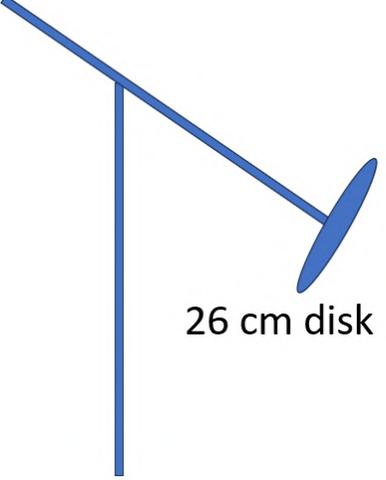
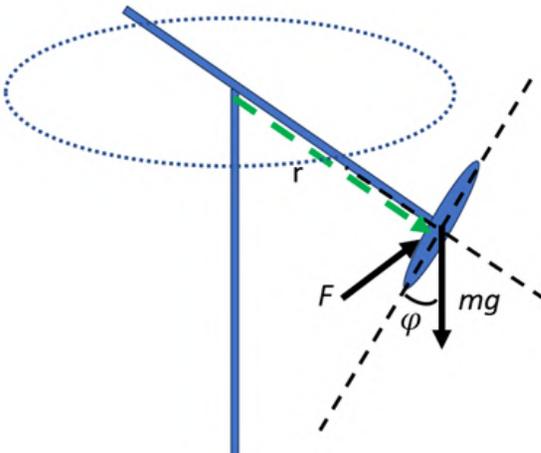


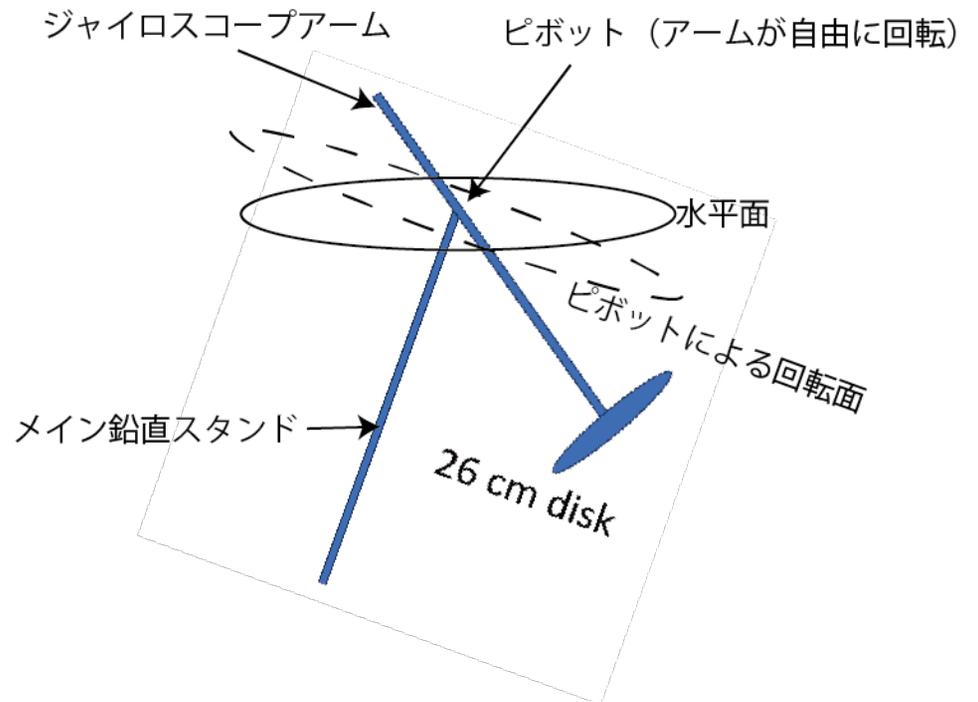
実験問題の解答例の間違いを訂正し、採点基準を除いて、少し訳注を付けたものです。

Part A: 実験装置の調整 (ベースを水平にし、スタンド棒が正確に鉛直になるようにする) [合計点 = 1.0]

A.1. [0.6pt]	A.2. [0.2pt]	A.3. [0.2pt]
 <p>26 cm disk</p>		<p>(b) ジャイロスコープアームの両側の長さが異なること</p> <p>(e) ディスクの質量 (重量)</p>

訳注

A. 1, A. 2 の図ではよく分からないかと思うが、メイン鉛直スタンドの上端にはピボットがあり、アルミ製のアームを差し込みシーソーのような運動をさせることができる。さらに、アームはピボットを中心にスタンドに垂直な面内で自由に回転できる。このピボットによる回転面を正確に水平にする方法を考える課題である。右図のようにスタンドが傾き、回転面が水平面からずれている場合、アームを非対称になるように取り付けるだけでも、長い方のアームが最も下になるような位置で安定する。重いディスクを取り付けるとさらにそれが顕著となるので、これを用いてスタンドの棒を鉛直とし、ベースを水平にすることができる。従って、A. 3 で重要なのは (b) アームの両側の長さが異なることと、(e) ディスクの重量である。



重力を利用するので、A. 2 のように  $mg$  を描く必要がある。  $F$  は何の力か分からないので、書かない方が良いという意見も出ていたが、そのまま残されていた。ピボットによる回転面が水平面から傾いていて、ディスクが回転面の最低点からずれていると、重力  $mg$  の回転面内成分が生じて最低点へ向けて動くため、その成分の力かと思われるが、図として不完全である。

**Part B: 円板の回転速度の影響 [Total point = 6.4]**

Arm length (cm)	Voltage (V)	10 cycles period (s)					Average 10 cycles period	Period (s)	Period Standard Deviation (s)	Period Standard Error (s)
		1	2	3	4	5				
15	4	34	35	35	34	34	34.4	3.44	0.0548	0.0245
	4.4	35	36	36	36	36	35.8	3.58	0.0447	0.0200
	4.8	38	37	37	37	37	37.2	3.72	0.0447	0.0200
	5.2	40	40	41	40	40	40.2	4.02	0.0447	0.0200
	5.6	41	42	43	41	41	41.6	4.16	0.0894	0.0400
	6	43	42	42	42	42	42.2	4.22	0.0447	0.0200

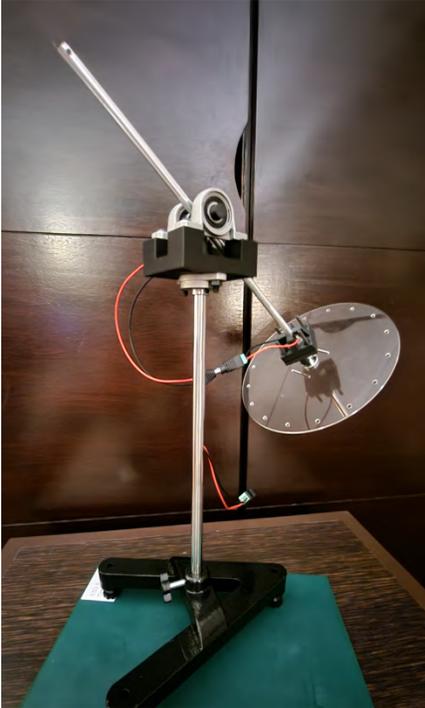
  

右図のようなセッティングで、ディスクを手で支えてアームが水平、もしくは多少ディスク側の方が逆側よりも高い状態になるように保ちながらディスクを高速回転させ、回転が安定してから手を離すと、アームが重力で落ちる作用により、ディスクがスタンドの周りを歳差運動 (precession) する。この理論については、B.6(iii)で考える。

歳差運動のエネルギーは、ディスクおよびモーター部分の位置エネルギーにより与えられている。

周期的な現象なので、歳差運動によるスタンド周りを数回転する時間を測る実験を複数回おこなう必要がある。  
(例では10周期を5回測定)

電圧を上げると、ディスクの回転数が増大し、歳差運動の回転周期が増大する。



**B.2. [0.8pt]**

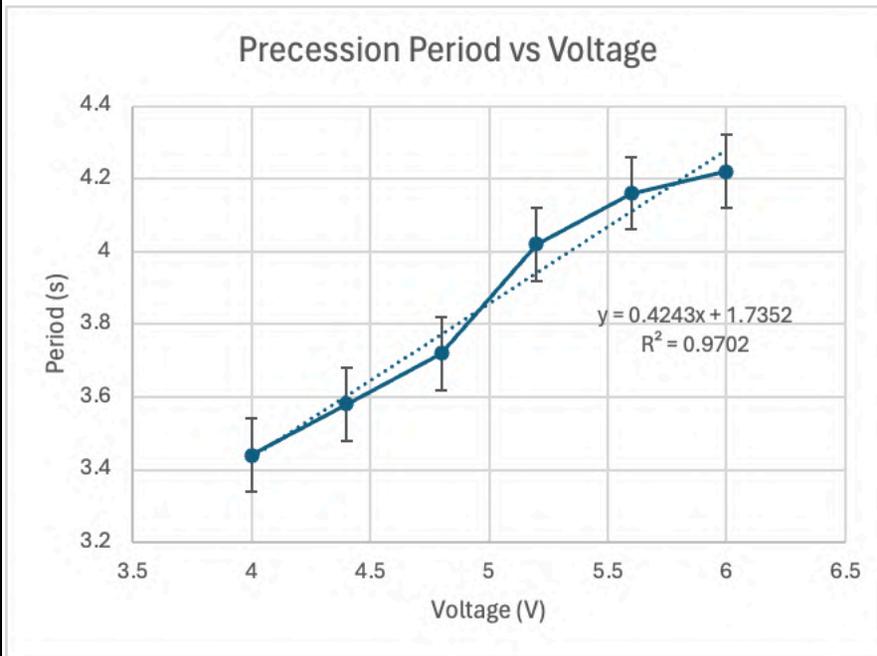
$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\frac{\sum(T_i - \bar{T})^2}{N - 1}}$$

$$\text{Standard Error} = \frac{\text{Standard Deviation}}{\sqrt{N}}$$

標準偏差  $S$  と標準誤差  $SE$  の計算は一般的なもの。

$N$  : 実験回数,  $T_i$  :  $i$  回目の歳差運動の周期の測定値,  $\bar{T}$  : 測定値の平均値

**B.3. [0.8pt]**



解答に掲載されたグラフはこの通りであるが、エラーバーが  $\pm 0.1$  s 程もあり、約 2.5 % 程度である。

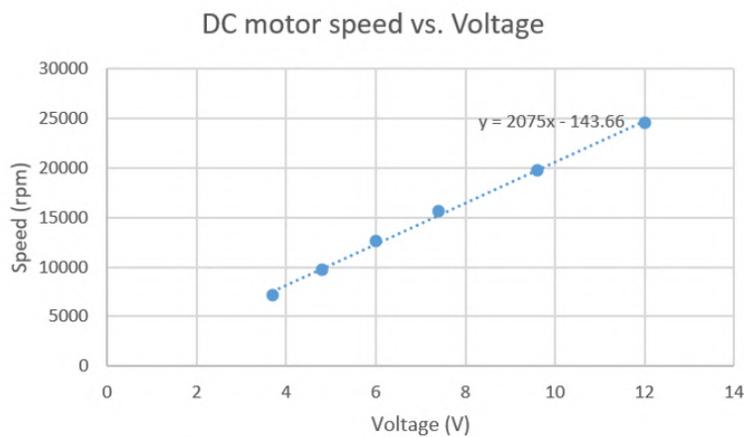
**B.4. [0.2pt]**

グラフより

$$y = 0.4243x + 1.7352$$

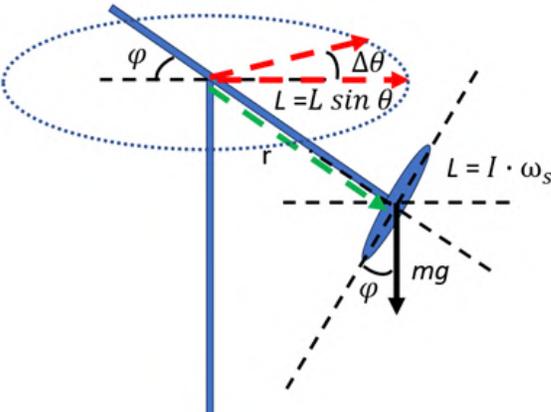
$x$  : 電圧,  $y$  : 歳差運動の周期

**B.5. [1.0pt]**



電圧 (V)	電流 (A)	回転速度 (rpm)
3.7	176 mA	7200
4.8	185 mA	9700
6.0	205 mA	12600
7.4	230 mA	15600
9.6	245 mA	19800
12.0	298 mA	24500

このグラフはモーターにかかる電圧と回転数の関係を表すグラフであり、電圧から回転数を求める際に使用される。実験では  $V < 6$  V の領域のみが使用される（6 Vを超えるとモーターが焼き付く可能性があるため）。グラフには 6 V以上の領域が多い点で不適切という意見もあったがこのまま用いられた。

<p><b>B.6(i) [0.5pt]</b></p>	<p>From <math>I = mR^2</math> <span style="float: right;">Eq-4</span></p> <p>For disk, <math>I = \sum_i m_i r_i^2</math> <span style="float: right;">Eq-5</span></p> <p>Thus, <math>dI = dmr^2</math> <span style="float: right;">Eq-6</span></p> $I = \int_0^R dm r^2$ <p>Relation of mass of ring and radius can be found through</p> $\frac{dm}{M} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$ $dm = \frac{2r dr}{R^2} M$ <span style="float: right;">Eq-7</span> <p>From <math>I = \int_0^R dm r^2 = \int_0^R \frac{2r dr}{R^2} M \cdot r^2</math></p> $I = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$ $I = \frac{2M}{R^2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R$ $I = \frac{2M}{R^2} \left[ \frac{R^4}{4} \right] = \frac{1}{2} MR^2$ <span style="float: right;">Eq-8</span> <p>これは一般的な慣性モーメントの求め方である。</p>
<p><b>B.6(ii) [0.2pt]</b></p>	$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} (0.065)(0.1)^2 = 0.000325 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ <p>この解答例は 2mm 厚の円板の計算である。問題では厚さ 3mm の円板が指定されているので、質量は 89g。</p> $I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} (0.089)(0.1)^2 = 4.45 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$
<p><b>B.6(iii) [1.0pt]</b></p>	<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="flex: 1;">  </div> <div style="flex: 2; padding-left: 20px;"> <p>アームが水平面から角度<math>\varphi</math>だけ傾いているとし、ディスクの質量を<math>m</math>、慣性モーメントを<math>I</math>、角速度を<math>\omega_s</math>とする。アーム（およびモーター）の質量は無視する。</p> <p>外側から見て反時計回りに高速回転するディスクの角運動量は回転中心から外向きであり、その大きさを<math>L_0</math>とすると、<math>L_0 = I \omega_s</math> となり、その水平方向成分を<math>L</math>とすると、<math>L = L_0 \sin \varphi</math> となる。</p> <p>ディスクを高速回転させて、安定化した後、アームを支えていた手を離すと、重力<math>mg</math>によってアームはピボットを中心としてシーソーのように傾く。この回転によるトルクで歳差運動が生じて、アームはピボットを中心として上から見て反時計回りに回転する。この回転を水平面上に表した円を図中に点線で描いている。</p> <p>この水平面上の回転を表す円に適当に基準線を取り、それを含む鉛直面とアームを含む鉛直面の角度を<math>\theta</math>とすると、これが歳差運動により変化するため、歳差運動の角速度は、<math>\omega_p = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}</math></p> <p>重力によるピボット中心（図の水平面上の回転を表す円の中心と一致）周りのトルクを <math>\tau</math> とすると、図より、<math>\tau = mgr \sin \varphi</math></p> </div> </div>

このトルクによって、角運動量  $L$  が変化するため、 $\Delta t$ の時間に $\Delta L$ だけ角運動量が増加し、角度が $\Delta\theta$ 増加するとすると、

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \tau = mgr \sin \varphi$$

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L_0 \sin \varphi}$$

$$\omega_p = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t L_0 \sin \varphi} = \frac{\tau}{L_0 \sin \varphi} = \frac{mgr \sin \varphi}{L_0 \sin \varphi} = \frac{mgr}{L_0} = \frac{mgr}{I \omega_s}$$

**B.6(iv) [1.0pt]**

$$\omega_p = \frac{mgr}{I \omega_s} = \frac{(0.089 + 0.094) \text{ kg} \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) \cdot (0.25 \text{ m})}{(0.000325 \text{ kg m}^2)(12600 \text{ rev/min})}$$

$$= \frac{0.5386 \text{ kg m}^2/\text{s}^2}{0.4288 \text{ kg m}^2/\text{s}} = 1.256 \text{ rad}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

単位は間違い。正しくは  $\text{rad s}^{-1}$

この解答例はアームの長さ 25 cm, ディスクの厚さ 2 mm で計算されているが、問題のパート B で指定しているアームの長さは 15cm, ディスクの厚さは 3 mm である。これを用いて計算し直すと、下のようになる。

$$\omega_p = \frac{mgr}{I \omega_s} = \frac{(0.089 + 0.094) \text{ kg} \cdot (9.8 \text{ m/s}^2) \cdot (0.15 \text{ m})}{(0.000445 \text{ kg m}^2)(2\pi \cdot (12600/60) \text{ rad s}^{-1})} = 0.458 \text{ rad s}^{-1}$$

これから歳差運動の周期は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = 13.7 \text{ s}$$

ただし、表に与えられた回転数と電圧の関係は無負荷のものと考えられるため、実際に6V で駆動しても 12600 rpm = 210 Hz =  $1.32 \times 10^3 \text{ rad/s}$  の回転数にはならない。 $\omega_s$ が小さいため、 $\omega_p$ は大きく、歳差周期は上の計算よりも短い。実際の回転数はわからないので、指示に従って計算するしかない。

**Part C: ジャイロスコープアームの長さの影響 [Total Point = 2.1]**

C.1. [1.2pt]	L/cm	10 cycles period (s)					Average 10 cycles period (s)	Period (s)	Precession Rate (rad/s)
		1	2	3	4	5			
	12	53.72	51.19	55.12	55.38	54.03	53.888	5.389	1.166
	14	43.85	48.75	48.22	48.84	47.9	47.512	4.751	1.322
	16	34.44	34.22	35.72	34.69	34.12	34.638	3.464	1.814
	18	30.5	30.12	30.53	29	29.68	29.966	2.997	2.097
	20	26.69	25.47	27.47	27.31	27.4	26.868	2.687	2.339
	22	23.54	23.62	23.78	23.66	23.93	23.706	2.371	2.650

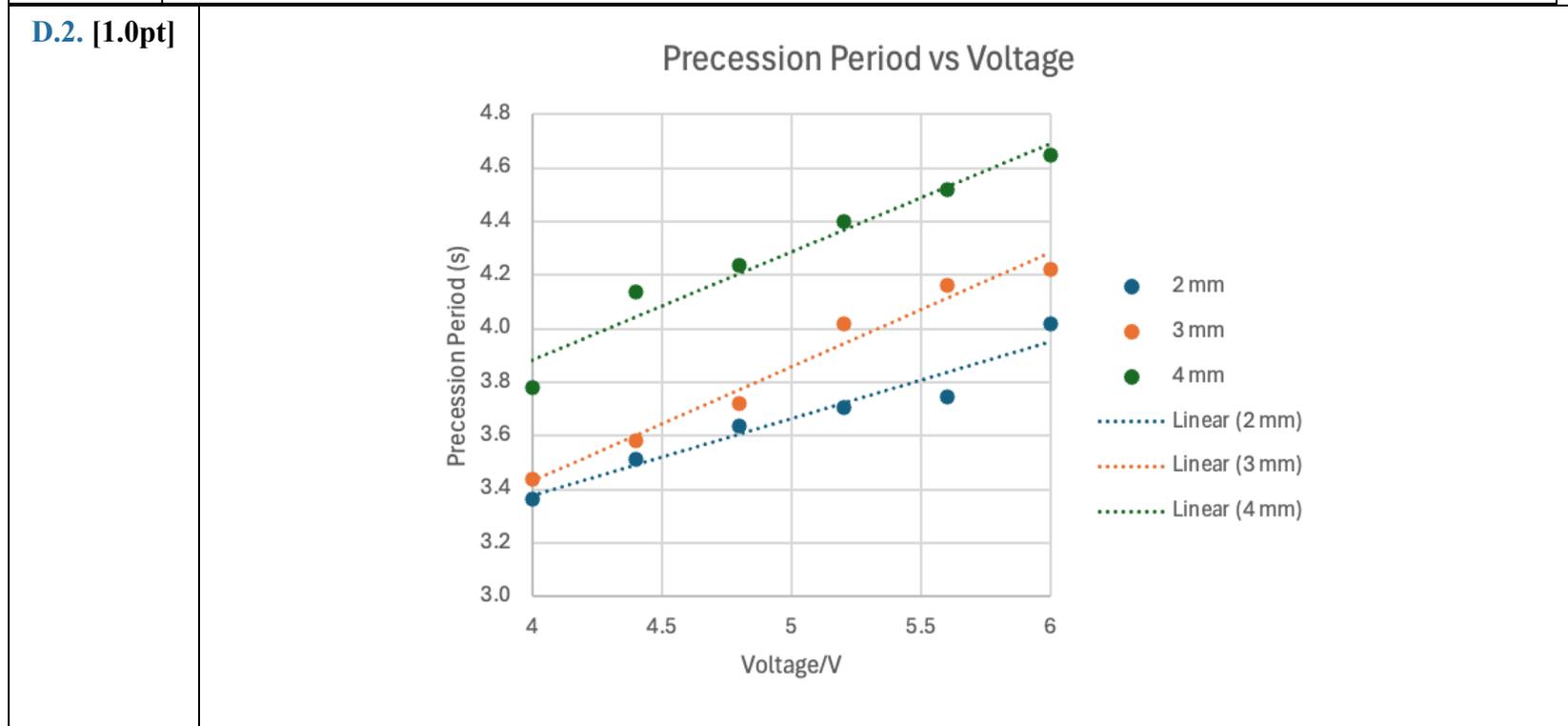
C.2. [0.7pt]
<p>Precession Rate vs. Length</p> <p>Precession Rate (rad/s)</p> <p>Length (cm)</p> <p><math>y = 0.1536x - 0.7136</math> <math>R^2 = 0.9869</math></p>

C.3. [0.1pt]
(a) ジャイロスコープアームの長さが増大すると、歳差運動の角振動数は増大する。

**Part D: ジャイロスコープの円板の重量の影響 [Total point = 3.6]**

Thickness (mm)	Voltage (V)	10 cycles period (s)					Average 10 cycles period	Period (s)	Precession rate (rad/s)
		1	2	3	4	5			
2	4	31.97	34.15	33.66	34.35	34.03	33.632	3.3632	1.8682
	4.4	35.04	35.28	35.24	36.78	33.25	35.118	3.5118	1.7892
	4.8	34.47	37.97	37.06	35.9	36.31	36.342	3.6342	1.7289
	5.2	38.06	36.16	36.65	36	38.53	37.08	3.7080	1.6945
	5.6	36.56	37.43	38.53	37.63	37.15	37.46	3.7460	1.6773
	6	40.35	40.28	40.13	39.81	40.31	40.176	4.0176	1.5639
3	4	34	35	35	34	34	34.4	3.44	1.8265
	4.4	35	36	36	36	36	35.8	3.58	1.7551
	4.8	38	37	37	37	37	37.2	3.72	1.6890
	5.2	40	40	41	40	40	40.2	4.02	1.5630
	5.6	41	42	43	41	41	41.6	4.16	1.5104
	6	43	42	42	42	42	42.2	4.22	1.4889
4	4	35.16	38.38	38.34	38.47	38.66	37.802	3.7802	1.6621
	4.4	37.81	41.94	42.84	42.31	42.03	41.386	4.1386	1.5182
	4.8	39.66	42.81	43.5	43	42.94	42.382	4.2382	1.4825
	5.2	42.07	44.19	44.56	44.75	44.32	43.978	4.3978	1.4287
	5.6	44.06	45.44	45.59	45.5	45.37	45.192	4.5192	1.3903
	6	45.62	46.94	46.53	46.56	46.81	46.492	4.6492	1.3515



**D.3. [0.1pt]** 解答例が間違っている。  
 正解は(c)円板の質量が増大すると歳差運動の回転が遅くなる（周期が長くなる）。これはD.2やD.4の結果からも明らかである。

**D.4. [0.8pt]**

B.6(iii)から、歳差運動の角速度は次の式で与えられる)

$$\omega_p = \frac{(m + M)gr}{I\omega_s}$$

ここで、 $m$ は円板の質量、 $M$ はモーターの質量である。

B.6(i)より、質量 $m$ 、半径 $R$ 一様な円板の慣性モーメントは、

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

従って、

$$\omega_p = \frac{(m + M)gr}{\frac{1}{2}mR^2\omega_s} = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{2gr}{R^2\omega_s} \quad (M\text{が一定ならば, } m \rightarrow \text{大のとき } \omega_p \rightarrow \text{小})$$

$$m = \frac{2Mgr}{R^2\omega_p\omega_s - 2gr}$$

具体的に、 $M = 0.094 \text{ kg}$ ,  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ ,  $r = 0.25 \text{ m}$  で計算すると、解答例にあるように、

$$m_i = \frac{2(0.094)(9.81)(0.25)}{(0.2)^2(\omega_{p,i})\omega_{s,i} - 2(9.81)(0.25)}$$

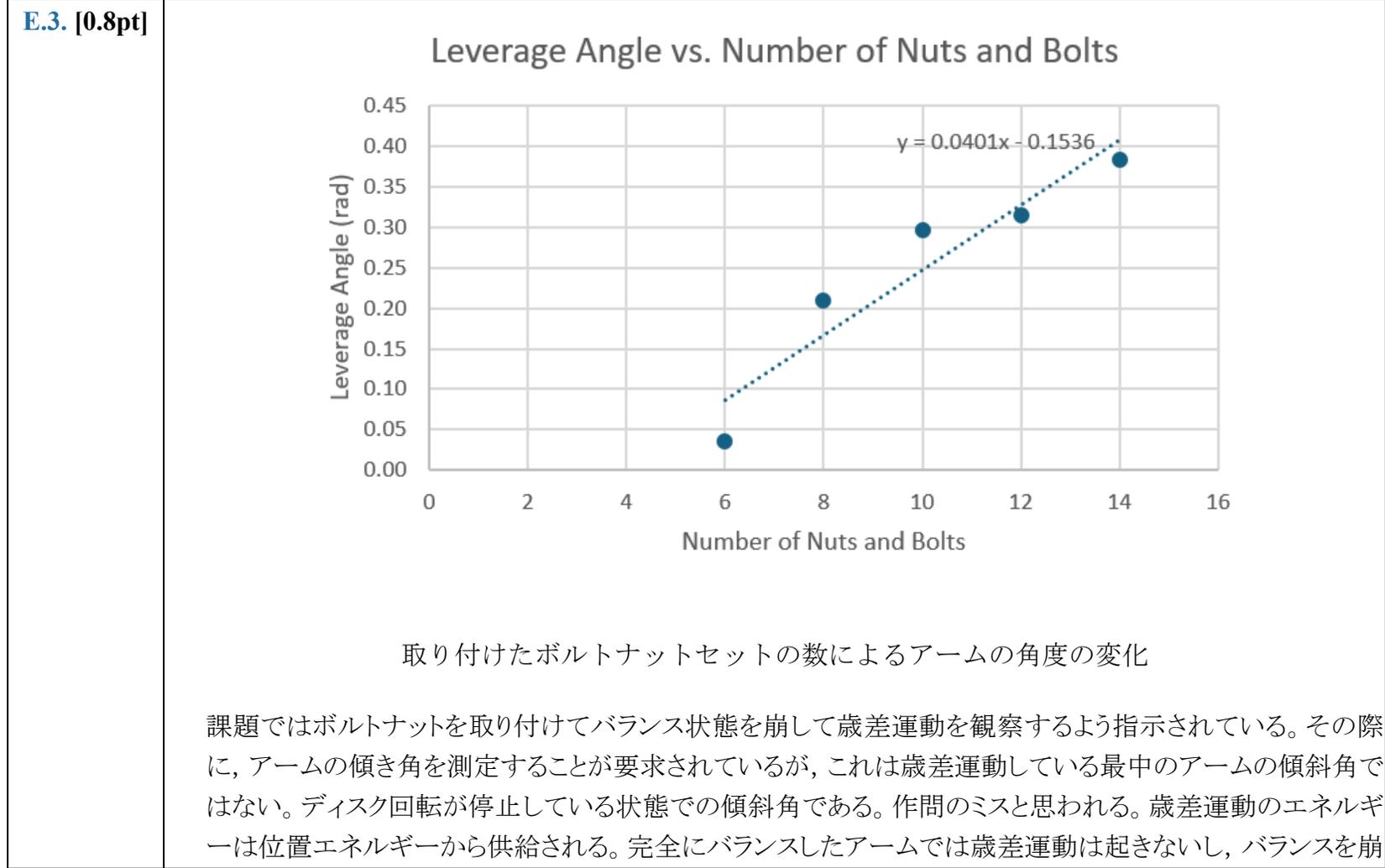
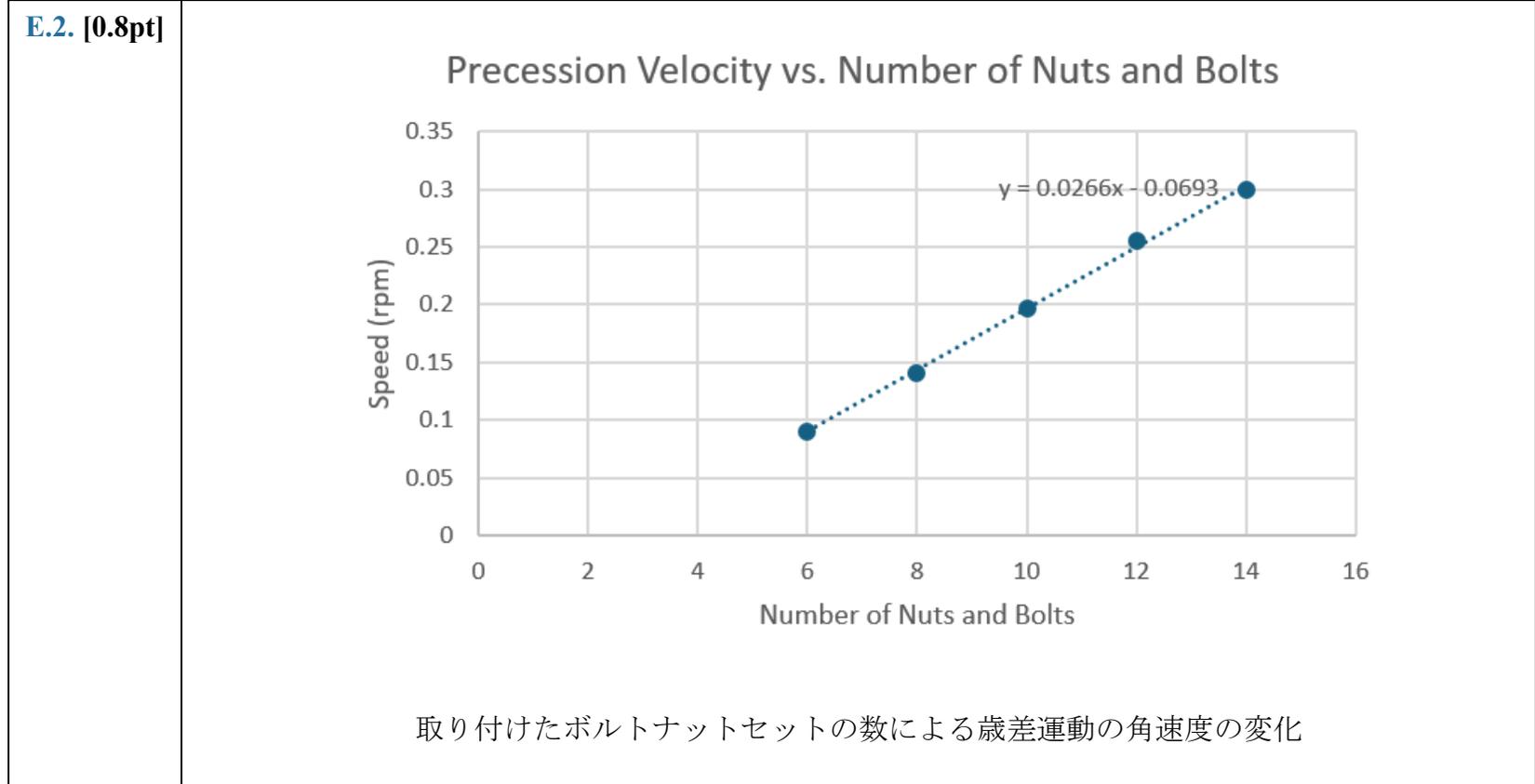
$M$ はモーターの質量、 $g$ は重力加速度の大きさ、 $\omega_s$ は円板の回転の角速度で、B.5で与えられている。ジャイロスコープアームの長さ $r$ は25 cm (実験では15 cm) に固定されており、歳差運動の角速度  $\omega_p$  は生徒の測定値。

$M = 0.094 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $r = 0.15 \text{ m}$  ならば、

$$m = \frac{2(0.094 \text{ kg})(9.8 \text{ m s}^{-2})(0.15 \text{ m})}{(0.2 \text{ m})^2\omega_p\omega_s - 2(9.8 \text{ m s}^{-2})(0.15 \text{ m})}$$

**Part E: 外力によって誘発されるトルク [Total point = 3.5]**

Number of sets of bolt and nut	Period 1 cycle (s)			Period (s)	Precession Velocity (rad/s)	Leverage Angle (rad)
	1	2	3			
4	46.34	47.9	46.79	47.01	0.1337	0.296705973
6	39.69	39	36.75	38.48	0.1633	0.261799388
8	31.65	29.96	32.16	31.26	0.2010	0.244346095
10	22.16	21.75	22.13	22.01	0.2854	0.366519143



した場合でも、アームが傾いた新たなバランス状態になれば歳差運動は停止する。歳差運動に伴う摩擦のためアームの角度は徐々に変化するので、歳差運動中のアームの角度は一定でもないし、ある安定な角度が存在するわけでもない)

**E.4.**  
**[0.5pt]**

一度釣り合いを取っており、ボルトナットセットの重さの分だけ片方に傾き、それにより歳差運動が生じるので、

B.6(iii)より、歳差運動の角速度は

$$\omega_p = \frac{Nmgr}{I\omega_s}$$

ここで、 $N$ は取り付けられたナットボルトセットの数、 $m$ はナットボルトセット1つの質量、 $g$ は重力加速度の大きさ、 $r$ はジャイロスコープアームの長さ、 $I$ は円板の慣性モーメント、 $\omega_s$ は円板の回転の角速度、 $\omega_p$ は歳差運動の角速度である。

Number of nuts and bolts	m/kg
6	0.0025
8	0.0029
10	0.0032
12	0.0035
14	0.0035
Average	0.0031
Std. dev.	0.0004

**E.5.**  
**[0.1pt]**

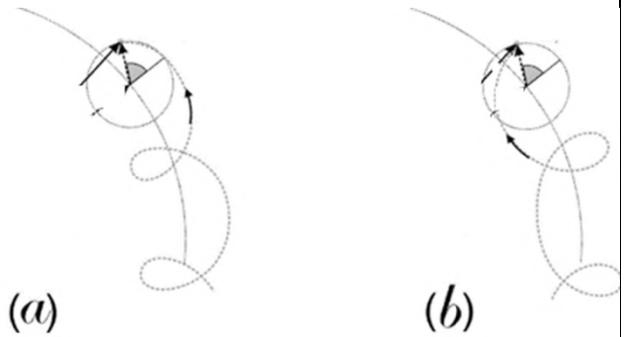
$I$  (慣性モーメントのみ) とあるが、これは間違い。

歳差周期  $\omega_p$  は、慣性モーメント  $I$  だけではなく、重力によるトルクに影響を受けるので  $m$  も影響するはずである。E.4の結果を見てもその傾向があることが分かる。

**Part F: 章動現象 [Total point = 2.1]**

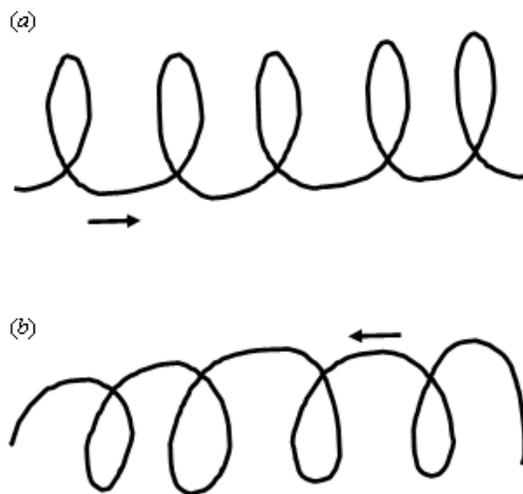
**F.1. [0.4pt]**

- (a) 円板側の方がカウンターウェイト側よりも低いとき
- (b) 円板側の方がカウンターウェイト側よりも高いとき.



解答の図は分かりにくい, というより, おそらく間違っているのだろう。はじめアームを水平に保持した状態で手を放すと(a)の場合では, 重力のため上から見て反時計回りのトルクが, (b)の場合は, 時計回りのトルクがはたらく。ディスクは外から見て反時計回りのため角運動量は外向きである。そのため歳差運動の回転向きは各場合のトルクの向きとなる。アームに衝撃を加えて章動を起こさせると, 章動は重力のトルクとは関係なく, ディスクの回転と同じ向きに, すなわち, 外から見て反時計まわりに回転する。ディスクの中心が描く軌跡を外から観察すると, (a)の場合, 右方向への平行移動に反時計回りの回転が重なる。(b)の場合は, 左方向への平行移動に反時計回りの回転が重なる。

ここで少し気を付けないといけないのは, アームをバランスさせた状態でも, アームを傾けると重力によるトルクが発生することである。これはアームの中心が, ピボットの中心よりわずかに低く, バランスをとった状態で“やじろべい”状態になっているためである。そのため, ディスクをカウンターウェイトより低い状態で放す(一見, 問題の(a)と同じ条件のようだが異なる)と, 上から見て時計回りのトルクがはたらく。そのため外から見ると左への移動に反時計回りの回転が重なり, 問題の(b)と同じ挙動を示す。



**F.2(i) [1.0pt]**

オイラーの方程式は

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = \tau_1 \quad \dots (1)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = \tau_2 \quad \dots (2)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = \tau_3 \quad \dots (3)$$

ディスクの回転軸に 3 を付けると  $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_3 \gg \omega_2$

外からのトルクはないので,  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$

ディスクの回転速度は一定なので,  $\dot{\omega}_3 = 0$

以上より,

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \quad \dots (4)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = 0 \quad \dots (5)$$

ディスクの対称性より,  $I_1 = I_2$

$$I_1 \dot{\omega}_1 = -(I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 \quad \dots (6)$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 = -(I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \quad \dots (7)$$

(6) 式の両辺を微分して,  $\dot{\omega}_3 = 0$  を利用すると,

$$I_1 \ddot{\omega}_1 = -(I_3 - I_1) \dot{\omega}_2 \omega_3 \quad \dots (8)$$

(7) 式より

$$\dot{\omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1}{I_1} \quad \dots (9)$$

(8) 式に (9) 式を代入して

$$I_1 \ddot{\omega}_1 = -(I_3 - I_1) \left[ \frac{(I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1}{I_1} \right] \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_1 = - \left[ \frac{(I_3 - I_1) \omega_3}{I_1} \right]^2 \omega_1 \quad \dots (10)$$

これは単純調和振動を表す式なので, 章動の角振動数を  $\omega_n$  とすると,

$$\omega_n = \frac{(I_3 - I_1) \omega_3}{I_1}$$

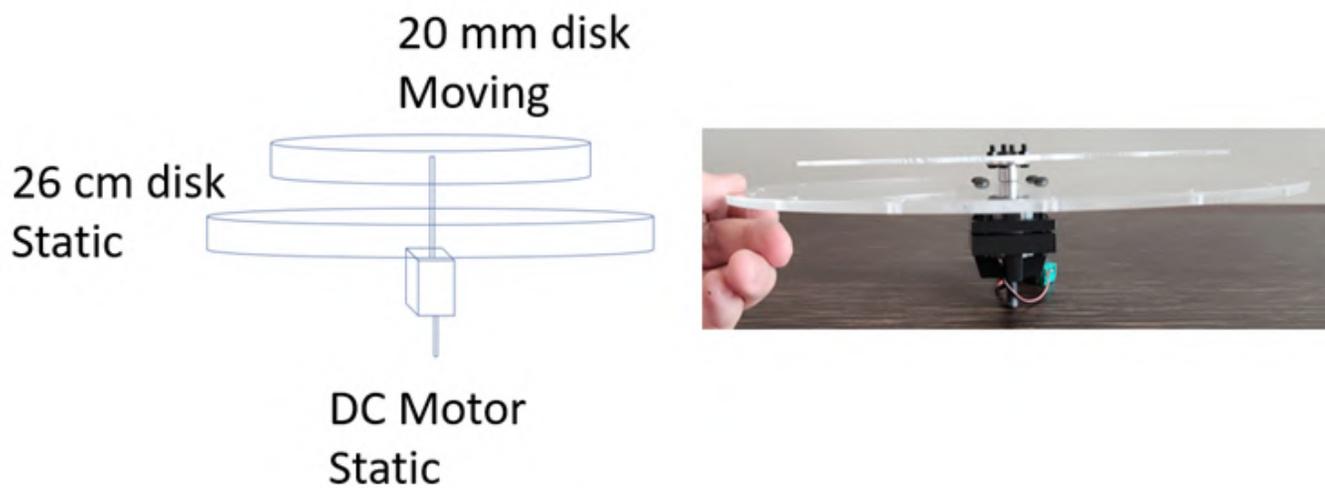
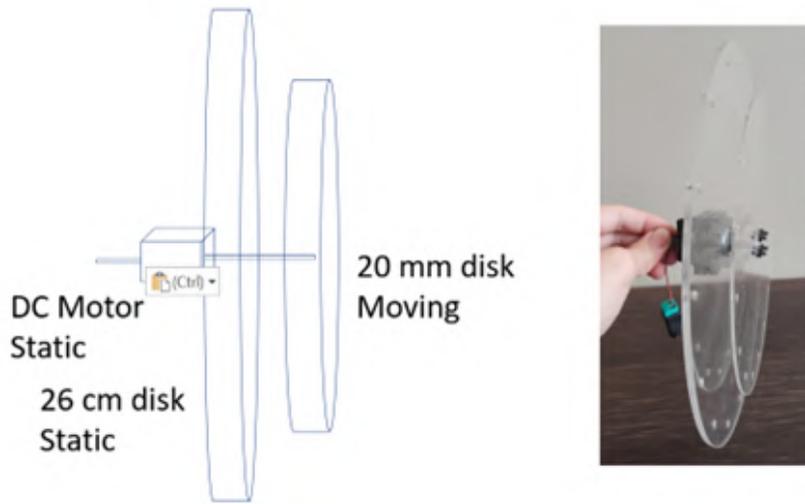
**F.2(ii) [0.1pt]**

単純調和振動を表すのは (10) 式

$$\ddot{\omega}_1 + \left[ \frac{(I_3 - I_1) \omega_3}{I_1} \right]^2 \omega_1 = 0 \quad \text{または,} \quad \ddot{\omega}_1 + \omega_n^2 \omega_1 = 0$$

**Part G: セルフバランス型ジャイロ스코ープの応用 [Total Point = 1.7]**

**G.1.** 26cm のディスクに直接モーターを取り付けられるようになっているので、それをうまく使う必要があるが、  
**[1.7pt]** それに気付くのはかなり困難である。



図中の 20 mm disk Moving は 20 cm disk Moving の間違いである。

2枚のディスクの隙間のカップラーのネジを閉めるには、ディスク中央付近に穿ってある2つのスリットからレンチを挿入する。そのため、場合によってはディスクとカップラーの位置を90度回転させて取り付け直すことが必要になる。カップラー取り付けネジの向きが逆でも干渉することはない。カップラーの端がモーター筐体に接しないよう少し隙間を設けることが必要である。