

## 地軸の歳差運動 (10.0 点)

### パート A. 地球の形 (1.0 点)

A.1. 変数  $h_{\max}, G, \omega, M_E, R$  の次元を基本次元, 長さ L, 質量 M, 時間 T で表す:

$$\begin{aligned}[h_{\max}] &= L, \\ [G] &= L^3 M^{-1} T^{-2}, \\ [\omega] &= T^{-1}, \\ [M_E] &= M, \\ [R] &= L.\end{aligned}$$

問に与えられた関係式の両辺は次元についても等しい:

$$L = (L^3 M^{-1} T^{-2})^{-1} T^{-\beta} M^\gamma L^\delta.$$

これを整理すると:

$$L = L^{\delta-3} M^{\gamma+1} T^{2-\beta},$$

となるので, 指数の満たす方程式が得られる:

$$\begin{aligned}0 &= 2 - \beta, \\ 0 &= \gamma + 1, \\ 1 &= \delta - 3.\end{aligned}$$

これを解いて,  $\beta = 2, \gamma = -1, \delta = 4$  となる。

A.2. 上の設問から  $h_{\max}$  は,

$$h_{\max} \propto \frac{\omega^2 R^4}{GM_E}.$$

ここで,  $\omega = 2\pi/(24\text{h}) = 7.27 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$  である。次元のない係数を 1 として,  $h_{\max} = 21.9\text{km}$  が得られる。

### パート B. 太陽の時間平均重力場 (3.2 点)

B.1. 解法 I: 重力ポテンシャルを用いる方法

$z$  軸上の任意の点で太陽リングによる重力ポテンシャル  $U(z)$  は

$$U(z) = -G \frac{M_S}{\sqrt{z^2 + d_{SE}^2}}.$$

重力はこれを  $z$  で微分することによって得られる:

$$g_z(z) = -\frac{dU}{dz} = -GM_S \frac{z}{(z^2 + d_{SE}^2)^{3/2}}.$$

$z$  の一次まで展開して

$$g_z(z) \approx -\frac{GM_S}{d_{SE}^3} z.$$

負号は  $g_z$  が太陽リングの中心を向いていることを示す。

解法 II：重力の積分をする方法

太陽リングの質量  $dM$  の小さな部分がリングの対称軸上の高さ  $z$  の場所に作る重力は (図 B.1)

$$dg = \frac{GdM}{z^2 + d_{SE}^2}$$

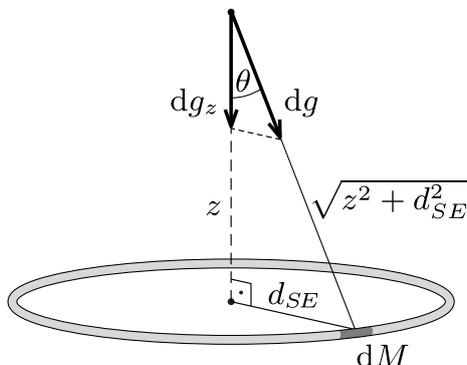


図 B.1.

対称性により、重力の合力は軸に平行であり、重力のその成分は

$$dg_z = -dg \cos \theta,$$

ここで、負号は  $-z$  方向を示す。角  $\theta$  は太陽リングの全ての部分について等しく、

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + d_{SE}^2}}.$$

以上の 3 つの式を用いて、太陽リング全体について積分をすれば、軸上の任意の点についての重力は

$$g_z = -GM_S \frac{z}{(z^2 + d_{SE}^2)^{3/2}}.$$

関係式  $|z| \ll d_{SE}$  を用いて、

$$g_z \approx -GM_S \frac{z}{d_{SE}^3}.$$

### B.2. 解法 I：ガウスの定理を用いる方法

太陽リングの面上での動径方向の重力  $g_r$  は重力についてのガウスの定理より求まる (図 B.2)。

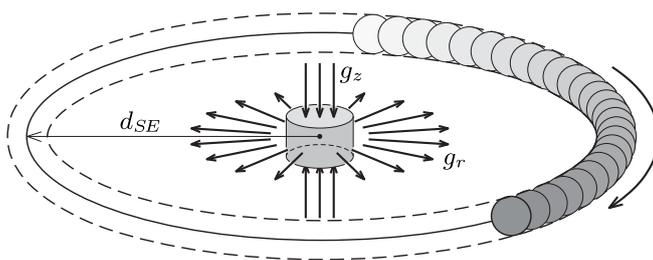


図 B.2.

高さ  $2|z|$ , 半径  $r$  の円筒形の領域にガウスの定理を適用して,

$$g_r 2z \times 2\pi r + g_z 2r^2 \pi = 0,$$

従って,

$$g_r(r) = -\frac{r}{2z} g_z(z) = \frac{GM_S}{2d_{SE}^3} r.$$

重力は動径方向外側を向いている。

解法 II：重力ポテンシャルを積分する方法

太陽リング面上の中心からの距離  $r$  の点 P を考える (図 B.3)

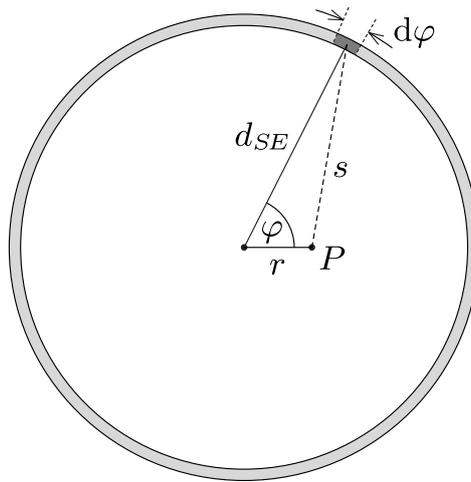


図 B.3.

太陽リングの角  $\varphi$  の位置にある範囲  $d\varphi$  の小さな領域と点 P の距離  $s$  は, 余弦定理より

$$s = \sqrt{d_{SE}^2 + r^2 - 2d_{SE}r \cos \varphi}.$$

この小さな領域が点 P につくる重力ポテンシャルは

$$dU = -\frac{GM_S}{s} \frac{d\varphi}{2\pi},$$

なので, 太陽リング全体からの重力ポテンシャルは

$$U(r) = -\frac{GM_S}{2\pi} \int_0^{2\pi} (d_{SE}^2 + r^2 - 2d_{SE}r \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

被積分関数を無次元化して

$$U(r) = -\frac{GM_S}{2\pi d_{SE}} \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{r^2}{d_{SE}^2} - \frac{2r \cos \varphi}{d_{SE}} \right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

ここで,  $r \ll d_{SE}$  を考慮して, 次の量を導入する

$$\varepsilon = \frac{r^2}{d_{SE}^2} - \frac{2r \cos \varphi}{d_{SE}}.$$

$\varepsilon \ll 1$  なので、被積分関数を  $\varepsilon$  の 2 次まで展開して、

$$(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{8}.$$

$\varepsilon$  の表式を代入して、 $r/d_{SE}$  の 2 次の項まで残す：

$$(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{r^2}{2d_{SE}^2} + \frac{r \cos \varphi}{d_{SE}} + \frac{3r^2 \cos^2 \varphi}{2d_{SE}^2}.$$

右辺第 3 項は  $\varphi$  積分で消えるので、ポテンシャルは

$$U(r) = -\frac{GM_S}{2\pi d_{SE}} \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{2d_{SE}^2} + \frac{3r^2 \cos^2 \varphi}{2d_{SE}^2} \right) d\varphi.$$

積分公式  $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$ （交流の電力計算と同様）を用いて、

$$U(r) = -\frac{GM_S}{2\pi d_{SE}} \left( 2\pi - 2\pi \frac{r^2}{2d_{SE}^2} + \frac{3\pi r^2}{2d_{SE}^2} \right).$$

整理して、

$$U(r) = -\frac{GM_S}{d_{SE}} - \frac{GM_S r^2}{4d_{SE}^3}.$$

重力はこのポテンシャルの勾配に負号をつけたものである

$$g_r(r) = -\frac{dU}{dr} = \frac{GM_S}{2d_{SE}^3} r.$$

## パート C. 地球には働くトルク (2.6 点)

C.1. 回転楕円体は極方向に  $R_e/R_p$  倍に一様に伸ばすと半径  $R_e$  の完全な球に変形できるので、楕円体の体積は (図 C.1)

$$V_{\text{ellipsoid}} = \frac{4\pi}{3} R_e^3 \frac{R_p}{R_e} = \frac{4\pi}{3} R_e^2 R_p.$$

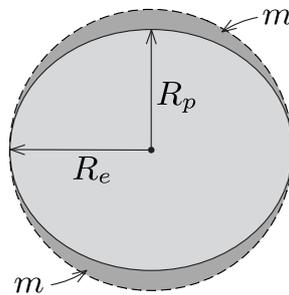


図 C.1.

ひとつの余剰領域の体積は

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{3} R_e^3 - \frac{4\pi}{3} R_e^2 R_p \right) = \frac{2\pi}{3} R_e^2 h_{\max}.$$

一様な地球の密度は  $\rho = 3M_E/(4\pi R_e^2 R_p)$  であるから、ひとつの余剰領域の質量は

$$m = \rho V = \frac{3M_E}{4\pi R_e^2 R_p} \frac{2\pi}{3} R_e^2 h_{\max} = \frac{h_{\max}}{2R_p} M_E.$$

**C.2.** 半径  $R_e$  の完全な球に働くトルクは対称性のためにゼロである。問題内に説明した重ね合わせの原理に基づき、楕円体の地球に働くトルク  $\vec{\tau}$  は、二つの同じ点質量 ( $2m/5$ ) に働くトルク  $\vec{\tau}'$  と大きさが同じで方向が逆である： $\vec{\tau} = -\vec{\tau}'$ 。

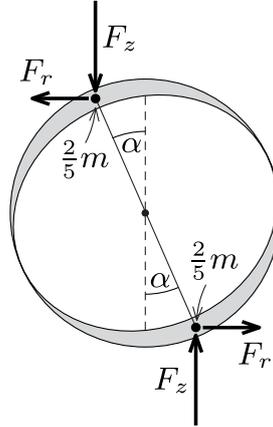


図 C.2. 二つの点質量に働く力

図 C.2 から、二つの点質量に働くトルクの大きさは

$$|\vec{\tau}'| = |\vec{\tau}| = 2F_z \sin \alpha + 2F_r R \cos \alpha,$$

ただし、

$$F_z = \frac{2}{5} m |g_z| = \frac{2}{5} m G M_S \frac{R \cos \alpha}{d_{SE}^3},$$

$$F_r = \frac{2}{5} m |g_r| = \frac{2}{5} m G M_S \frac{R \sin \alpha}{2d_{SE}^2}.$$

整理して、

$$|\vec{\tau}| = \frac{6}{5} \frac{G m M_S}{d_{SE}^3} R^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

C.1 の結果を用いて、

$$|\vec{\tau}| = \frac{3}{5} \frac{G M_E M_S}{d_{SE}^3} R h_{\max} \sin \alpha \cos \alpha.$$

トルク  $\vec{\tau}'$  は図 C.2 の紙面上向なので、楕円体地球に働くトルク  $\vec{\tau}$  は、紙面下向きである。

## パート D. 地軸の歳差運動の角速度 (2.0 点)

**D.1.** 地球に働くトルクはその角運動量ベクトル  $\vec{L}$  を変化させる

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

ここで  $\vec{L}$  は地球の自転角速度と平行でその大きさは（地球の密度は一様として球からのずれを無視する）

$$|\vec{L}| = \frac{2}{5} M_E R^2 \omega.$$

トルク  $\vec{\tau}$ （角運動量の変化の割合）が  $\vec{L}$  に垂直であるから、 $\vec{L}$  の大きさは変わらず方向が変化する（図 D.1）。その結果、ベクトル  $\vec{L}$  は半頂角  $\alpha$  の円錐面上を動いていく。

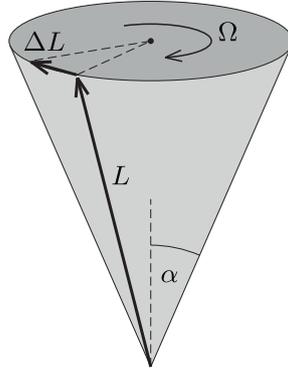


図 D.1.

等速円運動の性質を用いて、 $L$  とその時間微分、歳差運動の角速度  $\Omega_1$  は次の関係式を満たす：

$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \Omega_1 |\vec{L}| \sin \alpha.$$

歳差運動の角速度  $\Omega_1$  は

$$\Omega_1 = \frac{\tau}{L \sin \alpha} = \frac{\frac{3}{5} G M_E M_S R h_{\max} \sin \alpha \cos \alpha / d_{SE}^3}{\frac{2}{5} M_E R^2 \omega \sin \alpha},$$

ここで上で得られた  $\tau$  の結果を代入した。整理して、

$$\Omega_1 = \frac{3}{2} \frac{G M_S h_{\max}}{d_{SE}^3 R \omega} \cos \alpha.$$

これから、歳差運動の周期は、

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{4\pi}{3} \frac{d_{SE}^3 R \omega}{G M_S h_{\max} \cos \alpha}.$$

**D.2.** データの数値を代入して、周期は

$$T_1 = 80\,600 \text{ years.}$$

## パート E. 月の影響 (1.2 点)

**E.1.** パート D でみたように、歳差運動の角速度は地球に働くトルクに比例し、トルクは  $M_S/d_{SE}^3$  に比例する。月の影響を考慮に入れるなら、太陽によるトルクと月によるトルクは合算されるので、

$$\Omega_2 = \frac{M_M/d_{ME}^3 + M_S/d_{SE}^3}{M_S/d_{SE}^3} \Omega_1.$$

従って、歳差運動の周期について、

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_S/d_{SE}^3}{M_M/d_{ME}^3 + M_S/d_{SE}^3}.$$

**E.2.** データの数値を代入して、

$$T_2 = 25\,400 \text{ years},$$

これは、最近の観測結果と非常に近い値である。

## T2. スピン系における波動と相転移 (10.0 ポイント)

### Part A. 磁気双極子の歳差運動と相互作用 (1.2 ポイント)

A.1: 垂直軸を中心に回転する平面ループの角運動量は次の式で与えられる。

$$\vec{L} = MR^2\vec{\omega},$$

回転によって発生する電流は  $I = Q/T = \omega Q/2\pi$  である。すると、平面ループの磁気双極子モーメントは次式で与えられる。

$$\vec{\mu} = IA\hat{\omega} = \frac{\omega Q}{2\pi}\pi R^2\hat{\omega} = \frac{Q}{2}R^2\vec{\omega}$$

したがって

$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2M}\vec{L}$$

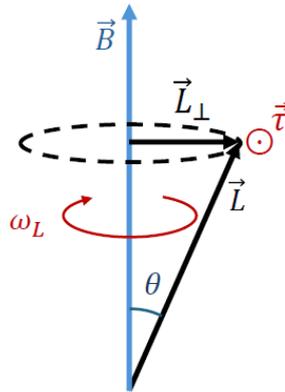
となり、 $\gamma$  は

$$\gamma = \frac{Q}{2M}.$$

である。

A.2: 外部磁場によって磁気双極子に働くトルクは次式で与えられる。

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$



$\vec{B}$  に垂直な成分だけが変化し、角速度  $\omega_L$  で回転する。したがって

$$\Rightarrow L\omega_L \sin \theta = -\mu B \sin \theta$$

それから、次の結果が得られる。

$$\omega_L = -\frac{\mu}{L}B = -\gamma B.$$

注：トルクの式は、電気双極子の場合を類推して求めることができる。

**A.3:** 1番目の双極子が2番目の双極子に与える磁場は

$$\vec{B}_{1on2} = -\frac{\mu_0 \vec{\mu}_1}{4\pi d^3}.$$

したがって

$$U = -\vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}_{1on2} = -\frac{\mu_0}{4\pi d^3} \mu_1 \mu_2 \cos(\pi - \theta)$$

であり、次の式が導かれる。

$$U = \frac{\mu_0 \gamma^2}{4\pi d^3} \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$$

であり、定数  $J_0$  は

$$J_0 \equiv \frac{\mu_0 \gamma^2}{4\pi d^3}.$$

である。

## Part B. スピン波 (4.5 ポイント)

**B.1:**  $i$  番目のスピンは  $i-1$  と  $i+1$  のスピんと、エネルギー  $E_i = -J(\vec{S}_{i-1} + \vec{S}_{i+1}) \cdot \vec{S}_i$  で相互作用する。これは  $E_i = -\vec{B}_i \cdot \vec{\mu}_i$  に似ている。 $\vec{\mu}_i = \gamma \vec{S}_i$  の関係を用いると、

$$\vec{B}_{i,\text{eff}} = \frac{J}{\gamma} (\vec{S}_{i-1} + \vec{S}_{i+1}).$$

が得られる。

**B.2:** 有効磁場は次のように得られる。

$$\frac{d\vec{S}_i}{dt} = \vec{\tau} = \vec{\mu}_i \times \vec{B}_{i,\text{eff}} = J\vec{S}_i \times (\vec{S}_{i-1} + \vec{S}_{i+1}).$$

**B.3:** すべての  $i$  に対して  $S_{i,z} \simeq S$  の近似を考慮して、 $\vec{S}_i$  の  $x$  成分と  $y$  成分の変化率を書くことができる。

$$\frac{dS_{i,x}}{dt} = J[S_{i,y}(S_{i-1,z} + S_{i+1,z}) - S_{i,z}(S_{i-1,y} + S_{i+1,y})] \simeq JS(2S_{i,y} - S_{i-1,y} - S_{i+1,y})$$

$$\frac{dS_{i,y}}{dt} = J[-S_{i,x}(S_{i-1,z} + S_{i+1,z}) - S_{i,z}(S_{i-1,x} + S_{i+1,x})] \simeq -JS(2S_{i,x} - S_{i-1,x} - S_{i+1,x})$$

これらの方程式の構造と進行波の振る舞いから、次の仮説 (ansatz) が導かれる。

$$\begin{aligned} dS_{i,x} &= \delta S \cos(kx - \omega t) \\ dS_{i,y} &= \delta S \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

ここで  $\delta S$  は振幅である。これから次の式が導かれる。

$$\omega \delta S \sin(kx - \omega t) = JS\delta S \cdot [2 \sin(kx - \omega t) - \sin(kx - \omega t - ka) - \sin(kx - \omega t + ka)].$$

$\sin(A) + \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$  の関係を用いると、

$$\omega(k) = 2JS[1 - \cos(ka)].$$

が得られる。

注：  $S_x$  の振幅が  $S_y$  の振幅と等しいことは示せるが、  $\delta S_x$  と  $\delta S_y$  の予測を代入すると、

$$\begin{aligned} \omega \delta S_x \sin(kx - \omega t) &= JS \delta S_y \cdot [2 \sin(kx - \omega t) - \sin(kx - \omega t - ka) - \sin(kx - \omega t + ka)] \\ \omega \delta S_y \cos(kx - \omega t) &= JS \delta S_x \cdot [2 \cos(kx - \omega t) - \cos(kx - \omega t - ka) - \cos(kx - \omega t + ka)] \end{aligned}$$

となり、これは  $\delta S_x = \delta S_y$  が与えられたときのみ満たすことができる。

**B.4:** 小さい  $k$  に対しては

$$\omega(k) \simeq 2JS \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2}(ka)^2 \right] = JSa^2 k^2$$

ドブロイの関係は  $E = \hbar\omega$  と  $p = \hbar k$  であり、これを  $\omega(k)$  の表式に代入することにより

$$E = \hbar\omega = \frac{JSa^2}{\hbar} p^2 \equiv \frac{p^2}{2m_{\text{eff}}},$$

が得られる。ここで、

$$m_{\text{eff}} \equiv \frac{\hbar}{2JSa^2}.$$

である。

**B.5:** この非弾性散乱では、系全体（鎖を含む）のエネルギーと運動量が保存される。特に、スピン波は  $y$ -軸方向の運動量を持たない。したがって、

$$p_{in} \cos \theta_{in} = p_{out} \cos \theta_{out}.$$

これを、中性子に対して有効である  $E_n = p_n^2/2m_n$  の関係と結びつけると

$$E_{out} = \left( \frac{\cos \theta_{in}}{\cos \theta_{out}} \right)^2 E_{in}$$

が得られる。エネルギー保存を用いると、スピン波のエネルギー  $E_s$  は  $E_s = E_{in} - E_{out}$  となり、

$$E_s = \frac{\cos^2 \theta_{out} - \cos^2 \theta_{in}}{\cos^2 \theta_{out}} E_{in}.$$

が得られる。  $x$  軸方向の運動量の保存から

$$p_s = p_{in} \sin \theta_{in} - p_{out} \sin \theta_{out} = \sqrt{2m_n E_{in}} \left( \sin \theta_{in} - \frac{\cos \theta_{in}}{\cos \theta_{out}} \sin \theta_{out} \right).$$

が得られる。  $m_{\text{eff}} = p_s^2/2E_s$  の関係から、

$$m_{\text{eff}} = \frac{\cos^2 \theta_{out} \left( \sin \theta_{in} - \frac{\cos \theta_{in}}{\cos \theta_{out}} \sin \theta_{out} \right)^2}{\cos^2 \theta_{out} - \cos^2 \theta_{in}} m_n$$

となる。これを簡単化すると

$$m_{\text{eff}} = \frac{\sin^2(\theta_{in} - \theta_{out})}{\cos^2 \theta_{out} - \cos^2 \theta_{in}} m_n = \frac{\sin(\theta_{in} - \theta_{out})}{\sin(\theta_{in} + \theta_{out})} m_n.$$

となる。

(訳者注：B.5 は難しく、問題文に「エネルギーと運動量の保存に注意せよ」などのヒントが入っていれば、取り組みやすいかもしれない。)

### Part C. Phase transitions in spin chains (4.3 ポイント)

**C.1:** ボルツマン分布では、系の温度  $T$  が与えられると、エネルギー  $\epsilon_i$  を持つある状態の系を見出す確率は

$$p_i \propto \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k_B T}\right).$$

となる。今の場合、エネルギーが  $\epsilon_{\uparrow} = -hs_{\uparrow} = -h$  で与えられる、スピンのアップの状態を見出す確率は

$$p_{\uparrow} \simeq e^{h/k_B T}.$$

となる。したがって、

$$\frac{p_{\uparrow}}{p_{\downarrow}} = \frac{e^{h/k_B T}}{e^{-h/k_B T}} = e^{2h/k_B T}.$$

である。また、規格化の条件  $p_{\uparrow} + p_{\downarrow} = 1$  に注意すると、 $p_{\uparrow}$  と  $p_{\downarrow}$  の完全な解は

$$p_{\uparrow} = \frac{e^{h/k_B T}}{e^{h/k_B T} + e^{-h/k_B T}}, \quad (1)$$

$$p_{\downarrow} = \frac{e^{-h/k_B T}}{e^{h/k_B T} + e^{-h/k_B T}}. \quad (2)$$

となる。

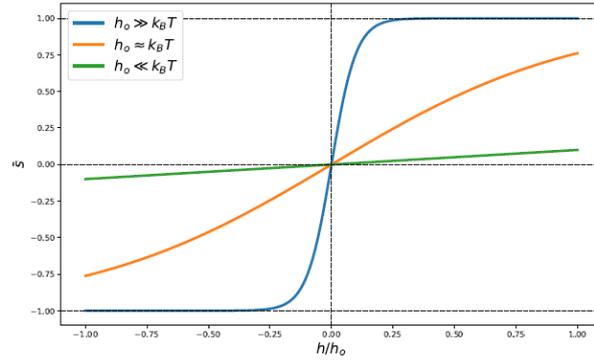
**C.2:** 系の平均磁化  $\bar{s}$  は、次のように書ける。

$$\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_i s_i, = \frac{1}{N} [Np_{\uparrow} \cdot 1 + Np_{\downarrow} \cdot (-1)], = p_{\uparrow} - p_{\downarrow},$$

ここで、 $Np_{\uparrow}$  と  $Np_{\downarrow}$  は、上と下を向くスピンベクトルの数である。確率に代入すると、

$$\bar{s} = \frac{e^{h/k_B T} - e^{-h/k_B T}}{e^{h/k_B T} + e^{-h/k_B T}} = \tanh\left(\frac{h}{k_B T}\right). \quad (3)$$

が得られる。



**C.3:** 系のエネルギーは、すべてのスピンの向きがそろったときに最小となる。であるから、

$$E_g = -\tilde{J} \sum_i 1 = -\tilde{J}(N-1) \simeq -\tilde{J}N,$$

であり、 $N \gg 1$  とした。

**C.4:**

$$E = -\tilde{J} \sum_i s_i s_{i+1} = -\tilde{J} \sum_i s_i \bar{s} = -\tilde{J}_{\text{eff}} \sum_i s_i,$$

ここで、 $\tilde{J}_{\text{eff}} = \tilde{J}\bar{s}$  と定義した。2 $\bar{s}$  を使うのはエネルギーを二重に数えることになる。

(訳者注：1次元系なので細かいことを言っても仕方がないが、平均場理論のより正確な扱いの観点からは多少注意が必要である。)

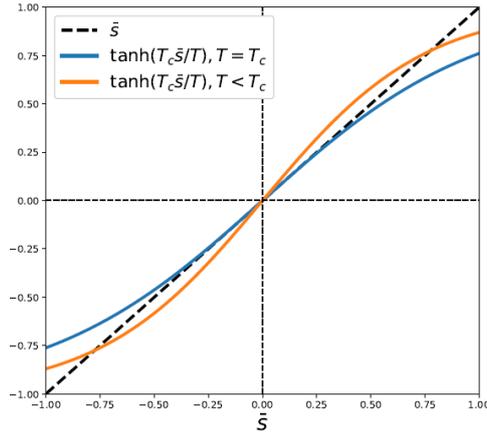
**C.5:** Part C.4 で与えた式を見て、これを C.2 で以前に与えた式と比較すると、平均磁化  $\bar{s}$  が次の超越方程式を満たすことが得られる。

$$\bar{s} = \tanh\left(\frac{\tilde{J}_{\text{eff}}}{k_B T}\right) = \tanh\left(\frac{\tilde{J}\bar{s}}{k_B T}\right).$$

先ほど C.2 で行ったプロットを使うと、 $\tilde{J} \ll k_B T$  では、 $\bar{s} = 0$  という 1 つの簡単な解しか存在しないことが分かる。一方、 $\tilde{J} \gg k_B T$  では、2 つの非自明な解が存在する。下図で明らかのように、この交差の振る舞いは  $\bar{s} = 0$  のときの  $\tanh(\tilde{J}\bar{s}/k_B T)$  の接線が  $\bar{s}$  の傾きに等しいときに起こる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{s}} \tanh\left(\frac{\tilde{J}\bar{s}}{k_B T_c}\right) \Big|_{\bar{s}=0} &= \frac{d}{d\bar{s}} \bar{s} \Big|_{\bar{s}=0} \\ \Rightarrow \frac{\tilde{J}}{k_B T_c} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{J}\bar{s}/k_B T_c)} \Big|_{\bar{s}=0} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\tilde{J}}{k_B T_c} &= 1 \end{aligned}$$

これから、 $T_c = \tilde{J}/k_B$  が導かれる。



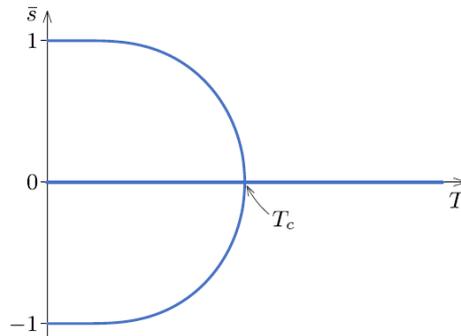
**C.6:** 臨界温度 ( $T_c$ ) 付近では、平均磁化が小さいので、超越方程式を

$$\bar{s} = \tanh\left(\frac{T_c}{T}\bar{s}\right) \simeq \frac{T_c}{T}\bar{s} - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}\bar{s}\right)^3$$

のように近似できる。 $\bar{s} = 0$  が依然として解であることが分るが、 $\bar{s} \neq 0$  のときに、式を整理して

$$\bar{s} = \pm \sqrt{3\left[\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3\right]} = \pm \sqrt{3\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} \simeq \pm \sqrt{3\frac{T_c - T}{T_c}},$$

が得られる。ここで、 $(T/T_c)^2 \simeq 1$  であることを用いた。



**C.7:** 磁場がない場合、 $T > T_c$  では、1つの解しか存在しない。しかし、磁場をかけると正味の磁化が生じる。これは**常磁性**の特徴である。一方、 $T < T_c$  のとき、系は磁場がなくても正味の磁化を保つことができる。これは**強磁性**の特徴である。

### T3. 大気物理学 (10.0 ポイント)

#### Part A. 地球の表面温度 (1.2 ポイント)

**A.1:** (平行光線として降り注ぐ) 太陽放射を受ける断面積は  $\pi R_E^2$  なので、吸収される部分が全入射放射の  $1 - a$  であることを考慮すると、次のようになる。

$$P_0 = (1 - a)\pi R_E^2 F_s.$$

**A.2:** 黒体はシュテファン・ボルツマンの法則  $P_{bd} = \sigma AT^4$  に従って放射する。ここで  $\sigma$  はシュテファン-ボルツマン定数、 $A$  は黒体の全表面積である。定常状態では、

$$\begin{aligned} P_{bd} = P_0 &\Rightarrow \sigma(4\pi R_E^2)T_{g0}^4 = (1 - a)\pi R_E^2 F_s \\ \Rightarrow T_{g0} &= \left( (1 - a) \frac{F_s}{4\sigma} \right)^{1/4} \simeq 255\text{K} \simeq 18^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

**A.3:** 大気層が存在する場合、次の2つの領域におけるエネルギー移動のバランスを記述してみよう。地表と大気の間と 大気と宇宙空間の間である。ここで 地球から放射される放射エネルギーを  $P_E$ 、大気の両側から放射される放射エネルギーを  $P_{atmo}$  とすると、

$$P_E = P_{atmo} + t_{sw}P_0, \quad t_{lw}P_E + P_{atmo} = P_0.$$

となる。この連立方程式を解いて、 $P_E = \sigma(4\pi R_E^2)T_g$  を使うと次のようになる。

$$T_g = \left( \frac{1 + t_{sw}}{1 + t_{lw}} \right)^{1/4} T_{g0} \simeq 286\text{K} \simeq 13^\circ\text{C}.$$

#### Part B. 大気ガスの吸収スペクトル (1.8 ポイント)

**B.1:** バネの自然長(伸びていない長さ)を  $\ell_0$  とし、粒子  $A$ 、 $B$  の位置を  $x_A, x_B$  とすると、バネの力による運動方程式は次のように書ける：

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x_A &= +\frac{k}{m_A}(\ell - \ell_0), \\ \frac{d^2}{dt^2}x_B &= -\frac{k}{m_B}(\ell - \ell_0), \end{aligned}$$

ここで、 $\ell = x_B - x_A$  はバネの瞬間の長さである。2つの式の差をとると、

$$\frac{d^2}{dt^2}\ell = -k\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right)(\ell - \ell_0).$$

となり、これは、バネ定数  $k$  と有効質量(還元質量)  $\mu$  のバネにつながった一つの有効粒子の運動方程式である。有効質量  $\mu$  は

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

で与えられる。したがって、系は角振動数

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{k \frac{m_A + m_B}{m_A m_B}}$$

を持った単純調和振動をする。

**B.2:** 量子調和振動子における連続する 2 つの準位間のエネルギーの差は  $\hbar\omega$  で与えられる。したがって、光子のエネルギーは次式で与えられる。

$$E = \hbar\omega_d.$$

**B.3:** 観測されるスペクトル線の  $f_0$  からのシフトは、ドップラー効果によるものである。光源が観測者に向かって速度  $v$  で移動しているとき、振動数は次式に従ってシフトする。

$$f = f_0(1 + v/c).$$

したがって、振動数のシフトは次式で与えられる：

$$f - f_0 = \frac{v}{c} f_0.$$

**B.4:** 規格化定数  $C$  を求めるためには、全確率が 1 になることが必要である。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(v) dv = 1 \quad \Rightarrow \quad C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv.$$

である。積分公式で  $x = v$  と  $a = \frac{m}{k_B T}$  と置くことにより、

$$C = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}.$$

が得られる。

**B.5:** B.4 の結果を用いると、振動数  $f$  と  $f_0$  を用いた、分子の速度に対する次の表現が求められる。

$$v = \frac{f - f_0}{f_0} c.$$

これを確率分布の式に当てはめると、次のようになる：

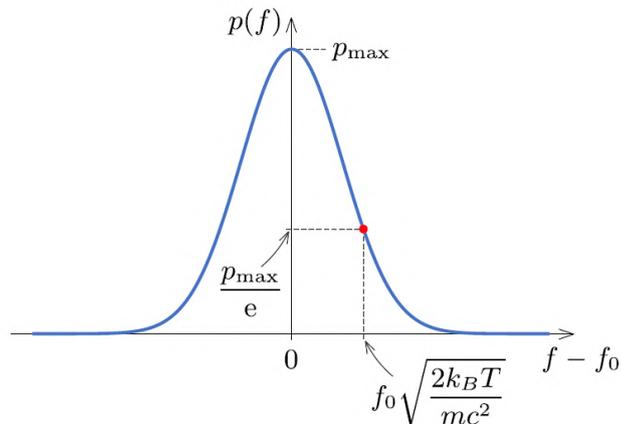
$$p(f) \propto \exp \left[ -\frac{mc^2}{2k_B T} \left( \frac{f - f_0}{f_0} \right)^2 \right].$$

これにより、スペクトル線が  $f_0$  から  $f$  にドップラーシフトした分子を観測する確率分布が得られる。

**B.6:** 確率分布  $p(f)$  は振動数シフト  $f - f_0$  のガウス分布に従う。プロファイルの中心は 0 であり、指数関数の引数が  $-1$  のときに最大値の  $1/e$  まで下がる。これは

$$f - f_0 = f_0 \sqrt{\frac{2k_B T}{mc^2}}$$

のときに起こり、分布の形は下図に示される。



### Part C. 大気中の空気の安定性 (2.7 ポイント)

**C.1:** 厚さ  $dz$ 、表面積  $S$  の薄い水平層を考える。空気は静水圧平衡にあるので、その重さは圧力の力の差で釣り合わなければならない。この結果、次の関係が成り立つ：

$$p(z)S = p(z + dz)S + \rho(z)gSdz.$$

簡略化して項を並べ替えると次のようになる：

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g$$

負の符号は、予想通り、高さとともに圧力が減少することを示す。

**C.2:** 空気を理想気体として扱うことができると仮定すると、理想気体の法則を使って空気の密度を圧力と温度で表すことができる。

$$pV = nRT \Rightarrow p(z)V = \frac{m}{\mu_{air}} RT(z).$$

これを密度で書き直すとこうなる：

$$\rho(z) = \frac{p(z)\mu_{air}}{RT(z)}.$$

ここで、密度の式を C.1 で得られた式に代入する。これにより

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu_{air}p(z)}{RT(z)}g$$

**C.3:** 等温大気（すなわち、高度に対して等温）を仮定すると、 $T(z) = T$  となり、式は次のように単純化される：

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu_{air}}{RT}gdz.$$

両辺を積分し、高さ 0 の気圧を  $p_0$  とすると、次のようになる：

$$\ln \left[ \frac{p(z)}{p_0} \right] = -\frac{\mu_{air}}{RT} gz.$$

異なる表式で：

$$p(z) = p_0 \exp \left( -\frac{\mu_{air}}{RT} gz \right).$$

**C.4:** 小さな質量の空気は断熱的に移動するので、理想気体の断熱条件を満たさなければならない：

$$pV^\gamma = \text{const.},$$

ここで、 $\gamma = c_p/c_V$  は断熱指数（比熱比）で、 $c_p, c_V$  はそれぞれ圧力と体積が一定のときのモル比熱である。理想気体の法則を使って体積を温度と圧力で書くとうなる：

$$p(T/p)^\gamma = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const.}$$

この式を高さ  $z$  に関して微分すると、次のようになる：

$$(1-\gamma)p^{-\gamma} \frac{dp}{dz} T^\gamma + \gamma p^{1-\gamma} T^{\gamma-1} \frac{dT}{dz} = 0.$$

簡単化し、断熱的逓減率の式を得るために並べ替えると、次のようになる：

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{T(z)}{p(z)} \frac{dp}{dz}.$$

ここで、C.3 で得られた静水圧勾配を代入して求める。

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{T(z)}{p(z)} \left[ -\frac{p(z)\mu_{air}}{RT(z)} g \right] = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\mu_{air}}{R} g.$$

$\gamma = c_p/c_V$  であるので

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1-c_p/c_V}{c_p/c_V} \frac{\mu_{air}}{R} g = -\frac{\mu_{air}}{c_p} g,$$

ここで  $c_p - c_V = R$  とした。この断熱的逓減率の式は、断熱大気では温度が高さに対して直線的に下がることを示している。

**C.5:** 空気の塊の小さな振動の角振動数を求めるには、まずニュートンの第二法則を適用する。空気の塊に作用する主な力は浮力と重力である。

$$\delta m \frac{d^2 z}{dt^2} = \rho_a(z) g \delta V - \delta m g,$$

ここで、 $\delta m$  は空気の塊の質量、 $\delta V$  は体積、 $\rho_a$  は周囲の空気の密度である。空気の塊の質量を密度  $\rho_p$  で表すと、 $\delta m = \rho_p \delta V$  となる。代入して簡単化すると

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\rho_a(z + \delta z) - \rho_p(z + \delta z)}{\rho_p(z + \delta z)} g.$$

空気の塊が  $z + \delta z$  で大気と同じ圧力にあると仮定すると、密度は理想気体の法則  $\rho \propto 1/T$  を使って温度で表すことができる。これにより、最後の式を次のように書き換えることができる：

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T_p(z + \delta z) - T_a(z + \delta z)}{T_a(z + \delta z)} g.$$

ここで、 $z + \delta z$  での温度を通減率で表し、 $z$  での温度を定義  $T(z + \delta z) = T(z) + \Gamma \delta z$  で表すことができる。したがって

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T(z) + \Gamma \delta z - T(z) - \Gamma_a \delta z}{T(z) + \Gamma_a \delta z} g.$$

分子を簡単化し、分母の無限小項  $\Gamma_a \delta z$  を無視すればよい：

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\Gamma - \Gamma_a}{T} g \delta z.$$

これは、単純な調和振動の方程式で、角振動数は次の式で与えられる。

$$\omega = \sqrt{\frac{\Gamma_a - \Gamma}{T}} g = \sqrt{\frac{\mu_{air} g / c_p - \Gamma}{T}} g$$

この運動は  $\Gamma_a = \mu_{air} g / c_p > \Gamma$  である限り、安定である。

#### Part D. 水分 (2.7 点)

**D.1:** 相転移（この場合は蒸発）におけるエントロピーの変化は、蒸発潜熱に関する。液体の水の質量  $m$  であるとする、 $Q_{\text{evaporation}} = Lm$  である。したがって、

$$\Delta S = \frac{Lm}{T}.$$

蒸気の体積は、同じ質量の液体の体積よりかなり大きいことが知られているので、 $\Delta V \simeq V_{\text{vapor}}$  となり、理想気体の法則で求められる。したがって、

$$V_{\text{vapor}} = \frac{nRT}{p_s(T)}.$$

質量とモル数  $n$  は  $m = \mu_{H_2O} n$  で関係づけられる。

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{\mu_{H_2O} L p_s}{RT^2}.$$

**D.2:** D.1 で見つけた関係を、変数を分離して積分すると、次のようになる。

$$\ln \left[ \frac{p_s(T)}{p_{so}} \right] = -\frac{\mu_{H_2O} L}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_o} \right).$$

$L$  は厳密には温度の関数であるが、ここで調べる温度範囲では  $L$  は一定であると仮定する。式を整理すると、次のようになる。

$$p_s(T) = p_{so} \exp \left[ -\frac{\mu_{H_2O} L}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_o} \right) \right].$$

**D.3:** 液体の水の生成は、塊内の水の分圧がある温度で飽和圧力に達したときに起こる。水蒸気分圧  $p_w$  は、塊の全圧  $p$  と次の式で関係づけられる。

$$p_w = \frac{n_{H_2O}}{n_{air}} p = \frac{m_{H_2O}/\mu_{H_2O}}{m_{air}/\mu_{air}} p = \phi \frac{\mu_{air}}{\mu_{H_2O}} p.$$

空気塊が断熱的に上昇していることを考えると、 $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const.}$  であるから

$$p(T) = p_i \left( \frac{T}{T_i} \right)^{c_p/R}.$$

したがって、解くべき超越方程式は次のようになる。

$$\phi \frac{\mu_{air}}{\mu_{H_2O}} p_i \left( \frac{T_l}{T_i} \right)^{c_p/R} = p_{so} \exp \left[ -\frac{\mu_{H_2O} L}{R} \left( \frac{1}{T_l} - \frac{1}{T_i} \right) \right].$$

この式は書き換えて次のようになる。

$$T_l = \frac{1}{\frac{1}{T_i} - \frac{R}{\mu_{H_2O} L} \ln \left[ \phi \frac{\mu_{air}}{\mu_{H_2O}} \frac{p_i}{p_{so}} \left( \frac{T_l}{T_i} \right)^{c_p/R} \right]}$$

数値を代入すると、次のようになる。

$$T_l = \frac{1000\text{K}}{3.481 - 0.4695 \ln \left( \frac{T_l}{290.15\text{K}} \right)}.$$

これを繰り返して解くと、 $T \simeq 286.8\text{K} \simeq 13.7^\circ\text{C}$  となる。

(訳者注： $\mu_{H_2O}$ 、 $\mu_{air}$  の値、 $c_p/R$  の値に必要な情報（空気分子が5つの自由度を持つと仮定する）は、問題の初めに与えてある。)

### Part E. 太陽ハロー (1.6 ポイント)

**E.1:** 図 E の表記を用いると、全偏角  $\delta$  は2つの屈折の偏角の和として書くことができる：

$$\delta = \alpha - \alpha' + \beta - \beta'.$$

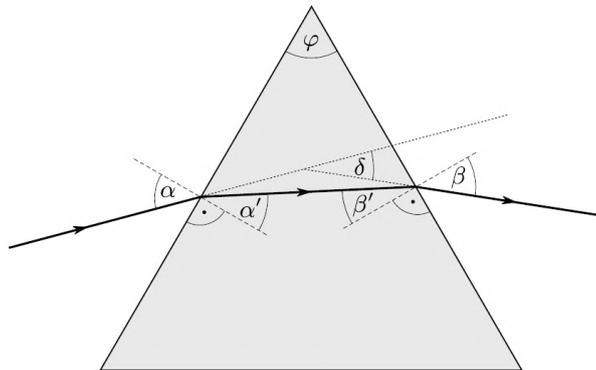


Figure E.

内角  $\varphi, 90^\circ - \alpha', 90^\circ - \beta'$  の三角形を考える。これらの角度の和は  $180^\circ$  になるので、次の関係が得られる。

$$\varphi = \alpha' + \beta',$$

したがって  $\delta$  は簡単に

$$\delta = \alpha + \beta - \varphi.$$

となる。 $\alpha$  と  $\alpha'$  (同様に  $\beta$  と  $\beta'$ ) の間の関係はスネルの法則により与えられる。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = n, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \beta'} = n.$$

$\beta$  を  $\alpha'$  により表すと:

$$\sin \beta = n \sin \beta' = n \sin(\varphi - \alpha'),$$

スネルの法則から  $\alpha'$  は次のように書かれる。

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right).$$

従って、 $\beta$  は  $\alpha$  を用いて

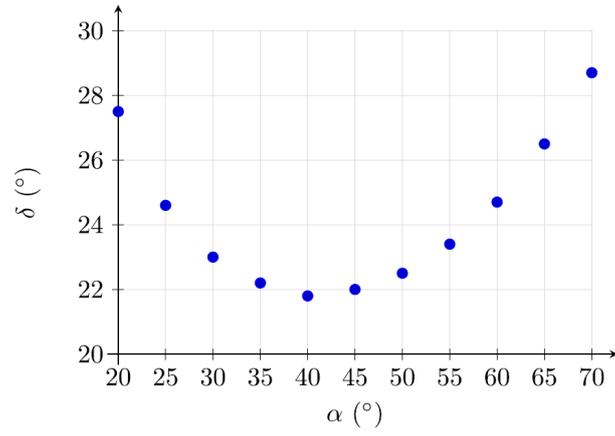
$$\beta = \arcsin\left\{n \sin\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)\right]\right\}.$$

と表すことができる。最後に  $\delta$  に対する結果が得られる。

$$\delta = \alpha + \arcsin\left\{n \sin\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)\right]\right\} - \varphi.$$

**E.2:** この状況は、E.1 で議論した  $\varphi = 60^\circ$  の場合に対応することに注意。異なる  $\alpha$  の値を代入した後のデータ表を示す：

$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
$20^\circ$	$27.5^\circ$	$50^\circ$	$22.5^\circ$
$25^\circ$	$24.6^\circ$	$55^\circ$	$23.4^\circ$
$30^\circ$	$23.0^\circ$	$60^\circ$	$24.7^\circ$
$35^\circ$	$22.2^\circ$	$65^\circ$	$26.5^\circ$
$40^\circ$	$21.8^\circ$	$70^\circ$	$28.7^\circ$
$45^\circ$	$22.0^\circ$		



**E.3:**  $\delta$  の最小値は  $21.8^\circ$  付近なので、これがハローが現れる太陽の方向に対する角度である。