

一般的な注意

試験開始の前に

試験始めの合図の前に問題の入った封筒を開けてはいけません。封筒は試験開始の5分前、日本時間 15:25 に開けます。試験の開始と終了は合図があります。

1時間ごとと終了15分前に、経過時間が告げられます。

試験中は

答は定められた答案用紙に書きなさい。Aと書かれた答案用紙の表(ひょう), 箱(囲み), グラフに答えを書きなさい。どの問題にもWと書かれた, 詳細を書くためのワーキングシート(計算用紙)が付いています。計算用紙の上の問題番号を確かめて, 正しい問題番号の計算用紙に記入しなさい。どの用紙の場合でも, 採点してほしくないことを書いてしまったら, その部分にはバツを付けて下さい。答案用紙・計算用紙とも, 表(おもて)だけを使います。

答は簡潔に: 式, 論理記号, 図による表現などを用いて, どのように考えたかがわかるように書きなさい。あまり長文にならないように。

数値を答えるときには有効数字に気を付けるように。

問題の前の部分が解けなくても後ろの方は解けることがよくあります。

次の2ページ目に物理定数の値があります。

許可なく席を離れないこと。例えばトイレなどのときはカードを掲げて試験監督の指示を受けるように。

試験終了時には

試験時間が終了したら, 直ちに書くのをやめなさい。

問題ごとに, 表紙(C), 問題(Q), 答案(A), ワーキングシート(W)の順に揃えなさい。

ブランクのワーキングシートも含めて, 問題ごとに, すべての答案用紙・ワーキングシートを問題番号の記された封筒に入れなさい。また, 問題と一般的注意は, 残りの別の封筒に入れなさい。試験室から何も持ち出してはいけません。

筆記用具は机に置いたままにしてください。

封筒が回収される間, 席に着いたまま静かに待ちます。すべての回収が終わってから, 試験監督から, 試験室を出てもよい, などの指示があります。

物理定数

| | |
|------------------------------------|--|
| 重力加速度の大きさ | $g = 9.81 m \cdot s^{-2}$ |
| ボルツマン (Boltzmann) 定数 | $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ |
| 現在の太陽質量 | $M_s = 2.00 \times 10^{30} kg$ |
| 現在の太陽半径 | $R_s = 7.00 \times 10^8 m$ |
| 電子電荷の大きさ | $e = 1.60 \times 10^{-19} C$ |
| 電子質量 | $m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$ |
| 陽子質量 | $m_p = 1.67 \times 10^{-27} kg$ |
| 中性子質量 | $m_n = 1.67 \times 10^{-27} kg$ |
| 真空の透磁率 (磁気定数) | $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} T \cdot m \cdot A^{-1}$ |
| 真空の誘電率 (電気定数) | $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F \cdot m^{-1}$ |
| プランク (Planck) 定数 | $h = 6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$ |
| アボガドロ (Avogadro) 定数 | $N_A = 6.02 \times 10^{23} mol^{-1}$ |
| 真空中の光速 | $c = 3 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$ |
| シュテファン・ボルツマン (Stefan-Boltzmann) 定数 | $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ |
| 気体定数 | $R = 8.31 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ |
| 重力定数 | $G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ |
| ウイーン (Wien) 定数 | $b = 2.90 \times 10^{-3} m \cdot K$ |
| $\ln 2$ | ≈ 0.69 |
| $\ln 3$ | ≈ 1.10 |
| $\ln 10$ | ≈ 2.30 |
| 自然対数の底 e | ≈ 2.72 |

シュテルン・ゲルラッハの実験

シュテルン・ゲルラッハの実験は1922年に行われ、それによって電子の磁気モーメントが決定された。

この実験では、質量 $m = 1.80 \times 10^{-25}$ kg の銀原子が、温度 $T = 1.20 \times 10^3$ K に保たれたオーブンから飛び出してくる (図1を見よ)。オーブンから飛び出してくる原子は進行方向 (z 方向) にすべて同じ運動量を持っているとしよう。重力は無視する。

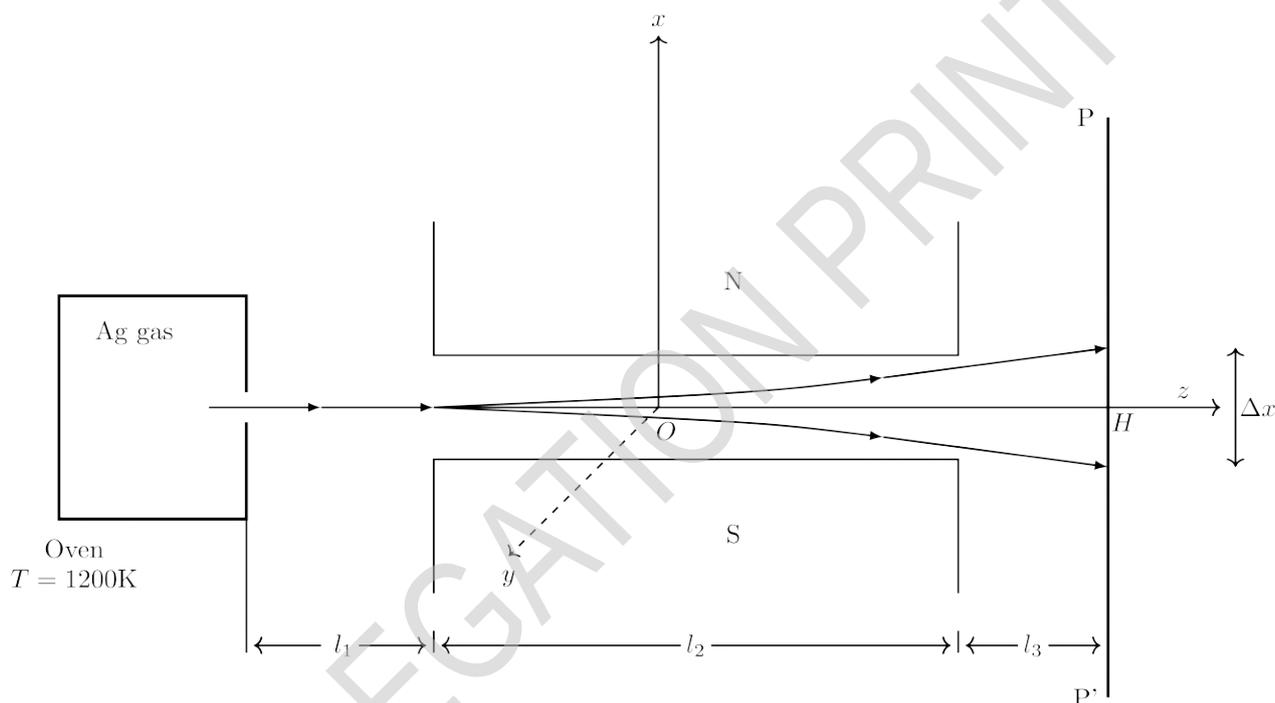


図1：シュテルン・ゲルラッハの実験の概念図。

A.1 銀原子の速さ：

オーブンから飛び出してくる銀原子の速さ v_z は、等分配則を用いて $\sqrt{3k_B T/m}$ と見積もられる。この値を計算せよ。

0.5pt

B.1 基本的表式：

2pt

オープンから飛び出した銀原子は、 z 方向に距離 $l_1 = 0.25$ m 進む。次に、銀原子は2つの磁石の間を距離 $l_2 = 0.5$ m 移動する。この磁石は x 方向に変化する非一様な磁場 B を生じ、その傾き dB/dx は一定である。銀原子の磁気モーメント $\vec{\mu}_s$ は $+x$ 方向または $-x$ 方向を向いている、すなわち、 $\vec{\mu}_s = \pm \mu_s \hat{i}$ としよう。磁石の間を通り抜けた後、銀原子は更に距離 $l_3 = 0.25$ m 移動し、スクリーン PP' に到達する。ビームは2つに分かれて、スクリーンに到達する。その間の距離を Δx とする。距離 Δx に対する表式を求めよ。

非一様な磁場：

ここでは、非一様な磁場 ($dB/dx \neq 0$) を生成する装置の配置について議論する。装置はいくつかの部分からなる。2本の非常に長い電線が、 z 軸に平行に $A_1(0, -a, z)$ と $A_2(0, a, z)$ に置かれており、その中を大きさ I_0 の電流が流れている。 $y = -a$ を通る電線を通る電流の方向は $-\hat{k}$ で、 $y = a$ を通る電線の電流の方向は \hat{k} である。装置全体は大きな比透磁率 μ_r をもつ媒質中にあり、 $\mu = \mu_0 \mu_r$ とする。電線は絶縁されており、媒質への漏電はない。

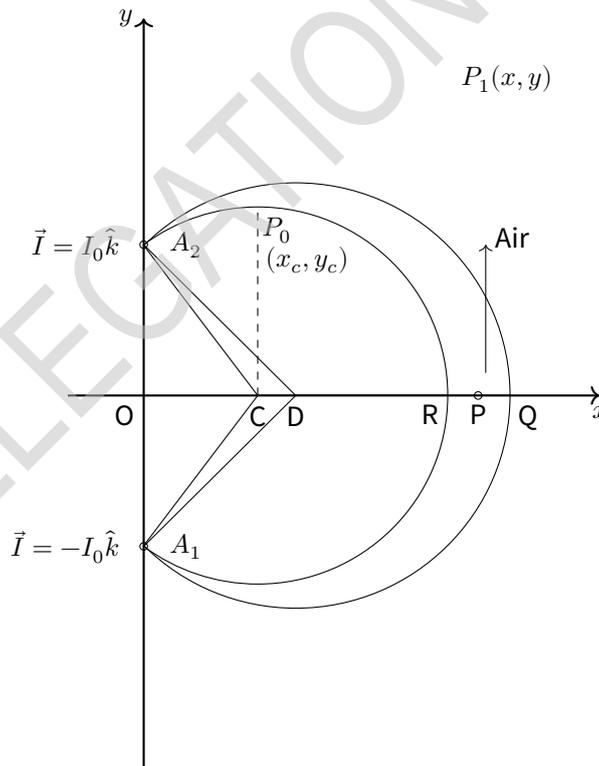


図2：非一様な磁場を生成する装置の配置

C.1

1.5pt

$x - y$ 平面上の点 $P_1(x, y, 0)$ における磁場ベクトルの表式を導け (図2参照)。

C.2

0.5pt

中心 C が x 軸上の点 $(x_c, 0)$ で、半径が距離 AC に等しい円を考えよう (図 2 参照)。2 つの円周上の点 R および P_0 における磁場の方向を求めよ。ただし、点 R は x 軸上にある円周上の点、 P_0 は CP_0 が y 軸に平行となる円周上の点である。

C.3

0.5pt

さて、 AC および AD を半径とする 2 つの円の間の、透磁率の大きな媒質の薄片を取り除いて、低い圧力の空気で置き換えた (図 2 参照)。連続性の議論より、その空隙における磁場は、磁性媒質を取り除かなかった時と同じ表式で与えられることを示せる (ここではこれを仮定し、示す必要はない)。このことより、空隙中の点 $(x, 0)$ における磁場の表式を求めよ。

D.1

力:

0.5pt

すでに述べたように、銀原子は $(x, 0, z)$ 面を z 軸に平行に速度 $\vec{v} = v_z \hat{k}$ で移動する。また、銀原子の磁気双極子は $\vec{\mu}_s = \pm \mu_s \hat{i}$ であった。銀原子に働く x 方向の力の大きさ F_x に対する表式を、 μ_s, I_0, a, μ および関連する座標を用いて求めよ。

E.1

磁場とその勾配:

2.0pt

この力 F_x が z 軸に沿った短い距離 l_2 進む間、働くとする (図 1)。また、銀原子は RQ の中点 P を通り抜けるとしよう (図 2)。以下の実験値が与えられている:

$$\mu/\mu_0 = 10^4, \quad a = 0.60 \text{ cm}, \quad OC = 0.60 \text{ cm}, \quad OD = 0.80 \text{ cm}, \quad I_0 = 2.00 \text{ A}.$$

ここで、 μ_0 は真空の透磁率である。この中点 P における、磁場の大きさ B_P 、および、その勾配 dB_P/dx の値を、S.I. 単位で求めよ。

F.1

銀原子の磁気モーメント:

1.5pt

$v_z = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ で、磁場が上で計算したものの時、このシュテルン・ゲルラッハの実験ではスクリーン上の 2 つのビームの分裂距離は $\Delta x = 0.20 \text{ cm}$ となる。銀原子の磁気モーメントの値 μ_s を S.I. 単位で求めよ。

G.1 ラインの広がり：

0.5pt

銀原子は全て同じ速さとはかぎらない。ビームの速さに 20% の広がりがあったとしよう。
その場合、スクリーン上の点の広がり δx はいくらか。

H.1 磁気モーメントの見積もり誤差：

0.5pt

その場合、磁気モーメントの見積もりの誤差の大きさ $\delta\mu_s$ はいくらか。

DELEGATION PRINT

相転移の力学的モデル

半径 R のリングに、大きさを無視できる質量 m のビーズを通した。リングは図 1 に示すように、角速度 ω で垂直軸の周りを回転する。これと並行して、ビーズには垂直抗力 N に比例した反対方向の力 F_f があり、 $F_f = fkN$ で与えられる (f は 1 または -1)。極座標 $\{r, \theta\}$ を用いることが奨励される。可能な限り、 $\omega_c = \sqrt{g/R}$ を用いて解答を表せ。ここで、 g は重力による加速度である。

相転移では、自由エネルギー $V(M)$ [力学におけるポテンシャルエネルギーと同等] は磁化 M に次のように依存する。

$$V(M) = a(T)M^2 + b(T)M^4$$

T は温度、 $b(T) > 0$ であり、 $a(T)$ は温度で符号を変える。ここで、相転移の現象を上記のリングのモデルを使用して理解することを試みる。

注 1：半径 R の円運動については、極座標における速度は $\dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$ で、加速度は $\ddot{\vec{r}} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$ と表される。ここで、 \hat{r} と $\hat{\theta}$ は、それぞれ、動径方向と接線方向の単位ベクトルである。

注 2：反対方向の力 \vec{F}_f の向きを f とする。ここで、ビーズが反時計回りに (増加する) θ 方向に動いていれば $f = +1$ 、時計回りに動いていれば $f = -1$ 、すなわち、 $f = \text{sgn}(\dot{\theta})$ 。ここで sgn は引数が正か負かで +1 か -1 になる関数である。

注 3：次の展開がこの問題のいくつかの個所で役に立つ。

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \theta - \theta^3/6 + \dots \\ \cos(\theta) &= 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24 + \dots \\ (1+x)^n &= 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + n(n-1)(n-2)x^3/6 + \dots\end{aligned}$$

(ここで、 θ はラジアンで表し、 $|x| \ll 1$)

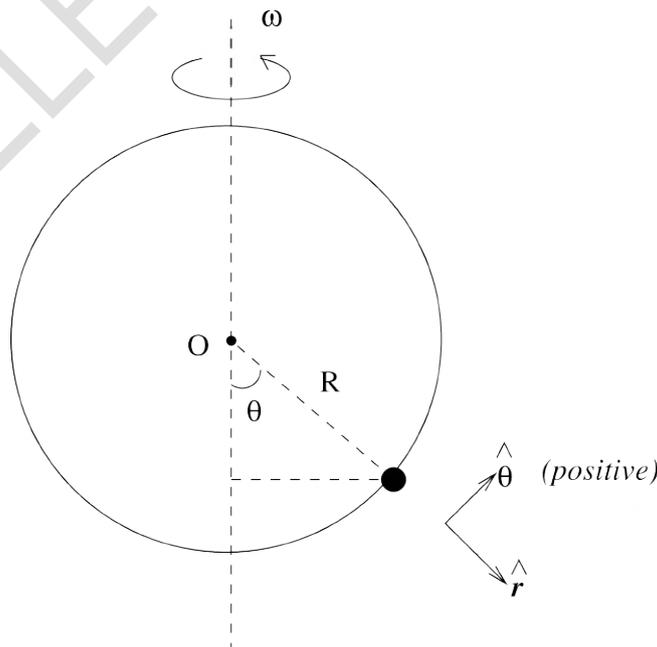


図 1：回転するリングの上のビーズ

以下では、回転するリングのフレームで、角度 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ の範囲におけるビーズのダイナミクスを理解することにする。ビーズの自由体ダイアグラムは図2に示してある。この自由体ダイアグラムに示された以外のすべての力は無視してよい。

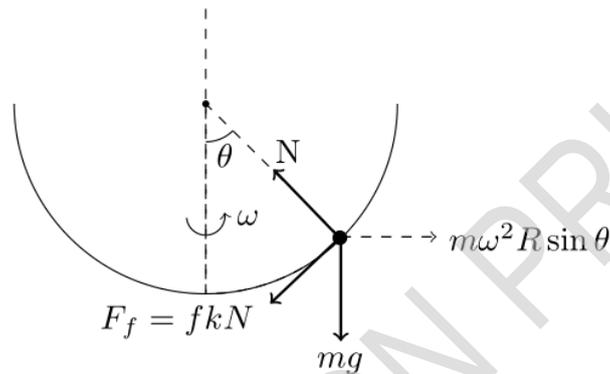


図2：自由体ダイアグラム

- A.1** ビーズにかかる力の半径方向 F_r 成分と接線方向 F_θ 成分の運動方程式を書き下せ。 0.5pt
反時計回りに θ が増加するものとする。

以下のパート B.1 から B.9 については、 $k = 0$ とする。

- B.1** 平衡角 θ_0 の関係を $\{\omega, \omega_c\}$ を用いて論ぜよ。 1.0pt

- B.2** ω/ω_c (x -axis) の関数として θ_0 (y -axis) の定性的なスケッチをせよ。 0.5pt

- B.3** 安定な平衡のとき、ビーズに働く垂直抗力の大きさを ω/ω_c の関数として定性的にスケッチせよ。 0.5pt

- B.4** 接線方向の力 F_θ に対応するポテンシャルエネルギーを定義する。すなわち、 1.0pt

$$F(\theta) = -\frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} V(\theta)$$

ポテンシャルエネルギーのゼロを $\theta = 0$ にとる。もし、 $V(\theta)$ が $P + Q \cos(\theta) + S \sin^2(\theta)$ と表されたら、 P, Q, S を求めよ。

- B.5** $V(\theta)$ を小さな θ のときに展開し、 $V(\theta) = a(\omega) \theta^2 + b(\omega) \theta^4$ と表すことができる。 1.0pt
係数 $a(\omega)$ と $b(\omega)$ を求めよ。

- B.6** $V(\theta)$ の θ に対する代表的なプロットをせよ。すなわち、 ω/ω_c の値が 1.0 よりわずかに小さいとき (例えば 0.9) と ω/ω_c が大きいとき、例えば 5.0 のときに、ただし、定性的なスケッチだけで、プロットに対する詳細な計算は必要ない。 1.0pt

- B.7** 2次相転移のランダウ理論では、単純な磁性体系を2つの相に分類する。臨界温度 T_c より高い温度 T では、系は常磁性状態になる。 $T < T_c$ では系は強磁性状態になり、磁化 M は 1.0pt

$$M(T) = M_0(1 - T/T_c)^{1/2} \quad T < T_c$$

で与えられる。指数 $1/2$ を β で表すことにしよう。このふるまいを上記で議論したビーズの問題と比較しよう。我々の問題の場合に、 $M, T_c, T/T_c$ に対応するものは何か? β と等価な量は我々の場合に何か?

- B.8** 平衡位置 θ_0 からずれたときのビーズの微小角振動数 Ω_0 を決定せよ。微小な振動については、 1.0pt

$$\Omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{V''(\theta_0)}{m}}$$

であることに注意せよ。

- B.9** ω の関数として、 Ω_0 の定性的なスケッチをせよ。 1.0pt

以下の C.1, C.2 では、 $k \neq 0$ とする。

- C.1** $f=1$ として、 $k = \tan \alpha$ を表せ。平衡角 θ_0 の条件として 1.0pt

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \frac{\tan(x)}{\sin(y)}$$

のように表すことができる。 x と y を求めよ。

- C.2** $f=1, k=0.05$ とする。次のような場合に、平衡角 θ_0 を求めよ。 0.5pt
1. $\omega/\omega_c = 0.50$
 2. $\omega/\omega_c = 0.70$

マックスウェル、レイリー、そしてエヴェレスト山：問題

1897年、レイリー卿はインドのダージリンを訪れた。170km離れたエベレストを見たとき、彼は26年前にマックスウェルが空気による光の減衰と遠くの山々の見え方について彼に質問したことを思い出した。レイリー卿はその2年後の1899年に、有名な研究論文¹を執筆し、この問題についての研究を公表している。本問題では、レイリー卿の推論を少なくとも部分的には現代風に再構成することを試みる。

電子雲の振動: 典型的な中性空気分子を、質量 m 、半径 r 、電荷 $-q$ の球状の一樣電荷雲に囲まれた静止した正電荷 q でモデル化する。分子の固有（角）振動数は ω_0 である。これに光を入射すると、負電荷雲は角振動数 ω で球状を維持したまま光波の電場

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \hat{y}, \quad (1)$$

のもとで次のように振動する。

$$y = y_0 \cos(\omega t), \quad (2)$$

ここで y は定常的な正電荷と分子の負電荷雲の中心との間の距離を表す。

| | | |
|------------|---|-------|
| A.1 | y の方程式を立てよ。電場による加速度を $E(t)q/m$ とする。 | 0.5pt |
| A.2 | 以上の情報をもとに y の方程式を解き、振幅を求めよ。 | 0.5pt |
| A.3 | $\omega \ll \omega_0$ の低周波数領域で、空気分子の双極子モーメントの大きさ $p(t)$ を時間の関数として求めよ。 | 0.5pt |
| A.4 | ω_0 を q, m と r を用いて表せ。 | 0.5pt |

放射強度: 正弦波時間依存の双極子から電磁波が放射される。放射される電力は、双極子モーメントの振幅 $p_0 = qy_0$, 真空の誘電率 ϵ_0 , 光速 c と振動の角振動数 ω に依存する。

| | | |
|------------|---|-------|
| B.1 | 次元解析を用い、放射される平均のパワー（単位時間当たりのエネルギー）を求めよ。 | 1pt |
| B.2 | 比例係数を $1/12\pi$ として放射パワー s を E_0, ω_0, ω などを用いて表せ。 $\omega \ll \omega_0$ とする。 | 0.2pt |

電磁場の強度 $I(x)$ が

$$\frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2. \quad (3)$$

と表される事を思い起こそう。光の経路に沿って強度が低下するのは、単位体積当たりのパワー

$$S = n_0 s \quad (4)$$

が失われるからである。ここで、 n_0 は単位体積あたりの分子の数である。

¹Philosophical Mag. "On the transmission of light through an atmosphere ... and the origin of the blue of the sky", Vol. 47, pg 375-384, 1899

C.1 強度 $I(x)$ の減衰の様子を距離 x の関数として表せ。 1pt

C.2 強度の初期値を I_0 とするとき、強度 $I(x)$ を特徴的な長さ L で測った x の関数として表現せよ。 0.5pt

C.3 電子の質量を m とする (典型的な場合、電子雲は一つの電子だけでできている)。また次の数値が与えられているとする。 0.3pt

$$n_0 = 2.54 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}, \quad (5)$$

$$\omega_0 = 1.25 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (6)$$

$$\omega = 3.25 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (7)$$

このとき、 L の数値をキロメートル単位で求めよ。

D.1 山のみかけの高さ H' : 図中で P はヒマラヤ東部の丘にあるの海拔 2042 m のダージリン駅を表す。線分 BS はそこから $d = 170 \text{ km}$ 離れた高さ $H = 8848 \text{ m}$ のエベレスト山を表す。もう一つの峰カンチェンジュンガ山 (図に示されてはいない) は、ダージリンから 75 km 離れており、高さは 8586 m である。ダージリンから見たこれらの山の見かけの高さ H' を上記の諸量で表し、数値を求めよ。観測者は水平以下は見えない。適切な図を描け。地球の半径 R を 6378 km とする。 2pt

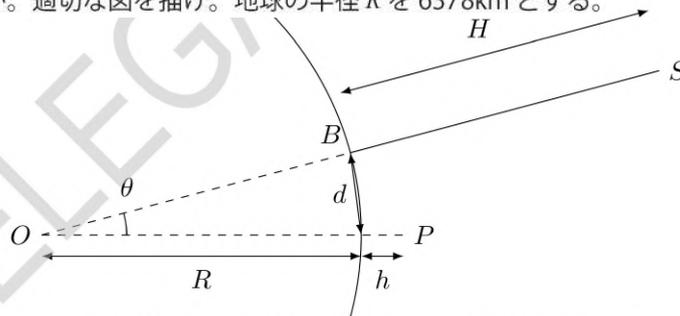


図 1. 高さ H の山 BS と高さ h の観測者 P がその上に乗る大円。図のスケールは正確ではない。

E.1 ダージリンでのカンチェンジュンガ山の強さを基準値とする。ダージリンから見たエベレストの強度は、カンチェンジュンガ山に対してどの程度になるか？この問題では、高さによる空気分子の数密度の変化は無視する。基準値に対して 5% 以上であれば、山が見えるという。ダージリンからエベレストは見えるか？ 1pt

F.1 エアロゾル汚染による減衰長 L_p : 上では、空気分子との散乱による強度低下に伴う特徴的な長さ L を計算した。ここでは、エアロゾル粒子による散乱の強度低下に伴う特性長 L_p に注目する。 L_p は粒子の数密度 n と半径 r のエアロゾル粒子の断面積 πr^2 に依存する。この依存性を物理的な洞察と次元解析を使って求める。無次元定数を $1/8$ とする。汚染が軽度の場合、ダーズリンにおけるエアロゾルの平均密度は $\rho_p = 5 \mu\text{g}/\text{m}^3$ であり、その平均半径は 500 ナノメートルである。長さ L_p はいくらか？ 個々のエアロゾル粒子の密度を $\rho = 3 \text{g}/\text{cm}^3$ とする。ただし、 $1\mu\text{g}=10^{-9}\text{kg}$, $1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$ である。 1pt

G.1 カンチェンジュンガ山とエヴェレスト山の相対強度と可視度 : カンチェンジュンガ山とエヴェレスト山が上記の汚染レベルである場合、基準値に対する相対的な強度を見積もれ。ダーズリンからこれらの山が見えるとしたら、どちらの山か。光が通る道全体が一様に汚染されていると仮定して答えよ。 1pt

シュテルン・ゲルラッハの実験

銀原子の速さ

A.1 (0.5 pt)

銀原子の速さ $v_z =$

基本的表式

B.1 (2 pt)

$\Delta x =$

不均一な磁場

C.1 (1.5 pt)

$\vec{B}(x, y, 0) =$

C.2 (0.5 pt)

点 R における方向:

点 P_0 における方向:

Theory



A1-2

Japanese-L1 (JAP)

C.3 (0.5 pt)

空隙における $\vec{B}(x, 0, 0) =$

カ

D.1 (0.5 pt)

$F_x =$

磁場とその勾配

E.1 (2 pt)

$B_P =$

$\frac{dB_P}{dx} =$

銀原子の磁気モーメント

Theory



A1-3

Japanese-L1 (JAP)

F.1 (1.5 pt)

$$\mu_s =$$

スクリーン上でのラインの広がり

G.1 (0.5 pt)

$$\delta x =$$

銀原子の磁気モーメントの見積もり誤差

H.1 (0.5 pt)

$$\delta\mu_s =$$

相転移の力学的モデル

A.1 (0.5 pt)
運動方程式

B.1 (1.0 pt)
平衡角

$\theta_0 =$

B.2 (0.5 pt)
 θ_0 のスケッチ

Theory



A2-2

Japanese-L1 (JAP)

B.3 (0.5 pt)

垂直抗力の大きさのスケッチ

B.4 (1.0 pt)

ポテンシャル

$P =$

$Q =$

$S =$

B.5 (1.0 pt)

係数

$a(\omega) =$

$b(\omega) =$

Theory



A2-3

Japanese-L1 (JAP)

B.6 (1.0 pt)

ポテンシャルの代表的プロット

B.7 (1.0 pt)

ビーズのアナロジー

$\mathcal{M} \rightarrow$

$T/T_c \rightarrow$

$\beta =$

B.8 (1.0 pt)

振動角振動数

$\Omega_0 =$

Theory



A2-4

Japanese-L1 (JAP)

B.9 (1.0 pt)
 Ω_0 のスケッチ

C.1 (1.0 pt)
平衡角の条件

$x =$

$y =$

C.2 (0.5 pt)
代表的な値 θ_0
(a) $\theta_0 =$
(b) $\theta_0 =$

Theory



A3-1

Japanese-L1 (JAP)

マックスウェル, レイリー, そしてエヴェレスト山: 解答用紙

電子雲の振動:

A.1 (0.5 pt)
 y の運動方程式

$$\ddot{y} =$$

A.2 (0.5 pt)
振幅

$$y_0 =$$

A.3 (0.5 pt)
空気分子の双極子モーメント

$$p(t) =$$

A.4 (0.5 pt)
 ω_0 の表式

$$\omega_0 =$$

放射されるパワー:

B.1 (1 pt)
放射されるパワー s

$$s =$$

Theory



A3-2

Japanese-L1 (JAP)

B.2 (0.2 pt)
放射されるパワー s

$s =$

強度 $I(x)$ を距離の x の関数として求める。

C.1 (1 pt)
強度減衰の式
 $\frac{dI}{dx} =$

C.2 (0.5 pt)
強度 $I(x)$ の式

$I(x) =$

Theory



A3-3

Japanese-L1 (JAP)

C.3 (0.3 pt)

減衰長 L の表式と数値.

表式. $L =$

数値 $L =$

DELEGATION PRINT

D.1 (2 pt)

解答に使う図

$H' =$

カンチェンジュンガ山 $H' =$

Everest 山. $H' =$

E.1 (1 pt)

$$\frac{I_{\text{エヴェレスト}}}{I_{\text{カンチェンジュンガ}}} =$$

エヴェレスト山の可視度

Theory



A3-5

Japanese-L1 (JAP)

エアロゾル汚染による減衰長 L_p :

F.1 (1 pt)

表式 $L_p =$

数値 $L_p =$

カンチェンジュンガ山とエヴェレスト山の相対強度と可視度:

G.1 (1 pt)

カンチェンジュンガ山

$$\frac{I}{I_{\text{ref}}} =$$

カンチェンジュンガ山の可視度

エヴェレスト山

$$\frac{I}{I_{\text{ref}}} =$$

Everest 山の可視度