\text{CO}_2$  のみを含む。  $\text{CO}_2$  両相の間の平衡はヘンリーの法則に従う。開栓時の  $\text{CO}_2$  気体の高速膨張は断熱的で可逆的であると仮定する。周囲の温度  $T_0$  と圧力  $P_0 = 1\text{bar}$  は一定である。

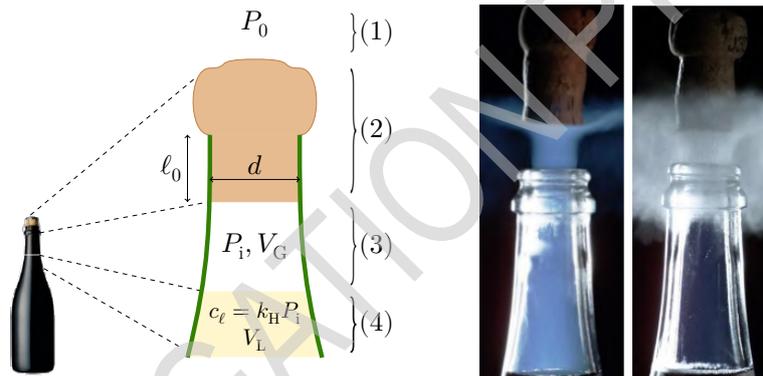


図 6. 左：伝統的なボトルネック (1) 周囲の空気、(2) コルク栓、(3) ヘッドスペース、(4) 液体のシャンパン。右：2つの異なる温度で開栓中に観察された2つの現象 ([2] より引用)。

**C.1** 瓶内の  $\text{CO}_2$  気体の圧力  $P_i$  の値を、 $T_0 = 6^\circ\text{C}$  の場合と  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  の場合について示せ。

0.4pt

シャンパン製造のもう1つのステップ (ここでは説明しない) により、次の質問に使用する  $P_i$  の値は以下のようになる。  $T_0 = 6^\circ\text{C}$  で  $P_i = 4.69\text{bar}$ 、 $T_0 = 20^\circ\text{C}$  で  $P_i = 7.45\text{bar}$  である。

開栓時には、 $T_0$  (図 6. 右) により、2つの異なる現象が観察され得る。

- $\text{CO}_2$  の結晶が形成され、青い霧が発生する (ただし、水の凝縮は抑制される)；
- あるいは、開口部周辺の空気中の水蒸気が凝縮して灰白色の霧が発生する。この場合には、 $\text{CO}_2$  の固体結晶は形成されない。

$\text{CO}_2$  の固相/気相の相変化が起きる飽和蒸気圧  $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$  は以下の通り： $\log_{10}\left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T+C}$

ここで、 $T$  は K の単位で表した温度、 $A = 6.81$ 、 $B = 1.30 \times 10^3\text{K}$ 、 $C = -3.49\text{K}$  とする。

- C.2**  $T_0 = 6^\circ\text{C}$  の場合と  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  の場合について、相転移が起こらなかった場合の、開栓後に膨張が終了した時の  $\text{CO}_2$  気体の温度  $T_f$  を求め、以下の記述の中で正しいものを選び (複数の記述が可能) : 0.7pt
1.  $T_0 = 6^\circ\text{C}$  開栓時に灰白色の霧が出る。
  2.  $T_0 = 6^\circ\text{C}$  開栓時に青い霧が発生する。
  3.  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  開栓時に灰白色の霧が出る。
  4.  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  開栓時に青い霧が発生する。

開栓時には、コルク栓が飛び出す。ここで、コルク栓が到達する最大高さ  $H_c$  を求める。コルク栓にかかるボトルネックによる摩擦力  $F$  は  $F = \alpha A$  であると仮定する。 $A$  は接触面積、 $\alpha$  は定数である。最初は、圧力がわずかに摩擦力に勝っている。コルクの質量は  $m = 10\text{g}$ 、直径は  $d = 1.8\text{cm}$ 、最初にボトルネックにはまった円筒部分の長さは  $\ell_0 = 2.5\text{cm}$  である。一旦コルク栓が飛び出せば、圧力による力は無視して良い。

- C.3** 外気温が  $T_0 = 6^\circ\text{C}$  の場合、 $H_c$  の数値を求めよ。 1.3pt

[1] Liger-Belair et al, Am.J. Enol.50 巻 3 号 (1999 年)。

[2] Liger-Belair ら、Sc.Reports 7, 10938 (2017).



## 水素と銀河 (10 点)

### パート A - イントロダクション

#### ボーア模型

**A.1** (0.2pt)

$$v =$$

**A.2** (0.5pt)

表式:  $r_1 =$

数値:  $r_1 =$

$$v_1 =$$

**A.3** (0.5pt)

$$E_n =$$

$$E_1 =$$

数値:  $E_1 =$

#### 水素の微細構造と超微細構造

**A.4** (0.5pt)

$$B_1 =$$

**A.5** (0.5pt)

$$\Delta E_F =$$

$$\lambda_{\text{HF}} =$$

$$\lambda_{\text{HF}} =$$

#### パート B - 銀河の回転曲線

**B.1** (0.2pt)

$$v_c =$$

**B.2** (0.5pt)

$$M_b =$$

**B.3** (1.8pt)

$$k_1 =$$

$$k_2 =$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq$$

$$v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq$$

$$M_{\text{in the figure}} =$$

**パート C - 銀河系の質量分布****C.1** (0.5pt)

銀河面に垂直方向の運動方程式：

$$\omega_0 =$$

**C.2** (0.6pt)

$$\varphi_0 =$$

$$v_c(r) =$$

**C.3** (0.7pt)

$$v_{rEIS} =$$

$$R =$$

**C.4** (0.6pt)

$$v_{r,1} =$$

$$v_{r,2} =$$

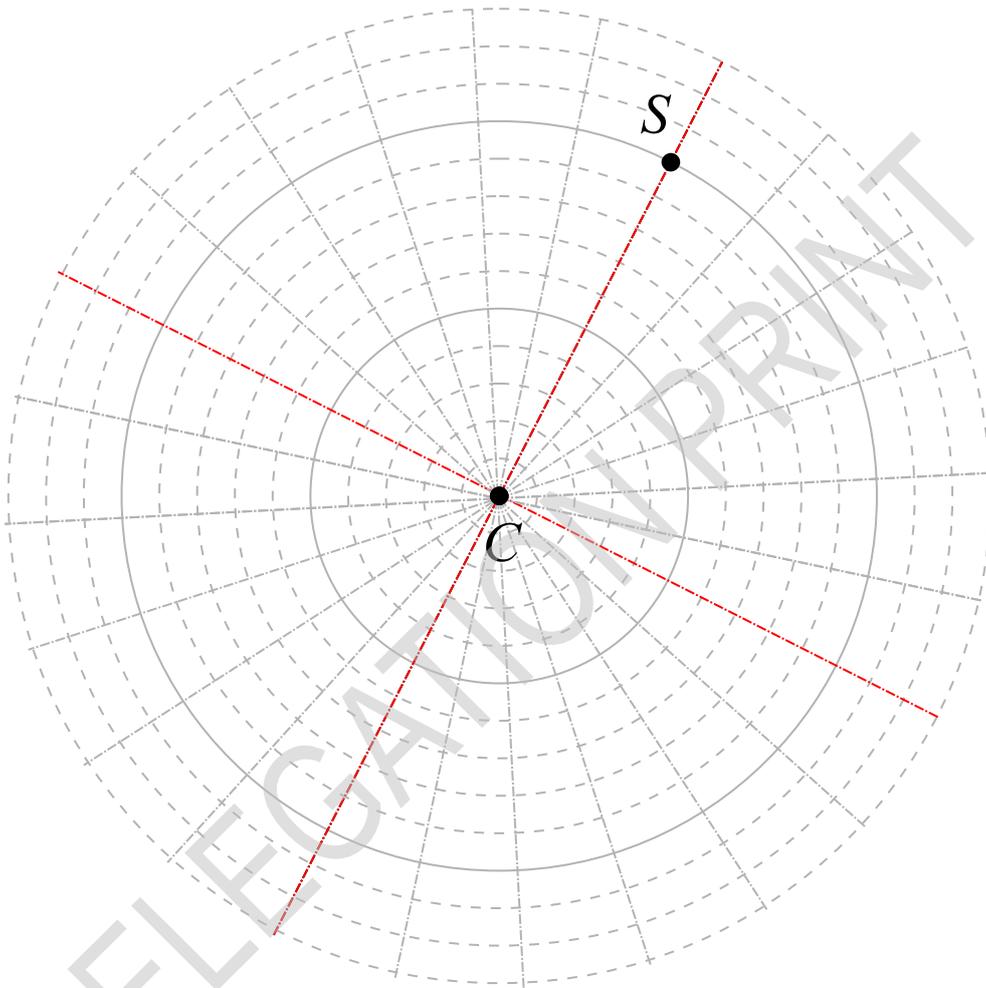
$$v_{r,3} =$$

$$R_1 =$$

$$R_2 =$$

$$R_3 =$$

C.5 (0.6pt)



導かれる事象：

**パート D - タリー-フィッシャー関係と MOND 理論**

D.1 (0.4pt)

 $\eta =$  $\gamma =$  $\gamma_{TF} =$



**D.2** (0.2pt)

$$a_m =$$

**D.3** (0.8pt)

$$a \ll a_0 \text{ の場合 } \gamma_{\text{Mond}} =$$

$$a_0 =$$

**D.4** (0.9pt)

$$v_c(r) =$$

$$v_c(r) =$$

DELEGATION PRINT

## コックスの時計 (10 点)

### パート A - 水没したチューブを引っ張る

A.1 (0.2pt)

$$P_w =$$

$$\vec{F} =$$

A.2 (0.8pt)

実験	振る舞い (A か B か?)	$h^*$ (cm)	$F_{\max}$ (N)
1			
2			
3			

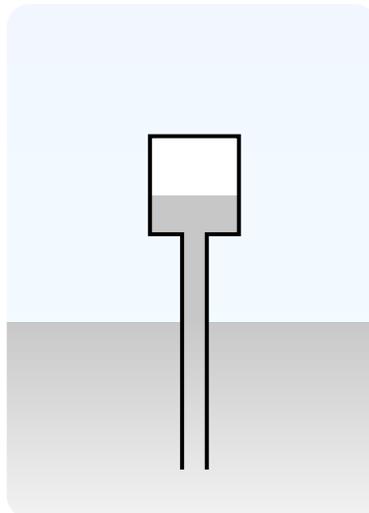
A.3 (0.3pt)

$$\varepsilon =$$

$$\text{数値: } \varepsilon =$$

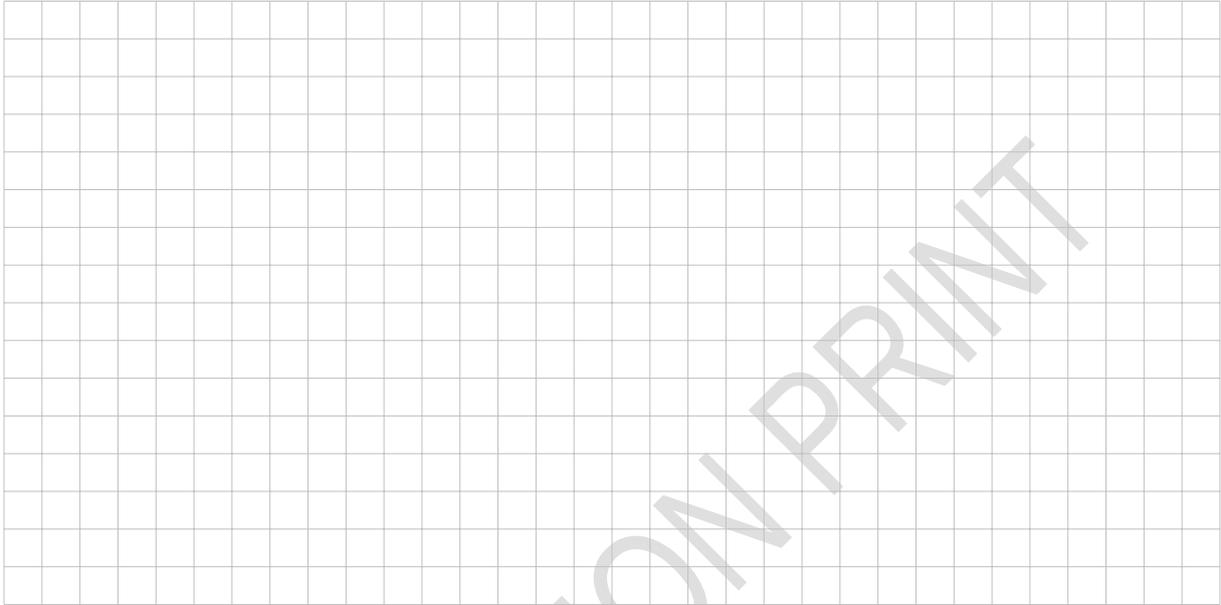
### パート B - 2 層構造のチューブ

B.1 (0.3pt)





## B.2 (1.4pt)



## B.3 (0.3pt)

$$\Delta m_{\text{add}} =$$

$$\text{数值: } \Delta m_{\text{add}} =$$

## パート C - コックスの時計

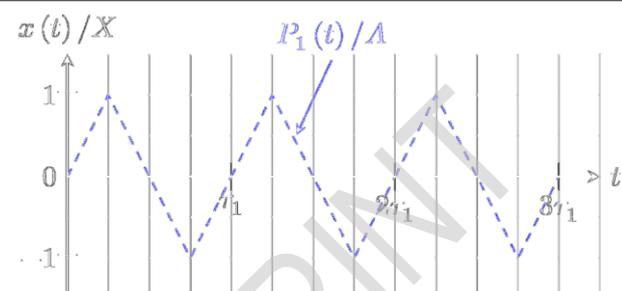
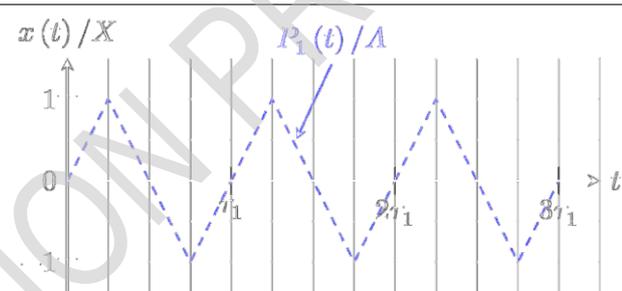
## C.1 (1pt)

$$\xi^* =$$

## C.2 (1pt)

$$\vec{T} =$$

**C.3 (2pt)**

	各状態が得られる条件	$x(t)/X$ のグラフ
状態 1		
状態 2		

**C.4 (1pt)**

$$F_s^* =$$

$$X^* =$$

$$W^* =$$

$$\text{数值： } W^* =$$

**C.5 (1.7pt)**

$$W_{\text{pr}}^* =$$

$$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} =$$





## シャンパン (10 点)

### パート A : 泡の核生成, 成長, 上昇

**A.1** (0.2pt)

$$P_b =$$

**A.2** (0.5pt)

$$a_c =$$

数値  $a_c =$

**A.3** (1.2pt)

$$n_c =$$

モデル (1)  $a(t) =$

モデル (2)  $a(t) =$

選ばれたモデル

数値  $K =$

数値  $D =$

**A.4** (0.8pt)

バブルの力 :

$$v(a) =$$

数値  $\eta =$

**A.5** (0.5pt)

$$a_{H_\ell} =$$

数値  $a_{H_\ell} =$

**A.6** (1.1pt) $c_\ell(t)$  の微分方程式：

$$\tau =$$

**パート B. 気泡崩壊時の音波の放射****B.1** (1.1pt)

$$v_f =$$

**B.2** (1.1pt)

$$f_0 =$$

**B.3** (1.1pt)

数値  $a =$

数値  $h =$

**パート C. シャンパンを開ける****C.1** (0.4pt)

$T_0 = 6^\circ\text{C}$  の場合  $P_1 =$

$T_0 = 20^\circ\text{C}$  の場合  $P_1 =$



**C.2** (0.7pt)

$T_0 = 6^\circ\text{C}$  の場合、数値は  $T_f =$

$T_0 = 20^\circ\text{C}$  の場合、数値は  $T_f =$

正しい記述 (番号) :

**C.3** (1.3pt)

数値  $H_c =$

DELEGATION PRINT