E1: 惑星 – 解答例

A.1: 重力加速度

自由落下加速度 g は, 空気摩擦や惑星の曲率による影響が最小になるような低い位置から落下させることで求めることができる。また, ボールの半径と密度をできるだけ大きくして、空気摩擦の影響を最小にする。r = 50 cm、ρ = 10 g/cm^3 とする。落下の高さは $h = gt^2/2$ で与えられるので、t^2 vs h でのグラフの傾きから g を求められる。傾きは、
$2/g$ = 0.127 s^2/m、その不確かさ $\Delta(2/g)$ = 0.004 s^2/m なので、g = 15.7 m/s^2、
不確かさ Δg = 0.5 m/s^2 となる。

表1

r = 50 cm, ρ = 10 g/cm^3

h (m)	s (m)	t (s)	t^2 (s^2)
0	0.0	0.0	0.0
20	0.0	1.7	2.9
40	0.0	2.2	4.8
60	0.0	2.8	7.8
80	0.1	3.2	10.2
100	0.1	3.5	12.2
120	0.2	3.9	15.2
140	0.0	4.1	16.8
160	0.1	4.6	21.2
180	0.1	4.8	23.0
200	0.1	5.1	26.0

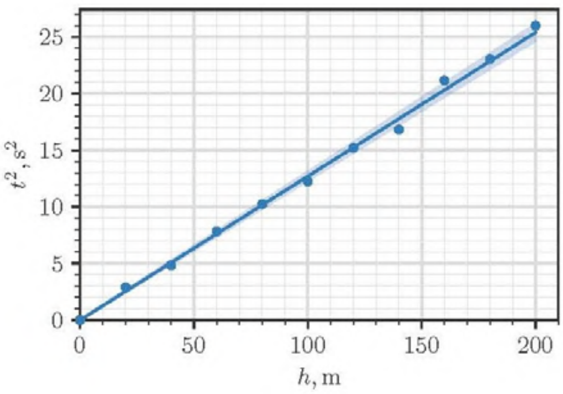


図１ : hと t^2のプロット

A.2: 惑星の半径

塔の上からどれだけ遠くを見ることができるかということから、惑星の半径は、次の図のような直角三角形で表される。この三角形にピタゴラスの定理を適用すると、

$(R + H)^2 = L^2 + R^2$ となる。

$R = (L^2 - H^2) / 2H$ = 13 200 km.

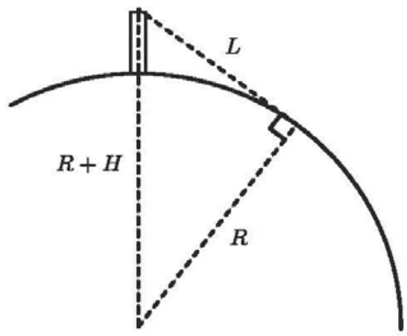


図２ : 惑星の半径と塔の先端が見える距離の関係

A.3: 惑星の質量

ニュートンの重力の法則から $g = GM / R^2$ となる。したがって

$M = gR^2 / G$ = 4.2 × 10^{25} kg

となる。

この不確かさを２乗和の平方根で計算すると（ΔRの項は極小である)、

$\Delta M = (\Delta g / g) \times M$ = 0.2 × 10^{25} kg

となる。

自由落下加速度の推定には、自転による遠心力の寄与がある。このため、表面での加速度が小さくなり、惑星の質量の推定値が小さくなる。

B.1 : 風速

一般に、重力加速度の変動が小さい場合（ここでは $H \ll R$) には、空気抵抗により、物体は正味の加速度がかからない終端速度になる。これは、大気中で風のない場合では、ある終端速度 v_t でまっすぐ落下することに対応する。実験室での現象と考えると、物体は水平速度と垂直速度、それぞれ u と v_t をもつ。

uを求めるには、物体ができるだけ速く終端速度に達するように、物体を落下させ、変位 s と落下時間 t の関係を観察する。終端速度に達したとき、$s = s_0 + ut$ と予想できる。ここで、s_0 は終端速度に到達するまでの変位を表す。空気抵抗の影響を最大にするために、半径と密度を最小にし、$\rho = 0.1$ g/cm^3, $r = 5$ cm、s と t をプロットすると、傾きは uになる。$u = 1.31$ m/s、不確かさは $\Delta u = 0.04$ m/s である。

表 2

$r = 5$ cm, $\rho = 0.1$ g/cm^3

h (m)	s (m)	t (s)
0	0.0	0.0
20	0.3	1.7
40	0.8	2.6
60	1.5	3.4
80	2.4	4.2
100	3.2	5.0
120	4.1	5.7
140	5.0	6.5
160	5.8	7.3
180	6.9	7.9
200	7.4	8.5
240	9.4	10.0
280	11.7	11.6
320	13.4	12.9
360	15.4	14.4
400	16.4	15.4

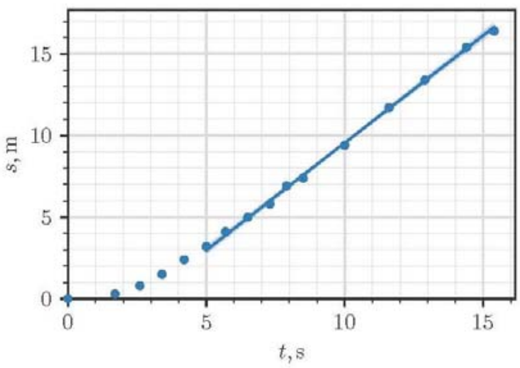


図３：　終端速度になる場合の s と t の関係

B.2：空気密度

測定位置を空気密度が一様であると仮定できる地表面に近づける。次に、前と同様の推論を用いると、次のようになる。　$h = h_0 + v_{t0}t$, ここで、h_0 は終端速度に達するまでの落下距離を表す。終端速度に達すると、抗力と重力加速度が釣り合う。

$$mg = 0.24A\rho_a v_t^2 \ .$$

$m = 4\pi\rho r^3/3$ と $A = \pi r^2$ を用いると、次のようになる。

$$v_t(\rho_a) = \{\rho r g / 3 \cdot 0.24\rho_a\}^{1/2} \ .$$

地表面上では、$v_{t0} = v_t(\rho_a = \rho_{a0})$である。前の課題の測定値を使用して、$t$ vs hをプロットすると、傾きは、$1/v_{t0} = 0.037$ s/m である。不確かさは、$\Delta(1/v_{t0}) = 0.002$ s/m で、
$v_{t0} = 27.0$ m/s、$\Delta v_{t0} = (1/v_{t0})/v_{t0}^2 = 2$ m/s となる。　そして

$$\rho_{a0} = 4\rho r g / 3 \cdot 0.24 v_{t0}^2 = 0.60 \text{ kg/m}^3 \ .$$

であり、不確かさは以下となる。、

$$\Delta\rho_{a0} = 2\Delta v_{t0} / v_{t0} \cdot \rho_{a0} = 0.07 \text{ kg/m}^3 \ .$$

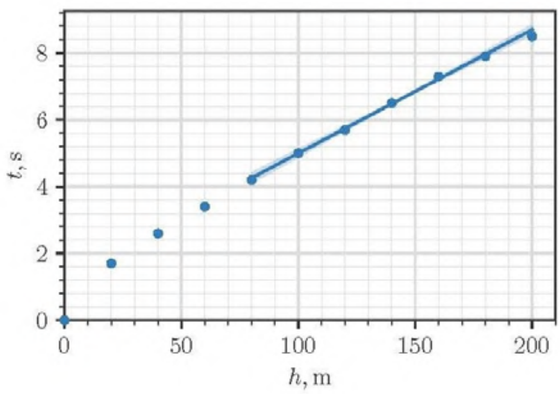


図４：　終端速度になった後の h と t の関係

B.3：大気の厚さ

大気の断熱プロファイルにより、上空に行くほど温度と空気密度は低下するが、終端速度は大きくなる。そこで異なる高さでのボールの終端速度を、落下時間の比較から求めることができ、最小の終端速度（ボールの最小の密度と半径により生じる）を推定することができる。このことから、大気の密度ひいては大気の高さを直接知ることができる。

ボールが瞬時に終端速度に達するのであれば、ボールを落とす高さ h_1 と h_2（$>h_1$）の落下時間の差は、$h_1 < h < h_2$ であることにより求まる。というのも、$h < h_1$ の間では、どちらも同じ時間だけ落ちるのに要する（終端速度は高さにしか依存しないので）。次に、$h_2 - h_1 \ll h_1$ であれば、以下の式になると推定できる。

$$V_t\ ((h_1 + h_2)/2) \approx (h_2 - h_1)\ /\ \{t(h_2) - t(h_1)\}. \quad (1)$$

現実には、ボールは終端速度に瞬時に到達することはないが、近似的にはこの効果を無視できる。大まかな目安として、地上ではボールが経験する時間差 v_{t0} / 2g = 0.8 s が生じる。この差は、ボールが高いところから落下するにつれて大きくなるが、タワーの上部で大気が希薄でない限り（後で検証する）、ボールの落下時間に比べれば些細なものである。そこで、終端速度については 式(1)で近似する。

計算された速度は、測定された量に大きく影響されるため、落下させる全ての高さにわたって繰り返し測定を行う。

表 3

r = 5 cm, ρ = 0.1 g/cm^3

h(m)	s_1(m)	t_1(s)	s_2(m)	t_2(s)	s_3(m)	$_2$(s)
200	7.6	8.4	7.8	8.6	7.8	8.6
400	17.0	15.7	6.9	15.6	17.3	15.7
600	26.1	22.6	25.4	22.2	26.2	22.7
800	33.6	28.5	34.6	29.2	34.3	29.1
1000	41.1	34.3	43.0	35.7	43.3	35.8
1200	51.1	41.9	50.2	41.2	50.0	41.1
1400	57.9	47.2	58.8	47.8	58.7	47.8
1600	65.5	53.0	65.1	52.8	65.3	52.9
1800	70.9	57.1	72.2	58.2	71.4	57.5
2000	78.5	62.9	79.6	63.8	79.5	63.7

式(1)を用いて、速度を含む表を作成するが、地表面での速度を追加する（h = 100 m としたのは、測定範囲の中心であるため）。 それらと以下の式を使って空気密度を求める。

$$\rho_a = 4\rho rg\ /\ 3 \cdot 0.24 v_t^2\ .$$

断熱的な大気の密度プロファイルから、

$$\rho_a^{\gamma-1} = \rho_a^{0.4} = \rho_{a0}^{0.4}\ (1 - h/H_0)\ .$$

したがって、H_0は、$\rho_a^{0.4}$ を h に対してプロットし、直線にフィッティングすることで求まる。

表 4

r = 5 cm, ρ = 0.1 g/cm^3

h (m)	v (m/s)	ρ_a (kg/m^3)	$\rho_a^{0.4}$((kg/m^3)$^{0.4}$)
100	27.0	0.599	0.814
300	28.0	0.556	0.791
500	29.3	0.510	0.764
700	31.1	0.452	0.728
900	31.6	0.438	0.719
1100	32.6	0.411	0.701
1300	32.3	0.420	0.707
1500	37.7	0.307	0.624
1700	42.6	0.241	0.566
1900	34.1	0.376	0.676

プロットから、傾きが $a = -\rho_{a0}^{0.4}\ /\ H_0$ = -1.1×10^{-4} (kg/m^3)$^{0.4}$/m であり、切片が、$b = \rho_{a0}^{2.5}$ = 0.82 (kg/m^3)$^{0.4}$ なので $H_0 = -b/a$ = 7500 m となる。

H_0の最大推定値と最小推定値に対応する2つの直線から不確かさを計算する。

$$\Delta H_0 \approx 1\ /\ 2\ [-0.80\ (\mathrm{kg/m^3})^{0.4}\ /\ -8.4\times10^{-5}\ (\mathrm{kg/m^3})^{0.4}/\mathrm{m} + 0.83\ (\mathrm{kg/m^3})^{0.4}\ /\ -1.4\times10^{-4}\ (\mathrm{kg/m^3})^{0.4}/\mathrm{m}] \approx 2000\ \mathrm{m}.$$

また、大気の密度は、タワーの上部でもあまり下がらないという仮定が正しいことも確認できる。

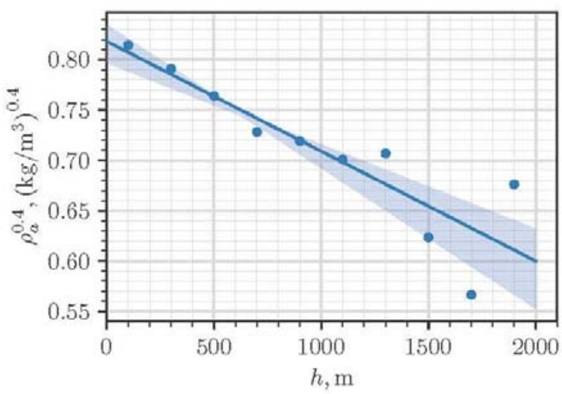


図５： hと計算値$\rho_a^{0.4}$の関係

代替解答（精度は低い）:

この方法では、空気抵抗が最大になるとき、ボールが終端速度 v_{t0}で落下すると仮定する。これにより、その値が得られる。

$dh/dt = v_t(h) = v_{t0} \cdot (1 - h/H_0)^{-1/2(\gamma-1)}$.

この式を展開し、積分して、

$t \approx 1/v_{t0} \int dh\,(1 - h/H_0)^{1/2(\gamma-1)}$.

ここまでは厳密解であるが、厳密解と異なるのは、「高速化」項で、上層に行くほど相対的な寄与が小さくなるものである。この積分を近似するために、一次の二項展開をすると以下になる。

$t \approx h/v_{t0} \cdot (1 - 1/4H_0(\gamma - 1) \cdot h)$

$t/h \approx 1/v_{t0} - 1/[4v_{t0}H_0(\gamma - 1)] \cdot h$

t/hをhに対してプロットし、先ほどと同様にH_0を計算（切片と傾きを計算）すると、$H_0 \approx 6300$ m となり、誤差の範囲に収まる。しかし近似値であるため、この手法の評価は3.0点中2.0点までとする。

B4：空気のモル質量と大気圧

断熱的な大気の式から、以下が得られる。

$H_0 = RT_0/\mu g \cdot \gamma/(\gamma - 1)$ そして

$\mu = RT_0/H_0 g \cdot \gamma(\gamma - 1) = 72$ g mol^{-1} ≈ 70 g mol^{-1}

および、

$\Delta\mu = \{\Delta H_0^2/H_0^2 + \Delta g^2/g^2\}^{1/2}\ \mu = 20$ g mol^{-1}

理想気体の法則から、

$p_0 = \rho_{a0}RT_0/\mu = 20\ 000$ Pa

そして

$\Delta p_0 = \{\Delta\mu^2/\mu^2 + \Delta\rho_{a0}^2/\rho_{a0}^2\}^{1/2}\ \rho_0 = 6000$ Pa .

C.1: １日の長さ

正解を得るには、惑星の自転速度 Ω を求めることが必要であり、惑星の自転は、遠心力とコリオリ力によってボールの軌道に影響を与える。しかし、遠心力は$h \ll R$の場合では、重力加速度から切り離して解析することは出来ない。コリオリ力は、ボールに対して加速度$a_{cor} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}$の効果を与える。これはボールの速度と惑星の回転軸の両方に垂直である。従って、赤道に沿って、落下速度に比例して増加し、水平方向には、$a_x = 2\Omega v_y + a_{drag}$で与えらる。

手順としては、空気抵抗の影響を最小にし（ボールの半径と密度を最大にし）、コリオリ力の効果が水平方向の変位に十分寄与するような条件にする。空気抵抗を無視すれば、

$a_x = 2\Omega v_y = 2\Omega gt$ なので、

$v_x = \int a_x dt = \Omega g t^2$であり、

$x = \int v_x dt = \Omega g t^3/3$ となる。

最終的な変位は、$s = g\Omega t_f^3/3$ となり、落下時間は $h = gt_f^2/2$ を満たす。

これらをまとめると、次の式が得られる。

$s = 2\Omega/3 \cdot [2h^3/g]^{1/2}$.

半径/密度を変化させることで、実際に数メートルのオーダーで、コリオリ力の影響が大きいことが確認できた。0～2000 mの範囲で適当な数の測定を行い、s vs $h^{1.5}$をプロットし、その傾きaを求める。

$a = 2\Omega/3 \cdot [2/g]^{1/2} = 5.3 \times 10^{-5}$ m$^{-1/2}$

そして不確かさは、

$\Delta a = 1.1 \times 10^{-6}$ m$^{-1/2}$

そうすると、

$T = 2\pi/\Omega = 4\pi/3a \cdot [2/g]^{1/2} = 28\ 000$ s ≈ 8 h

および、

$\Delta T = [(0.5\Delta g/g)^2 + \Delta a^2/a^2]^{1/2} = 0.2$ h.

表５

$r = 50$ cm, $\rho = 10$ g/cm^3

h (m)	s (m)	$h^{1.5}$ (m$^{1.5}$)
0	0.0	0
200	0.2	2800
400	0.5	8000
600	0.8	14700
800	1.2	22600

1000	1.8	31600
1200	2.3	41600
1400	2.8	52400
1600	3.4	64000
1800	4.0	76400
2000	4.8	89400

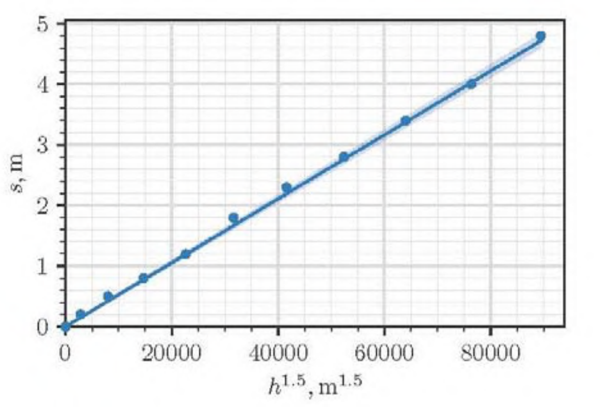


図６： hの 1.5 乗と sの関係

代替解答：

別のアプローチとして、この系を非回転座標系（架空の力を扱う必要がない）においてシステムを考える。このとき、ボールは速度 $v_0 = \Omega(R + H)$でスタートする。角運動量保存則により、ボールが地面に向かって落下するにつれて、ボールの角速度は増加し始め、地面が遅れ始める。（地面がΩで回転する）。高さ h において、ボールが角速度 ω で運動するとき、角運動量保存則は

$\Omega\ (R + h)^2 = \Omega(R + H)^2$ となり、ボールと地面の角速度の遅れは次のようになる。

$$\Delta\omega = \omega - \Omega = \Omega\left[\left((R + H)/(R + h)\right)^2 - 1\right] \approx 2\Omega(H - h)/R.$$

このとき、地面に沿った方向での速度は

$v_x = \Delta\omega R = 2\Omega(H - h) = \Omega g t^2$となり、コリオリ力の式と同じ式が得られ、そこからは先ほどと同様に解を求められる。

E2: 円筒形ダイオードー解答

設問の式 1 の両辺の対数を取ると，

$$\log I_\infty = \log G + \alpha \log R_c + \beta \log L_e + \gamma \log V$$

となる．

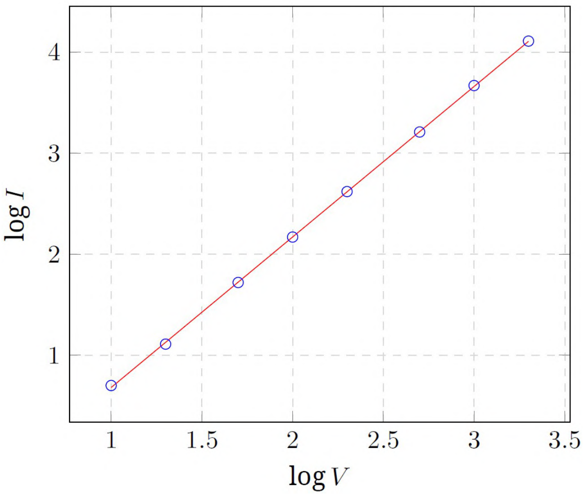
A.1（V の指数 γ）**:** 電圧 V を変化させてデータを収集する．不確かさを最小にするため，全ての固定変数の最大値を選ぶ．つまり，$L_e = 99$ cm，$R_c = 10$ cm，$R_e = 1.0$ cm とする．電圧は，10 V から 2000 V の間で対数的に設定する．

V (V)	I (mA)	$\log V$	$\log I$
10	5	1.0	0.70
20	13	1.3	1.11
50	52	1.7	1.72
100	147	2.0	2.17
200	415	2.3	2.62
500	1620	2.7	3.21
1000	4630	3.0	3.67
2000	12900	3.3	4.11

これをグラフにプロットする．回帰直線の式は，

$$\log I = 1.490 \log V - 0.8095$$

である．



したがって，$\gamma = 1.49$.

傾きの不確かさを統計的に評価すると，

$$\gamma = 1.490 \pm 0.005$$

と求まる．

測定値の不確かさの範囲を通るように視覚的にフィッティングした線によって傾きの不確かさを評価するには，常用対数軸での不確かさが次の式で与えられることを考慮する必要がある．

$$\delta(\log y) = \delta\left(\frac{\ln y}{\ln 10}\right) = \frac{1}{\ln 10}\frac{\delta y}{y}$$

値が最小の場合に不確かさの相対値が最大になるため，$V = 10$ V に対する $\delta V / V$，$I = 5$ mAに対応する $\delta I / I$ に注目する．それらの点での両対数プロットでの不確かさは，

$$(1.00 \pm 0.02,\ 0.70 \pm 0.04)$$

であり，他の測定点での不確かさはこれらより小さい． これらの点にのみ注目して，傾きが最大および最小となる2本の直線をグラフに描いて傾きの不確かさを評価すると，

$$\gamma = 1.485 \pm 0.025$$

と求まる．

いずれの方法で求めても構わない．

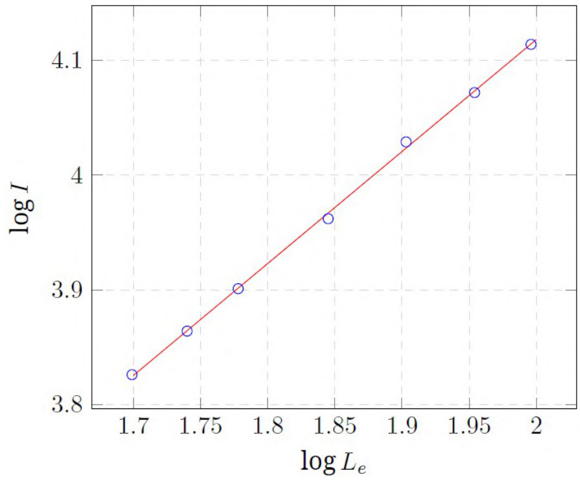
A.2（L_e の指数 β）**:** エミッタの長さ L_e を変化させてデータを収集する． 不確かさを最小に抑えるには，すべての固定変数の最大値を選択する．すなわち，$V = 2000$ V，$R_c = 10$ cm，および $R_e = 1$cm とする．

L_e (cm)	I (mA)	$\log L_e$	$\log I$
99	13000	1.996	4.144
90	11800	1.954	4.072
80	10700	1.903	4.029
70	9170	1.845	3.962
60	7960	1.778	3.901
55	7310	1.740	3.864
50	6700	1.699	3.826

これをグラフにプロットする．回帰直線の式は，

$$\log I = 0.9767 \log L_e + 2.1649$$

である．



したがって，$\beta = 0.9767$.

傾きの不確かさを統計分析で評価すると，$\beta = 0.98 \pm 0.02$ と求まる．

傾きの不確かさをグラフ上の最大の傾きと最小の傾きから評価すると，$\beta = 0.97 \pm 0.02$ と求まる．

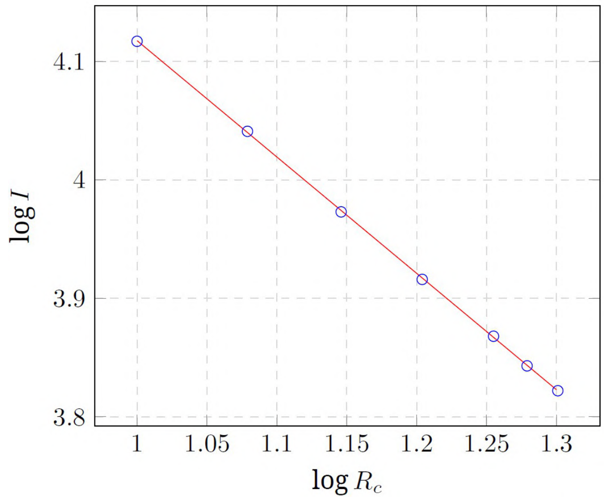
A.3（R_c の指数 α）**：** コレクタの半径 R_c を変化させてデータを収集する．不確かさを最小にするため，すべての固定変数の最大値を選択する．すなわち，$V = 2000$ V，$L_e = 99$ cm，$R_e = R_c/10$ cm.

R_c (cm)	I (mA)	log R_c	log I
20	6640	1.301	3.822
19	6970	1.279	3.843
18	7380	1.255	3.868
16	8240	1.204	3.916
14	9390	1.146	3.973
12	11000	1.079	4.041
10	13100	1.000	4.117

これをグラフにプロットする．回帰直線の式は，

$$\log I = -0.9816 \log R_c + 5.1000$$

である．



したがって，$\alpha = -0.9824$.

傾きの不確かさは統計分析から，$\alpha = -0.98 \pm 0.01$ と求まる．

グラフ上に最大と最小の傾きの線を描くことで，傾きの不確かさは，$\alpha = -0.97 \pm 0.02$ と求まる．

B.1（式 1 の係数 G）**：** 3つのすべてのデータ，および得られた指数を用いて，

$$\log G = \log I - 1.495 \log V - 0.9854 \log L_e + 0.9781 \log R_c$$

の平均をとると，

$$G = (0.0146 \pm 0.0003)\ \mathrm{mA/V^{3/2}}$$

を得る．Gの単位については，指数の値を $\gamma = 1.5$，$\beta = 1.0$，$\alpha = -1.0$ として，ここでは説明を進める．

理論的な値は，およそ，

$$\frac{8\pi\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}} \approx 1.47 \times 10^{-5}\ \mathrm{A/V^{3/2}}$$

である．

単位として $\mu\mathrm{A/V^{3/2}}$ を用いると，

$$G = 14.6$$

となる．

C.1（変数の影響）**：** L_e が重要であると仮定することから始め，R_c の近くの値に注目する．他の変数についても繰り返す．G は比 R_c/R_e に依存することを忘れずに，R_c とR_e を同時に変更する．設問の式 1 は，前問までの指数として半整数に近い値を採用すると，次のように展開できる．

$$I_\infty = G\frac{L_e}{R_c}V^{3/2}$$

したがって，

$$F = \frac{I_{measured}}{G \dfrac{L_e}{R_c} V^{3/2}}$$

となる．

R_c	R_e	L_e	V	I	I_∞	F
cm	cm	cm	V	mA	mA	
10	1	10	1000	535	500	1.071
12	1.2	10	1000	470	416	1.129
8	0.8	10	1000	647	624	1.036
10	1	12	1000	630	599	1.051
10	1	8	1000	451	400	1.129
12	1.2	12	1000	537	500	1.075
8	0.8	8	1000	537	500	1.075
10	1	10	1100	617	576	1.071
10	1	10	900	457	426	1.072

これより，R_c↑で F↑，L_e↑で F↓，V↑で F は「変化無し→」と結論される．R_e↑ では，F↑，もしくは「変化無し→」も許容される．

C.2（x の関数）**：** 設問で提示した式は次の通り．

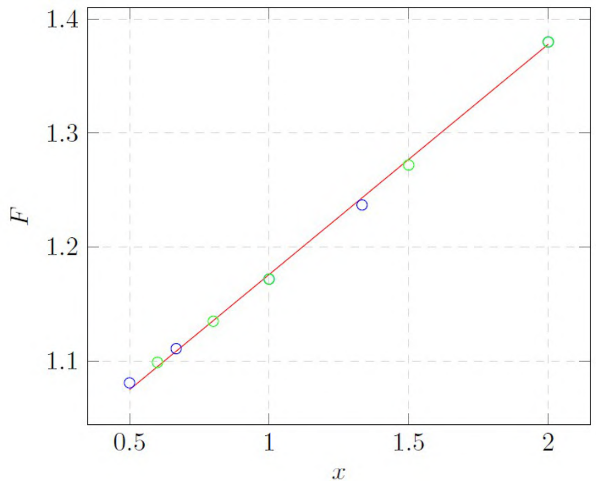
$$F = A + Bx$$

ここで，$x = R_c / L_e$ である．

C.3（AとB）**：** 仮説による先入観を持たずに，R_cとL_eを個別に変化させてデータを収集することが重要である．また，パート B.1 の定数による他の影響を回避するために，$R_c / R_e = 10$ の比率を維持する．以下のすべての測定で，電位は一定の 2000 V に維持する．

R_c (cm)	L_e (cm)	I (mA)	I_∞	x	F
20	10	898	654	2.000	1.380
20	15	1210	981	1.333	1.237
20	20	1520	1308	1.000	1.172
20	30	2160	1962	0.667	1.111
20	40	2810	2616	0.500	1.081
6	10	2420	2180	0.600	1.099
8	10	1840	1635	0.800	1.135
10	10	1520	1308	1.000	1.172
15	10	1100	872	1.500	1.272
20	10	902	654	2.000	1.380

結果をプロットすると下のグラフになる．青点は R_c を一定にしたときの値，一方，緑点は L_e を一定にしたときの値である．



結果は，おおよそ，

$$F(x) = 0.974 + 0.202\,x$$

となる．

測定を，R_e を一定，もしくは，R_c / R_e を一定にして行うことも許容される．