

## 一般的な指示

以下の条件の1つ以上を満たさない場合、失格となる可能性があります。

試験時間は5時間で、合計30点満点です。

試験監督が試験の開始・終了を指示し、試験終了まであと15分を知らせます。

指示があるまで封筒を開けないこと。

机の上にある次のものを使うことができます: (1) ボールペン、(2) シャープペンシル、(3) プラスチック消しゴム、(4) 定規、(5) 関数電卓、(6) デジタル置き時計。

### 試験中の注意事項:

- 机上の提供されたボールペンを使うこと。メモ、図、表、グラフの下書きにシャープペンシルを使った場合は、最終版のアウトラインをボールペンでなぞるのを忘れないこと。
- 最終的な解答には、**A**と書かれたシートを使うこと。適切な場所に解答と必要な考察を記入し、求められたグラフを描くこと。必要のない答えはバツをして消すこと。
- **W**と書かれた白紙は作業用です。問題ごとに指定されたものを使用すること。採点して欲しくない解答、採点して欲しくない下書きはバツをして消すこと。各シートは表(おもて)のみを使用し、枠外には記入しないこと。
- **Z**と書かれた追加の作業用紙を使えます。必要ならば「Help」の旗で試験監督に知らせてください。
- 解答は簡潔で読みやすいものにしましょう。方程式、論理演算子、記号、スケッチなど、あなたの考えを最もよく伝えるものを使ってください。採点者は多言語に対応していない可能性があるため、長文や冗長な表現は避けること。
- 特に指定がない限り、誤差の評価(定量化)は不要です。
- 公平性と不正防止のため、ビデオ撮影を行います。許可なくブースを離れないでください。トイレ休憩やその他のサポートが必要な場合は、「Toilet」「Water」「Help」と書かれた旗をあげてください。

### 試験終了時の注意事項:

- 試験終了が指示されたら、直ちに筆記をやめること。
- 各問題の窓付き封筒にすべてのシートを入れること。表向きに、問題用紙(**Q**)、解答用紙(**A**)、作業用紙(**W**)、(もし、あれば)追加作業用紙(**Z**)の順に、それぞれのページ番号順に並べます。最後に、表紙にある自分のID、名前、座席番号が封筒の窓から見えることを確かめること。(封筒に入れて提出せずに)机に残すのは「General Instructions」(ホッチキスで留めた黄色のシート)だけです。
- 退出は試験監督が指示します。ボールペン、シャープペンシル、プラスチック消しゴム、定規、関数電卓、デジタル置き時計、飲料水のボトル、スナックなどを持って退出すること。

## 物理定数

以下は、問題で与えられたものに加えて、解答に使用する可能性のある物理定数のリストです。

物理定数	記号	数値
真空中の光速	$c$	299 792 458 m/s
真空の透磁率 (磁気定数)	$\mu_0$	$1.256\,637\,062\,12(19) \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$ ; [1 N/A <sup>2</sup> = 1 V · s/(A · m)]
真空の誘電率 (電気定数)	$\epsilon_0$	$8.854\,187\,8128(13) \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ; [1 F/m = 1 A · s/(V · m)]
電気素量 (素電荷)	$e$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$ ; [1 C = 1 A · s]
電子質量	$m_e$	$9.109\,383\,7015(28) \times 10^{-31} \text{ kg}$
万有引力 (重力) 定数	$G$	$6.674\,30(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
アボガドロ定数	$N_A$	$6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
気体定数	$R$	8.314 462 618 ... J/(K · mol)
ボルツマン定数	$k$	$1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
ステファン・ボルツマン定数	$\sigma$	$5.670\,374\,419 \dots \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
プランク定数	$h$	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
換算プランク (ディラック) 定数	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.054\,571\,817 \dots \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

## 土壌コロイドの特性評価 (10 点)

コロイド科学は土壌粒子の特性評価に有用である。それは、土壌粒子の多くはマイクロメートルサイズのコロイド粒子とみなすことができるからである。例えば、ブラウン運動（コロイド粒子のランダムな運動）の理論を利用して粒子径を見積もることができる。

### パート A. コロイド粒子の運動 (1.6 点)

質量  $M$  をもつコロイド粒子の 1 次元ブラウン運動を解析する。その速度  $v(t)$  に対する運動方程式は次のようになる：

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

ここで、 $\gamma$  はまさつ係数、 $F(t)$  は水分子のランダムな衝突による力、 $F_{\text{ext}}(t)$  は外力である。ただし、パート A では、 $F_{\text{ext}}(t) = 0$  を仮定する。

- A.1** 水分子が  $t = t_0$  で粒子と衝突し、力積  $I_0$  を与え、それ以後は  $F(t) = 0$  だったとする。0.8pt  
衝突前に  $v(t) = 0$  とすると、 $t > t_0$  では  $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$  である。 $I_0$  と式 (1) の必要なパラメータを用いて  $v_0$  と  $\tau$  を決定せよ。

以下、解答に  $\tau$  を用いてよい。

- A.2** 実際には、水分子は次々と粒子と衝突する。 $i$  番目の衝突が時刻  $t_i$  に力積  $I_i$  を与え、0.8pt  
るとし、 $t > 0$  と  $v(0) = 0$  を条件として  $v(t)$  を決定せよ。また、与えられた  $t$  に対して考慮すべき  $t_i$  の範囲を指定する不等式を与えよ。解答用紙では、 $v(t)$  の式でこの範囲を指定する必要はない。

### パート B. 実効的な運動方程式 (1.8 点)

これまでの結果から、粒子速度  $v(t)$  と  $v(t')$  は、 $|t - t'| \gg \tau$  の場合、無相関のランダムな量とみなすことができる。これに基づき、速度が各時間間隔  $\delta (\gg \tau)$  でランダムに変化するとして、1 次元ブラウン運動を近似的に記述する次の理論モデルを導入する。

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \quad (2)$$

ここで、 $t_n = n\delta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) で、 $v_n$  は以下の式を満たすランダム変数であり、

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (3)$$

$C$  は  $\delta$  に依存するパラメータである。また、記号  $\langle X \rangle$  は  $X$  の期待値を示す。つまり、無限個の乱数  $X$  の平均が  $\langle X \rangle$  である。

ここで、 $N$  を整数として  $t = N\delta$  における粒子変位  $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$  を考える。

- B.1**  $C, \delta, t$  を使って  $\langle \Delta x(t) \rangle$  と  $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$  を決定せよ。1.0pt

**B.2** この量  $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$  は平均二乗変位 (MSD) と呼ばれる. これはブラウン運動の特徴的な観測量であり,  $\delta \rightarrow 0$  の極限ケースに相当する. このことから,  $C \propto \delta^\alpha$  と  $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$  を示すことができる.  $\alpha$  と  $\beta$  の値を求めよ. 0.8pt

### パート C 電気泳動 (2.7 ポイント)

ここでは電気泳動, すなわち電場による荷電粒子の輸送について考える. 質量  $M$ , 電荷  $Q (> 0)$  のコロイド粒子の懸濁液を, 断面  $A$  の狭い流路に入れる (図 1(a)). 粒子間の相互作用, 壁や流体, その中のイオンなどの影響, 及び重力は無視する.

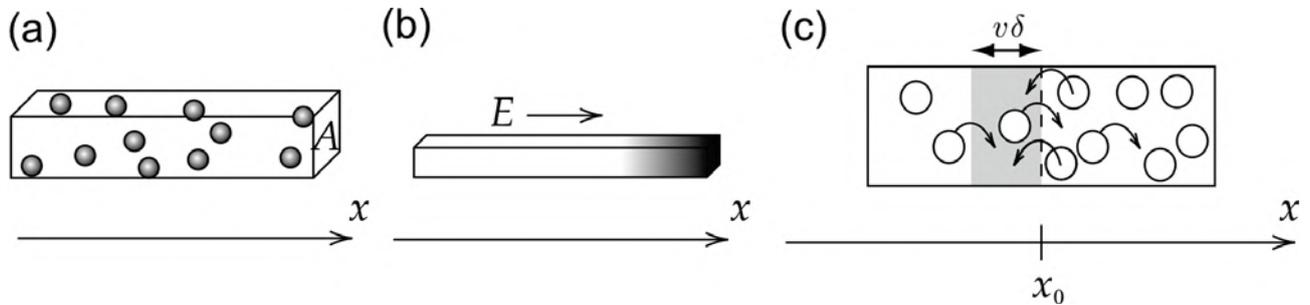


図 1: パート C の設定

$x$ -方向に均一な電場  $E$  を印加すると, 粒子が動かれ, その濃度  $n(x)$  (単位体積あたりの粒子数) が不均一になる (図 1(b)).  $E$  を取り除くと, この不均一性は徐々に消失する. これは粒子のブラウン運動によるものである.  $n(x)$  が一様でない場合, 右へ行く粒子と左へ行く粒子の数は一般に異なる (図 1(c)). これによって粒子流束  $J_D(x)$ , 即ち  $x$  における単位断面積と単位時間あたりに  $x$ -軸に沿う粒子の流れ, が発生する. この流束は以下の式を満たすことが知られている.

$$J_D(x) = -D \frac{dn}{dx}(x), \quad (4)$$

右辺の係数  $D$  は拡散係数と呼ばれる.

ここで簡単のため, 粒子の半分が速度  $+v$  を持ち, 残りの半分が速度  $-v$  を持つと仮定しよう. 単位断面積と単位時間あたりに左から右へ  $x_0$  を横切る速度  $+v$  をもつ粒子の数を  $N_+(x_0)$  とする. 速度  $+v$  をもつ粒子が, 時間間隔  $\delta$  に  $x_0$  を横切るためには, それらは図 1(c) の斜線領域にあるはずである.  $\delta$  が小さいので, この領域では  $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn(x_0)}{dx}$  としてよい.

**C.1**  $v, \delta, n(x_0)$ 、および  $\frac{dn}{dx}(x_0)$  から必要な量を用いて  $N_+(x_0)$  を表せ. 0.5pt

$-v$  の速度をもつ粒子について,  $N_+(x_0)$  と対をなすものとして  $N_-(x_0)$  を定義する. これにより,  $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$  が得られる. 式 (3) によれば,  $\langle v^2 \rangle = C$  である.

**C.2**  $C, \delta, n(x_0)$ 、および  $\frac{dn}{dx}(x_0)$  から必要な量を用いて  $J_D(x_0)$  を決定せよ. これと式 (4) を用いて,  $D$  を  $C$  と  $\delta$  の項で表し,  $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$  を  $D$  と  $t$  で表せ. 0.7pt

ここで浸透圧  $\Pi$  の効果について議論する. 浸透圧はアボガドロ定数  $N_A$ , 気体定数  $R$ , 温度  $T$ , ボルツマン定数  $k = \frac{R}{N_A}$  を用いて  $\Pi = \frac{n}{N_A}RT = nkT$  で与えられる. 電場  $E$  (図 1(b)) の下で形成される不均一濃度を考えてみよう.  $n(x)$  は  $x$  に依存するので,  $\Pi(x)$  も  $x$  に依存する.  $\Pi(x)$  と  $\Pi(x + \Delta x)$  による力は, 粒子に作用する電場  $E$  による力の合計と釣り合わなければならない (図 2). 我々は小さな  $\Delta x$  を考えるので,  $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$ .

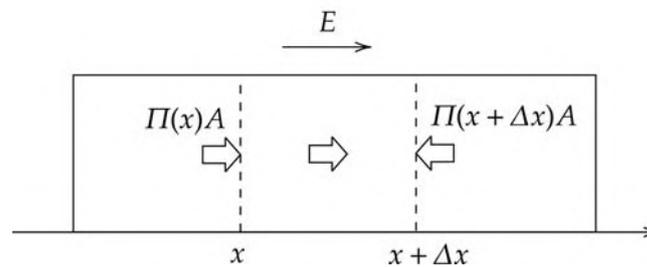


図 2: 力のつりあい

**C.3**  $n(x), T, Q, E$ , 及び  $k$  を使って  $\frac{dn}{dx}(x)$  を表せ.

0.5pt

ここで流束のつりあいを考えよう. ブラウン運動による流束  $J_D(x)$  のほかに, 電場による流束  $J_Q(x)$  も存在する.

$$J_Q(x) = n(x)u, \quad (5)$$

ここで,  $u$  は電場によって駆動される粒子の終端速度である.

**C.4**  $u$  を決定するために, 式 (1) を  $F_{\text{ext}}(t) = QE$  とともに使用する.  $v(t)$  は変動しているので,  $\langle v(t) \rangle$  を考える.  $\langle v(0) \rangle = 0$  を仮定し,  $\langle F(t) \rangle = 0$  を用いて,  $\langle v(t) \rangle$  を評価し,  $u = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle$  を求めよ.

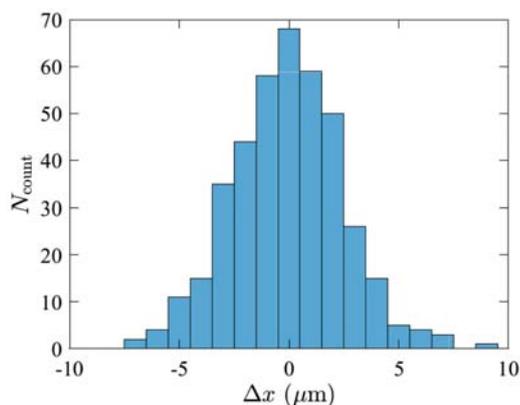
0.5pt

**C.5** 流れのつりあいは  $J_D(x) + J_Q(x) = 0$  と表される. 拡散係数  $D$  を  $k, \gamma, T$  で表せ.

0.5pt

## パート D 平均二乗変位 (2.4 点)

水中で半径  $a = 5.0 \mu\text{m}$  の孤立した球状コロイド粒子のブラウン運動を観測したとしよう. 図 3 は, 60 秒ごとに観測された  $x$ -方向の変位のヒストグラムである. まさつ係数は  $\gamma = 6\pi a\eta$  で与えられ, 水の粘性係数は  $\eta = 8.9 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  で, 温度は  $T = 25^\circ\text{C}$  であった.



$\Delta x$ ( $\mu\text{m}$ )	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
$N_{\text{count}}$	0	0	0	2	4	11	15
$\Delta x$ ( $\mu\text{m}$ )	-3	-2	-1	0	1	2	3
$N_{\text{count}}$	35	44	58	68	59	50	26
$\Delta x$ ( $\mu\text{m}$ )	4	5	6	7	8	9	10
$N_{\text{count}}$	15	5	4	3	0	1	0

図3：変位のヒストグラム

- D.1** 図3のデータから、アボガド定数であることを用いずに  $N_A$  の値を有効数字2桁まで推定せよ。気体定数は  $R = 8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$  である。ボルツマン定数  $k$  の値は使わないこと。アボガド定数については、「一般的な指示 G0-2」の表と異なる値が得られるかもしれない。 1.0pt

ここで、電場  $E$  の下での電荷  $Q$  を持つ粒子の運動を記述するために、パートBのモデルを拡張する。式(2)で考慮される粒子速度  $v(t)$  は、式(3)を満たす  $v_n$  と、式(5)に含まれる終端速度  $u$  をもつ  $v(t) = u + v_n$  ( $t_{n-1} < t \leq t_n$ ) で置き換える必要がある。

- D.2** MSD  $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$  を  $u, D, t$  で表せ。小さい  $t$  と大きい  $t$  の近似べき乗則とこの変化が起こる特徴的な時間  $t_*$  を求めよ。MSD の大まかなグラフを両対数プロットで描き、 $t_*$  のおよその位置を示せ。 0.8pt

次に、泳ぐ微生物(図4(a))を、簡単のために1次元で考えてみる(図4(b))、これらは半径  $a$  を持つ球状の粒子である。速度は  $+u_0$  か  $-u_0$  のどちらかで、符号は時間間隔  $\delta$  ごとに相関なくランダムに選ばれる。観察される運動は、遊泳による変位と、球形粒子のブラウン運動による変位の組み合わせである。

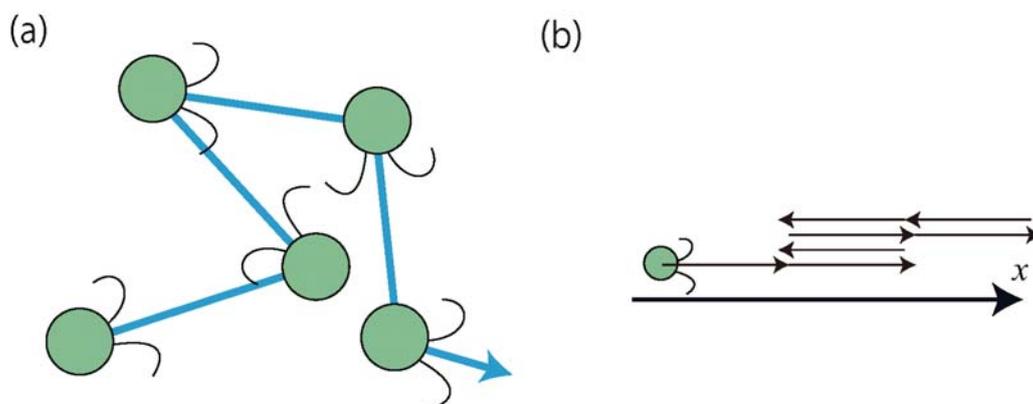


図4：(a) 微生物の動き (b) 1次元化した微生物の動き

- D.3 図5は、これらの微生物のMSD  $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$  を表示したもので、破線で示したように、小、大、および中間の  $t$  に対して異なるべき乗則を示している。 $D, u_0, \delta_0, t$  から必要な量を用いて、各時間範囲のべき乗則を表現せよ。 0.6pt

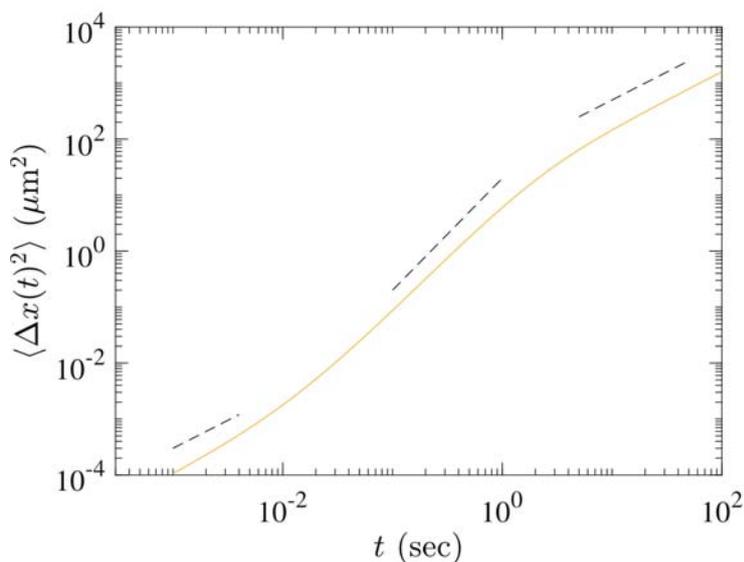


図5：微生物の平均二乗変位

### パート E. 水の浄化 (1.5 ポイント)

ここでは、コロイド状の土壌粒子を含む水に電解質を加えて凝集させ、浄化する方法について述べる。粒子はファンデルワールス力と静電力によって相互作用するが、静電力には表面電荷と周囲の反対電荷を帯びたイオンの層（このようなイオンとその層をそれぞれ対イオン電気二重層と呼ぶ；図6(a)参照）の両方の影響が含まれる。その結果、粒子間距離  $d$  (図6(b)) における相互作用は次式で与えられる。

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2} e^{-d/\lambda}, \quad (6)$$

ここで、 $A$  と  $B$  は正の定数、 $\epsilon$  は水の誘電率、 $\lambda$  は電気二重層の厚さである。イオンの電荷が  $\pm q$  であると仮定すると、次のようになる。

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}} \quad (7)$$

ここで  $c$  はイオンのモル濃度である。

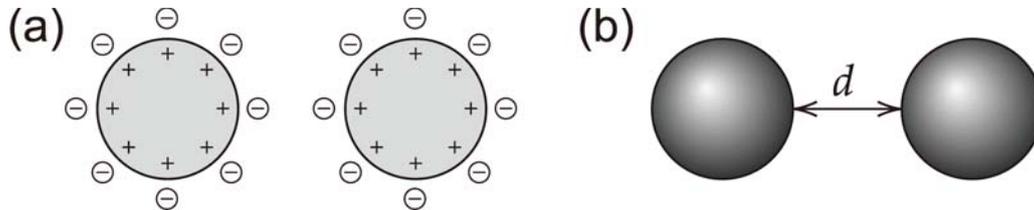


図 6: (a) コロイド粒子と対イオンの表面電荷, (b) 距離  $d$  の定義.

- E.1** 懸濁液に塩化ナトリウム (NaCl) を加えると, コロイド粒子が凝固する. 凝固に必要な NaCl の最低濃度  $c$  を求めよ. その際, 熱ゆらぎのない (すなわち式 (1) で  $F(t) = 0$  の) 2 つの粒子を考えれば十分である. また, 終端速度には瞬時に達すると考えてよい. 1.5pt

## 中性子星 (10 点)

大きな原子核の安定性を議論し、中性子星の質量を理論的・実験的に見積もる。

### パート A. 原子核の質量と安定性 (2.5 点)

$Z$  個の陽子と  $N$  個の中性子からなる原子核の静止エネルギー  $m(Z, N)c^2$  は、それぞれの数の陽子と中性子 (以下、核子と呼ぶ) の静止エネルギーの和よりも、結合エネルギー  $B(Z, N)$  の分だけ小さい。ここに、 $c$  は真空中の光速である。細かい補正を無視すると、結合エネルギーは、体積項  $a_V$ 、表面項  $a_S$ 、クーロンエネルギー項  $a_C$ 、対称エネルギー項  $a_{\text{sym}}$  から成るものとして次のように近似できる：

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}. \quad (1)$$

ここで、 $A = Z + N$  は質量数、 $m_N$  は核子の質量である。ここでの計算では、 $a_V \approx 15.8$  MeV、 $a_S \approx 17.8$  MeV、 $a_C \approx 0.711$  MeV、 $a_{\text{sym}} \approx 23.7$  MeV (MeV =  $10^6$  電子ボルト) とせよ。

**A.1**  $Z = N$  の条件の下で、核子 1 個あたりの結合エネルギー  $B/A$  を最大にする  $A$  を求めよ。 0.9pt

**A.2**  $A$  を固定した条件の下で、最も安定な原子核  $Z^*$  の原子番号は、 $B(Z, A - Z)$  を最大化することによって決定される。 $A = 197$  の場合に、式 (1) を用いて  $Z^*$  を求めよ。 0.9pt

**A.3**  $A$  の大きな原子核は、全静止質量エネルギーを最小にするべく、核分裂によって軽い原子核に分裂する。簡単のために、 $(Z, N)$  を持つ核が、2 つの同じ核に分裂する場合を考える。そのとき、次のエネルギー関係が成り立つ： 0.7pt

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

上の不等式を

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C}$$

と表すとしたとき、 $C_{\text{fission}}$  を有効数字 2 桁で求めよ。

### パート B. 巨大な原子核としての中性子星 (1.5 点)

質量数  $A$  が十分に大きくて、ある閾値  $A_c$  を超える ( $A > A_c$ ) 場合、原子核は、重力による束縛エネルギーが十分に大きいため、核分裂をせずに安定に保たれる。

- B.1** 十分に大きい  $A$  では、 $N = A$  と  $Z = 0$  が実現され、式 (1) は重力による束縛エネルギーを加えればそのまま成り立つと仮定する。重力による束縛エネルギーは 1.5pt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

である。ここで、 $M = m_N A$  と  $R = R_0 A^{1/3}$  とは、それぞれ、原子核の質量と半径である。ただし、 $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$  である。

$B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$  として、 $a_{\text{grav}}$  を MeV の単位で有効数字 1 桁で求めよ。次に、表面項を無視して、 $A_c$  を有効数字 1 桁で求めよ。計算では、 $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ 、 $G = \hbar c / M_P^2$  とせよ。ここで、 $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ 、 $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ 。

### パート C. 連星系の中性子星 (6.0 点)

一部の中性子星は、電磁波（ここでは簡潔に「光」と呼ぶことにする）を一定の周期で規則的に放射するパルサーである。中性子星はしばしば白色矮星と連星系をなす。図 1 に示すような星の配置を考えてみよう。中性子星 **N** から地球 **E** に向かう光パルスは、連星系の白色矮星 **W** の近くを通る。星の重力の影響を受けたこれらのパルス測定することで、以下に説明するように、**W** の質量を正確に推定することができ、結果として **N** の質量を推定することができる。

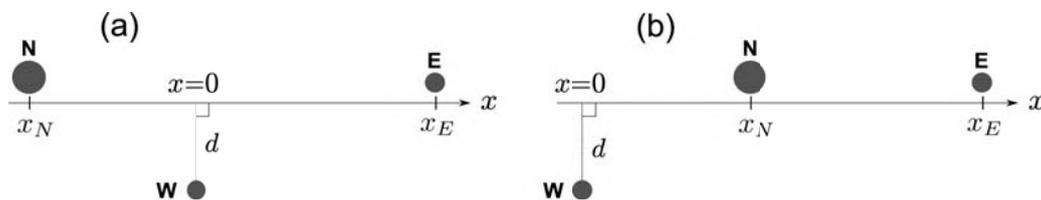
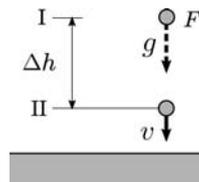


図 1: N と E を結ぶ直線に沿って  $x$  軸をとった場合の配置。(a)  $x_N < 0$  の場合と (b)  $x_N > 0$  の場合。

- C.1** 下図に示すように、一定の重力加速度  $g$  の下で、高低差  $\Delta h (> 0)$  のある2つの高さ I と II を考える。I, II, および自由落下系である  $F$  にそれぞれ、まったく同じ時計、時計-I, 時計-II, 時計- $F$  を設ける。 1.0pt



思考実験の設定.

観測者は時計- $F$  と共にあり、最初は時計-Iと同じ高さで、その速度はゼロであると仮定する。また、時計は同じものなので時間の進む間隔は同じであり、 $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$  が成り立っている。次に、 $F$  を自由落下させ、慣性系である  $F$  の系で考える。この系では時計-II は時計- $F$  のそばを速度  $v$  で通り過ぎるので、時計-II の時間の伸張はローレンツ変換によって求めることができる。時計- $F$  が時間  $\Delta\tau_I$  を刻む間に、時計-II では時間  $\Delta\tau_{II}$  が経過している。

$\Delta\tau_{II}$  を、 $\Delta\tau_I$  を使って  $\Delta\phi/c^2$  の一次のオーダーで表せ。ここで  $\Delta\phi = g\Delta h$  は重力ポテンシャルの差、すなわち、単位質量あたりの重力ポテンシャルエネルギーの差である。

- C.2** 重力ポテンシャル  $\phi$  のもとでは、時間の遅延が、局所的には光速は  $c$  であるにもかかわらず、無限遠から観測される光の実効速度に変化をもたらす。 $\phi(r = \infty) = 0$  のとき、光の実効速度  $c_{\text{eff}}$  は、 $\phi/c^2$  の一次のオーダーまででは、次のように表される： 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c.$$

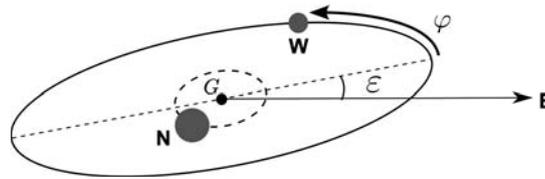
これには、**C.1** では取り上げなかった空間の歪みの影響も含まれている。なお、光路は直線で近似できる。

図 1(a) に示すように、中性子星 **N** から地球 **E** への光路に沿って  $x$ -軸をとり、白色矮星 **W** が光路に最も近い点を  $x = 0$  とする。**N** の  $x$  座標を  $x_N (< 0)$ 、**E** の  $x$  座標を  $x_E (> 0)$ 、**W** と光路との距離を  $d$  とする。

質量  $M_{\text{WD}}$  の白色矮星によって引き起こされる、**N** から **E** への光の到着時間の变化  $\Delta t$  を、以下の小さな量の高次の項を無視して、簡単な形で評価せよ： $d/|x_N| \ll 1$ 、 $d/x_E \ll 1$ 、 $GM_{\text{WD}}/(c^2d) \ll 1$ 。必要であれば、次の公式を用いよ。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C. \quad (\log \text{ は自然対数を表す})$$

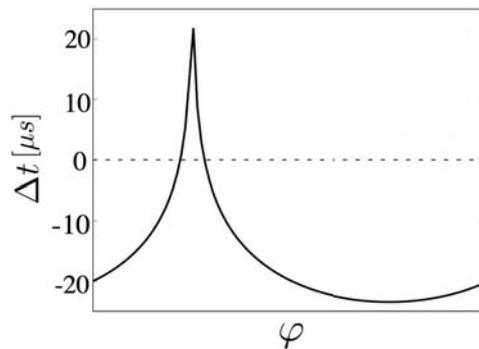
- C.3** 以下に示すように、連星系の **N** と **W** は、軌道面上で、質量中心  $G$  を中心とする離心率ゼロの円軌道を動いていると仮定する。  $\varepsilon$  を  $G$  から **E** に向けた直線と軌道面がなす軌道傾斜角とし、  $L$  を **N** と **W** の間の距離、  $M_{\text{WD}}$  を白色矮星の質量とする。以下では、  $\varepsilon \ll 1$  と仮定する。 1.8pt



連星系.

**N** から遠く離れた **E** で **N** からの光パルスを観測する。 **E** への光路は **N** と **W** の配置によって時間的に変化する。 **E** に到着するパルスの時間間隔の遅れは、  $x_N \simeq -L$  で最大値  $\Delta t_{\text{max}}$ 、  $x_N \simeq L$  で最小値  $\Delta t_{\text{min}}$  となる (図 1(b) を参照)。 **C.2** で行ったような、小さな高次項を無視した単純な形で、  $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$  を計算せよ。 **W** 以外の天体の重力による影響は  $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$  では相殺されるものとする。

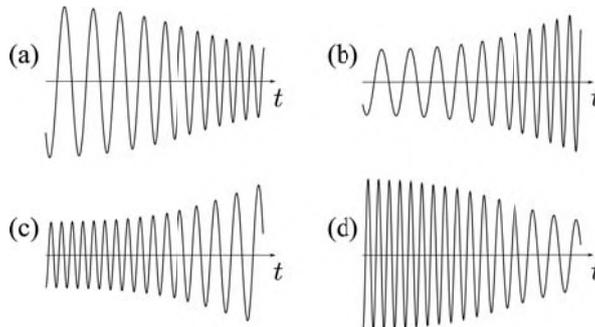
- C.4** 下の図は、  $L \approx 6 \times 10^6 \text{ km}$  で  $\cos \varepsilon \approx 0.99989$  である連星系について、観測される時間遅延を軌道の位相  $\varphi$  の関数として示したものである。  $M_{\text{WD}}$  を太陽質量  $M_{\odot}$  を単位として推定し、結果を  $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$  として有効数字 1 桁で示せ。その際、  $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$  として近似して良い。 0.8pt



**N** と **W** を軌道上の配置を表す軌道の位相  $\varphi$  (**C.3** に示した図参照) の関数として観測されるパルス時間間隔の遅れ  $\Delta t$  .

- C.5** 中性子星同士の連星系では、2つの星は重力波を放出することによりエネルギーと角運動量を失い、やがては衝突して合体する。簡単のため、半径  $R$ 、角速度  $\omega$  の円運動のみを考えると、相対論的效果を無視すれば、  $\omega$  にも  $R$  にも依存しない一定の値をもつ係数を  $\chi$  として  $\omega = \chi R^p$  が成り立つ。  $p$  の値を求めよ。 0.4pt

- C.6** C.5 の連星系から放出される重力波の振幅は  $R^2\omega^2$  に比例する．下の図は，4つの異なる時間変化のグラフを定性的に示している．2つの星の衝突前に観測される重力波の時間変化のグラフとして最も適切なものを (a)~(d) の中から 1つ選べ． 0.2pt



観測される重力波の時間変化のグラフ．



## 水と物体 (10 pt)

この問題では、水と物体の相互作用によって引き起こされる、表面張力に関する現象を考える。パート A では運動を扱い、パート B と C では静的な状況を扱う。

必要であれば、関数  $y(x)$  が微分方程式  $y''(x) = ay(x)$  ( $a$  は正の定数) を満たす場合、その一般解は  $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$  という事実を使うことができる。ここで  $A$  と  $B$  は任意の定数である。

### パート A：水滴の合体 (2.0 ポイント)

図 1 に示すように、超撥水性材料の表面上に 2 つの静止した球形の水滴があるとす。超撥水性材料とは、水を強くはじく材料ということである。

最初、全く同じ 2 つの水滴が隣り合って超撥水性の表面に置かれている。次にこの 2 つの水滴は接触して合体し、より大きな球形の水滴となり、突然跳ね上がる。

- A.1** 合体前の両水滴の半径  $a$  は  $100 \mu\text{m}$  である。水の密度  $\rho$  は  $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  で、表面張力  $\gamma$  は  $7.27 \times 10^{-2} \text{ J/m}^2$  である。合体前後の表面エネルギーの差  $\Delta E$  の一部、 $k\Delta E$  は、水滴が跳ね上がる運動エネルギーに変換される。以下の仮定のもとで、合体した水滴の初期跳ね上がり速度  $v$  を有効数字 2 桁で求めよ：
- $k = 0.06$ .
  - 合体の前後で、水の総量は保存される。
- 2.0pt

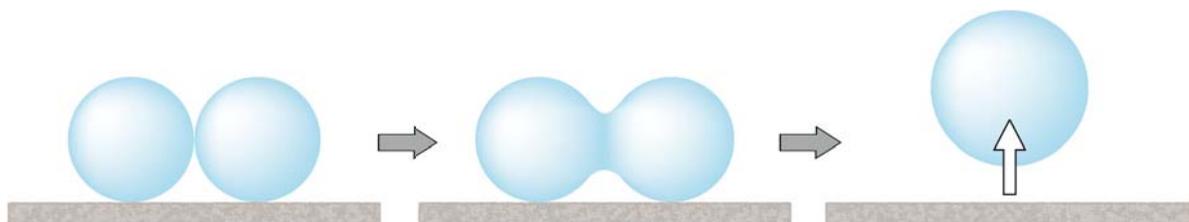


図 1：2 つの水滴の合体と合体した水滴のジャンプ。

### パート B. 縦に置かれた板 (4.5 ポイント)

平らな板を垂直に水に浸す。図 2(a) と図 2(b) はそれぞれ、親水性と撥水性の板が作る水面の形状を示している。板の厚みは無視している。

板の表面は  $yz$  平面上にあり、板から遠く離れた水平な水面は  $z = 0$  の  $xy$  平面上にある。表面の形状は  $y$ -座標には依存しない。 $xz$  平面上で、水面上の点  $(x, z)$  における水面と水平面のなす角を  $\theta(x)$  とする。ここで  $\theta(x)$  は正の  $x$  軸を基準として測定され、反時計回りを正とする。板と水面の接触点 ( $x = 0$ ) における  $\theta(x)$  を  $\theta_0$  とする。 $\theta_0$  は板の素材の特性によって決まる量である。

水の密度  $\rho$  は一定で、水の表面張力  $\gamma$  は一様である。重力加速度の大きさを  $g$  とする。大気圧  $P_0$  は常に一様であると仮定する。以下の手順で水面の形状を決定しよう。なお、表面張力の単位は  $\text{J/m}^2$  であり  $\text{N/m}$  と書くこともできる。

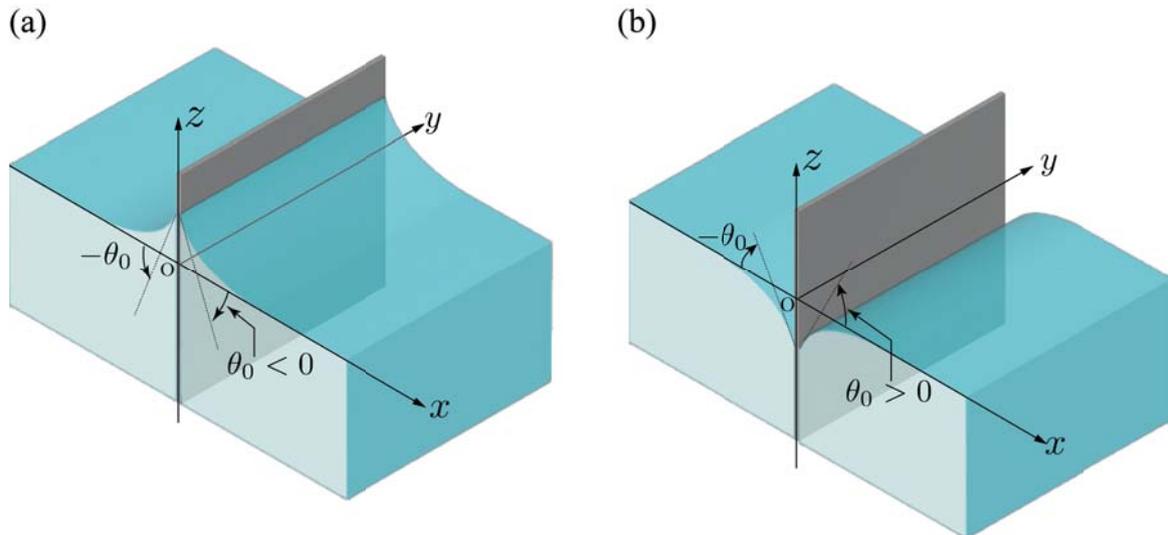


図2：垂直に水に浸した板. (a) 親水性の板の場合.  
(b) 撥水性の板の場合.

**B.1** 図2(a)に示すように、親水性の板の場合を考える。ここで、水圧  $P$  は、 $z > 0$  に対する条件  $P < P_0$  と、 $z = 0$  に対する条件  $P = P_0$  を満たすことに注意する。 $z$  における  $P$  を、 $\rho, g, z, P_0$  で表せ。 0.6pt

**B.2** 図3(a)に網掛けで示した水ブロックを考える。その  $xz$  平面断面を図3(b)にハッチングで示す。 $z_1, z_2$  をそれぞれ水ブロックと空気との境界（水面）の左右端座標とする。圧力によって水ブロックにかかる、 $y$ -軸方向単位長さあたりの正味の力  $f_x$  の水平成分 ( $x$  成分) を、 $\rho, g, z_1, z_2$  で表せ。 $P_0$  は結果的に、水ブロックに正味の水平力を与えないことに注意せよ。 0.8pt

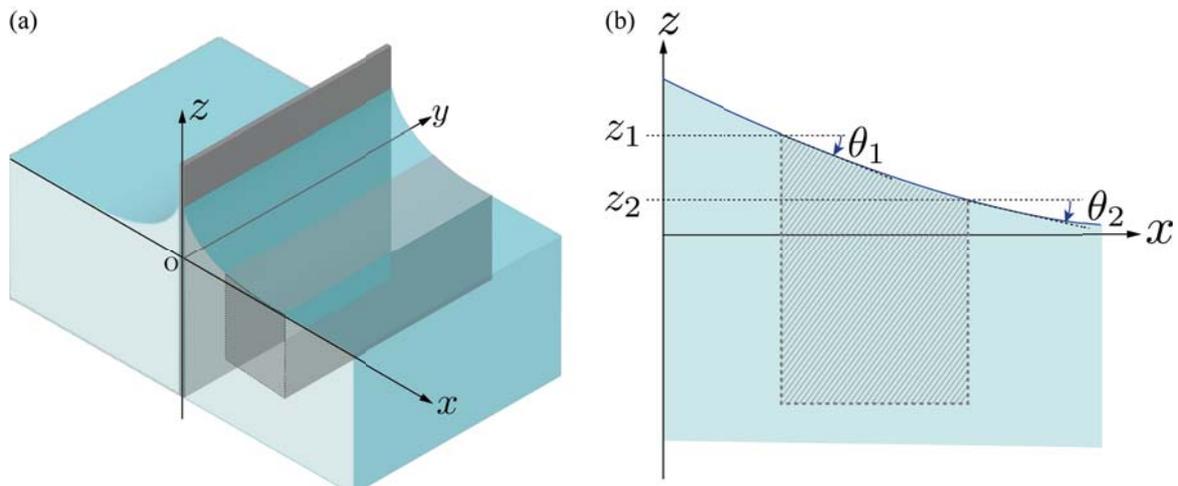


図3：水面上の水ブロックの切り出し形状. (a) は鳥瞰図, (b) は断面図.

- B.3** 水ブロックに作用する表面張力は, B.2 で議論した力  $f_x$  と釣り合う. ここで,  $\theta_1$  と  $\theta_2$  をそれぞれ, 左端と右端における水面と水平面のなす角と定義する.  $f_x$  を  $\gamma, \theta_1, \theta_2$  で表せ. 0.8pt

- B.4** 水面上の任意の点  $(x, z)$  において以下の式が成り立つ, 0.8pt

$$\frac{1}{2} \left( \frac{z}{\ell} \right)^a + \cos \theta(x) = \text{constant}. \quad (1)$$

指数  $a$  を決定し, 定数  $\ell$  を  $\gamma$  と  $\rho$  を用いて表せ. この式は板が親水性でも, 撥水性でも, 板の素材に関係なく成り立つことに注意せよ.

- B.5** B.4 の式 (1) において, 水面の変動は緩やかで  $|z'(x)| \ll 1$  が成り立ち,  $\cos \theta(x)$  が  $z'(x)$  の 2 次までの展開で近似できると仮定する. そのようにして, 得られた方程式を  $x$  に関して微分すると,  $z(x)$  が満たす微分方程式が得られる. この微分方程式を解き,  $\tan \theta_0$  と  $\ell$  を用いて,  $x \geq 0$  に対する  $z(x)$  を求めよ. 図 2 と図 3 の垂直方向は見やすくするために誇張されており,  $|z'(x)| \ll 1$  という条件を満たしていないことに注意せよ. 1.5pt

### パート C : 2 本の棒の相互作用 (3.5 ポイント)

同じ材質による 2 本の同一の棒 A と B が,  $y$ -軸から同じ距離で  $y$ -軸に平行に浮いている (Fig.4) .

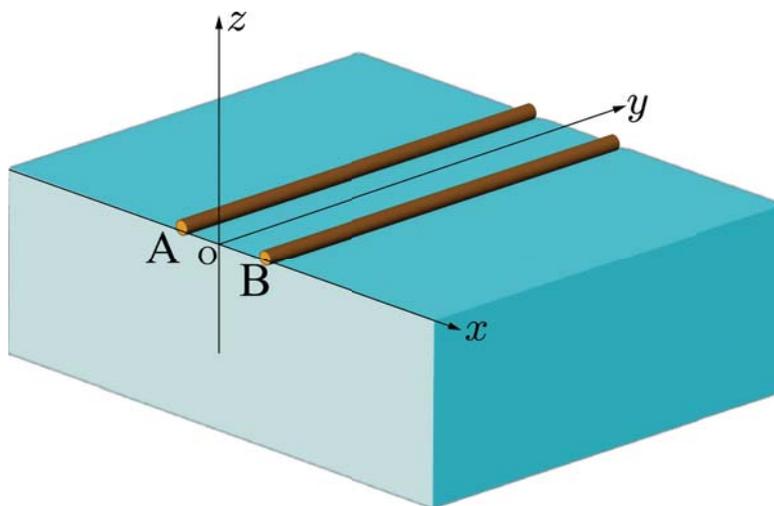


図 4 : 水面に浮かぶ 2 本の棒 A と B.

- C.1** 棒 B と水面の接点において, 図 5 に示すように,  $z$ -座標  $z_a, z_b$ , 角度  $\theta_a, \theta_b$  を定義する.  $\theta_a, \theta_b, z_a, z_b, \rho, g, \gamma$  を用いて, 棒 B にかかる水平力成分の  $y$ -軸方向単位長さあたりの大きさ  $F_x$  を表せ. 1.0pt

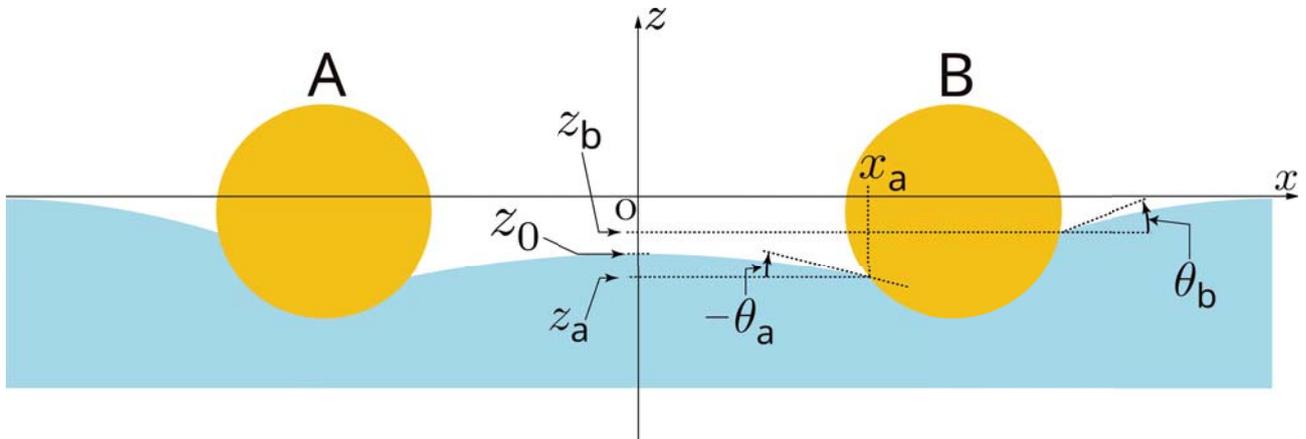


図5：水面に浮かぶ2本の棒の垂直断面図.

**C.2**  $xz$  平面上の2本の棒の中心で、水面の  $z$ -座標  $z_0$  を定義する. C.1 で得られた力  $F_x$  を  $\theta_a, \theta_b, z_a, z_b$  を使わずに表現せよ. 1.5pt

**C.3**  $x_a$  を棒の左側で棒と水面が接する点の  $x$  座標とする. B.4 で求めた微分方程式を用いて、これら2本の棒A, Bの中心の水位座標  $z_0$  を  $x_a$  と  $z_a$  を用いて表せ. B.4 で導入した定数  $\ell$  を用いてもよい. 1.0pt

## 土壌コロイドの特性評価 (10 点)

### パート A. コロイド粒子の運動 (1.6 点)

**A.1** (0.8pt)

$$v_0 =$$

$$\tau =$$

**A.2** (0.8pt)

$$v(t) =$$

考慮する必要がある  $t_i$  の範囲を指定する不等式：

### パート B. 実効的な運動方程式 (1.8 点)

**B.1** (1.0pt)

( $C, \delta, t$  のみ使用)

$$\langle \Delta x(t) \rangle =$$

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$$

**B.2** (0.8pt)

$$\alpha =$$

$$\beta =$$

### パート C. 電気泳動 (2.7 ポイント)

**C.1** (0.5pt)

( $v, \delta, n(x_0), \frac{dn}{dx}(x_0)$  のみ使用)

$$N_+(x_0) =$$

**C.2 (0.7pt)**

( $C, \delta, n(x_0), \frac{dn}{dx}(x_0)$  のみ使用)

$$J_D(x_0) =$$

( $C, \delta$  のみ使用)

$$D =$$

( $D, t$  のみ使用)

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$$

**C.3 (0.5pt)**

( $n(x), T, Q, E, k$  のみ使用)

$$\frac{dn}{dx}(x) =$$

**C.4 (0.5pt)**

$$\langle v(t) \rangle =$$

$$u =$$

**C.5 (0.5pt)**

( $k, \gamma, T$  のみ使用)

$$D =$$

**パート D. 平均二乗変位 (2.4 点)****D.1 (1.0pt)**

$$N_A =$$

**D.2 (0.8pt)**

( $u, D, t$ のみ使用)

一般の  $t$  に対して：

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$$

$t$  が小さな場合：

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto$$

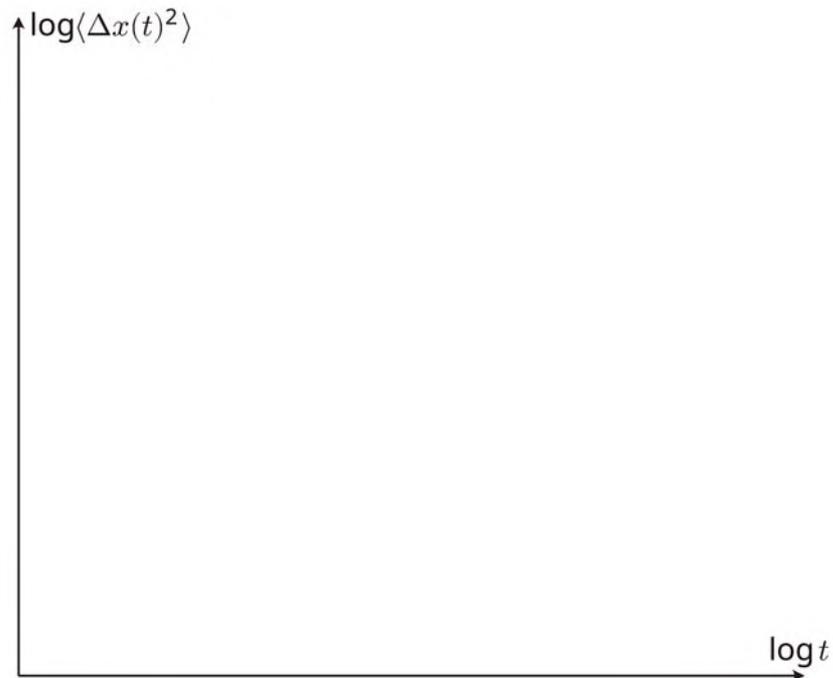
$t$  が大きな場合：

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto$$

特性時間  $t_*$ ：

$$t_* =$$

$t$  に対する  $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$  の両対数プロット：  
(グラフ中に  $t_*$  のおおよその位置も示せ)



**D.3** (0.6pt)

( $D, u_0, \delta_0, t$  のみ使用)

$t$  が小さい場合：

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$$

$t$  が中程度の場合：

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$$

$t$  が大きな場合：

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$$

**パート E. 水の浄化 (1.5 ポイント)****E.1** (1.5pt)

$$c =$$

## 中性子星 (10 点)

### パート A. 原子核の質量と安定性 (2.5 点)

**A.1** (0.9pt)

$$A =$$

**A.2** (0.9pt)

$$Z^* =$$

**A.3** (0.7pt)

$$C_{\text{fission}} =$$

### パート B. 巨大な原子核としての中性子星 (1.5 点)

**B.1** (1.5pt)

$$a_{\text{grav}} =$$

$$A_c =$$

### パート C. 連星系の中性子星 (6.0 点)

**C.1** (1.0pt)

$$\Delta\tau_{\text{II}} =$$

**C.2** (1.8pt)

$$\Delta t =$$

**C.3** (1.8pt)

$$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} =$$

**C.4** (0.8pt)

$$M_{\text{WD}}/M_{\odot} =$$

**C.5** (0.4pt)

$$p =$$

**C.6** (0.2pt)

最も適切な時間変化のグラフは

## 水と物体 (10 pt)

### パート A : 水滴の合体 (2.0 ポイント)

**A.1** (2.0pt)

$v =$

### パート B. 縦に置かれた板 (4.5 ポイント)

**B.1** (0.6pt)

$P =$

**B.2** (0.8pt)

$f_x =$

**B.3** (0.8pt)

$f_x =$

**B.4** (0.8pt)

$a =$

$\ell =$

**B.5** (1.5pt)

$$z(x) =$$

**パート C : 2 本の棒の相互作用 (3.5 ポイント)**

**C.1** (1.0pt)

$$F_x =$$

**C.2** (1.5pt)

$$F_x =$$

**C.3** (1.0pt)

$$z_0 =$$