



一般的な指示：理論試験

理論試験は5時間で合計30点です。

試験の開始と終了は試験監督が指示します。試験開始の指示の前に問題の入っている封筒などを開けてはいけません。開始から1時間ごとの経過時間、終了15分前、および終了時は、試験監督からアナウンスされます。

試験中：

- 提供されたペンのみを使用してください。図/スキーム（構想、計画を図にしたようなもの）/グラフの下書きに鉛筆を使っても構いませんが、その場合は、答案のスキャンが上手くいくように、最終版では、アウトラインをペンでなぞるようにしてください。
- 専用のアンサーシート（A マーク）は、最終的な答を書くために用意されています。詳細な解答（解き方）を記入するために、白紙のワーキングシート（W マーク）が用意されています。ワーキングシートを使う際には必ず小問番号を明記し、現在取り組んでいる大問に属するワーキングシートを使用してください（上部（ヘッダー）の大問番号を確認してください）。採点されたくないことを書いた部分には、×印を付けてください。ページの表側のみを使用し、境界線の外側には何も書かないでください。
- 白紙のシートが足りない場合は、試験監督に求めてください。支給された用紙のヘッダーには、国コードと学生コード（ワーキングシートと同じもの）、大問番号、小問番号、ページ番号を明記してください。
- 解答はできるだけ簡潔に書きなさい：できるだけ数式や論理演算子、スケッチなどを使って自分の考えを説明しなさい。長い文章は避けてください。
- 前の問題を解けなくても、後の問題が解けることがあります。
- 試験中はすべて録画されています。許可なくその場を離れることはできません。トイレに行きたいときや、その他の支援（余分なシートやペン、水やスナックの追加）が必要なときは、試験監督に伝えてください。

試験終了時：

- 試験終了のアナウンスがあったらすぐに筆記をやめなければなりません。
- 試験後、各大問ごとに対応するシートを以下の順番に重ねてください：一番上にカバーシート、その下にアンサーシート（A）、ワーキングシート（W）の順に重ねてください。さらにその下に白紙や余ったシートをまとめてください。
- 一つの大問につき、上で重ねたシートをすべて同じ封筒または書類フォルダーに入れてください。ただし、一般的な指示（G、このシートのこと）は封筒や書類フォルダーに入れずに直接、机の上に置きなさい。どのようなシートも、試験会場の外に持ち出すことはできません。
- 試験監督の許可が出たら試験会場から外へ出ることができます。IPhO から支給されたペンや鉛筆、鉛筆削り、消しゴム、定規、分度器、電卓は各自で持ち帰ることができます。

物理定数

各問題文で与えられる物理量に加えて、以下のリストにある物理定数も解答に使用してよい。

物理定数	記号	数値
真空中の光速	c	299 792 458 m/s
真空の透磁率	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$; [1 N/A ² = 1 Vs/Am]
真空の誘電率	ϵ_0	$8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; [1 F/m = 1 As/Vm]
電気素量	e	$1.6021766208(98) \cdot 10^{-19} \text{ C}$; [1 C = 1 A · s]
電子の静止質量	m_e	$9.10938356(11) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
陽子の静止質量	m_p	$1.672621898(21) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
中性子の静止質量	m_n	$1.674927471(21) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
原子質量単位	m_{amu}	$1.660539040(20) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
万有引力定数	G	$6.67408(31) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
アボガドロ定数	N_A	$6.022140857(74) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
モル気体定数	R	$8.3144598(48) \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
ボルツマン定数	k_B	$1.38064852(79) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
シュテファン - ボルツマン定数	σ	$5.670367(13) \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
プランク定数	h	$6.626070040(81) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
ディラック定数	$\hbar = h/(2\pi)$	$1.054571800(13) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

**惑星の物理 (10 点)****Part A. 中央海嶺 (5.0 点)****A.1** (0.8 pt)

$$F_x =$$

右側の板に作用するこの力の向きをチェック:

 左 右**A.2** (0.6 pt)

$$\rho(T) \approx$$

$$k =$$

A.3 (1.1 pt)

$$D =$$

A.4 (1.6 pt)

$$F \approx$$

A.5 (0.9 pt)

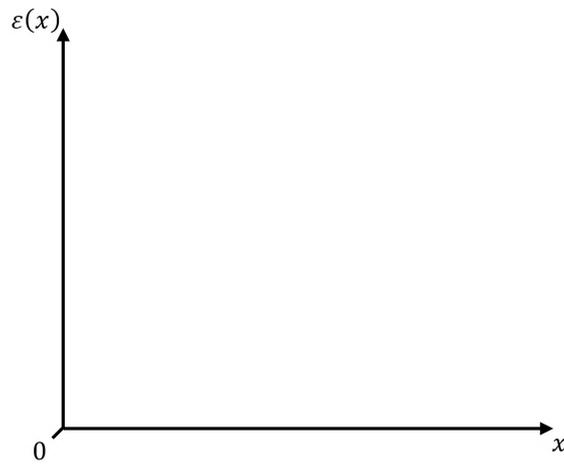
$$\tau =$$

**Part B. 成層媒体中の地震波 (5.0 点)****B.1** (1.5 pt)

$$x_1(\theta_0) =$$

B.2 (1.5 pt)

$$\varepsilon(x) =$$

**B.3** (2.0 pt)

$$x_{\max} =$$

静電レンズ (10 点)

Part A. リングの軸上の電位 (1 点)

A.1 (0.3 pt)

$$\Phi(z) =$$

A.2 (0.4 pt)

$$\Phi(z) \approx$$

A.3 (0.2 pt)

$$F(z) =$$

正しい方を○で囲む： $q < 0$ or $q > 0$.

A.4 (0.1 pt)

$$\omega =$$

Part B. リング面上の電位 (1.7 点)

B.1 (1.5 pt)

$$\beta =$$

B.2 (0.2 pt)

$$F(r) =$$

正しい方を○で囲む： $q < 0$ or $q > 0$.

Part C. 理想的な静電レンズの焦点距離：瞬間的に帯電する場合 (2.3 点)

C.1 (1.3 pt)

$$f =$$

Theory



IPhO Lithuania
2021

A2-2
Japanese (Japan)

C.2 (0.8 pt)

$c =$

C.3 (0.2 pt)

正しい方を○で囲む。

薄い光学レンズの公式が： 成り立つ (valid) or 成り立たない (not valid).

Part D. コンデンサとしてのリング (3 点)

D.1 (2.0 pt)

$C =$

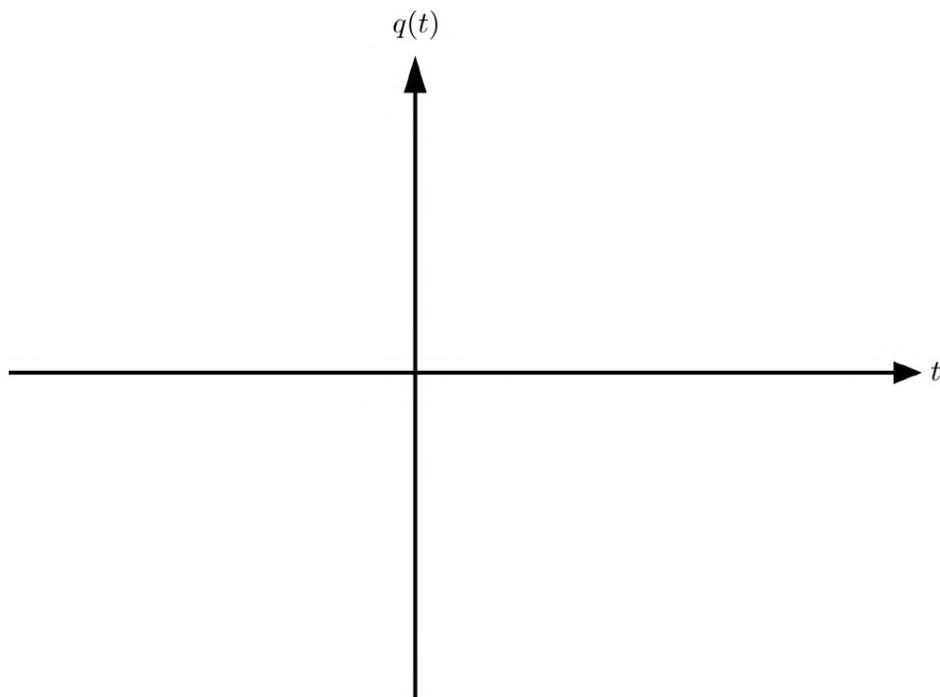
D.2 (1.0 pt)

For $-\frac{d}{2v} < t < \frac{d}{2v}$, $q(t) =$

For $t > \frac{d}{2v}$, $q(t) =$

$q_0 =$

時間の関数としてのリングの電荷：



Part E. より実際に近いレンズの焦点距離：帯電が瞬間的でない場合 (2点)

E.1 (1.7 pt)

$f =$

E.2 (0.3 pt)

$q_{\text{eff}} =$

粒子と波 (10 点)

Part A. 箱の中の量子力学的な粒子 (1.4 点)

A.1 (0.4 pt)

$$E_{\min} =$$

A.2 (0.6 pt)

$$E_n =$$

A.3 (0.4 pt)

$$\lambda_{21} =$$

Part B. 分子の光学的性質 (2.1 点)

B.1 (0.8 pt)

表式： $\lambda =$

数値： $\lambda \approx$

B.2 (0.4 pt)

Cy3 の吸収波長はどちらへ変化するか (チェックをつけよ): 青方 赤方

波長領域の変化： $\Delta\lambda \approx$

B.3 (0.7 pt)

$$K =$$

B.4 (0.2 pt)

数値： $\tau_{\text{Cy5}} \approx$

Part C. ボース・アインシュタイン凝縮 (1.5 点)

C.1 (0.4 pt)

$$p =$$

$$\lambda_{\text{dB}} =$$

C.2 (0.5 pt)

$$\ell =$$

$$T_c =$$

C.3 (0.6 pt)

表式： $n_c =$

数值： $n_c \approx$

表式： $n_0 =$

数值： $n_0/n_c \approx$

Part D. 3-ビーム 光格子 (5 点)

D.1 (1.4 pt)

$$V(\vec{r}) =$$

$$\vec{b}_1 =$$

$$\vec{b}_2 =$$

$$\vec{b}_3 =$$

D.2 (0.5 pt)

議論:

D.3 (1.2 pt)

$$V_X(x) =$$

$$V_Y(y) =$$

$$V_X(x) \text{ の最小値を与える } x =$$

$$V_X(x) \text{ の最大値を与える } x =$$

$$V_Y(y) \text{ の最小値を与える } y =$$

$$V_Y(y) \text{ の最大値を与える } y =$$

D.4 (0.8 pt)

$$\text{格子定数のレーザー波長に対する比: } a/\lambda_{\text{las}} =$$

原点に隣接する等価な最小点の位置:

D.5 (1.1 pt)

$$\text{表式: } n =$$

$$\text{数値: } n \approx$$

惑星の物理 (10 点)

この問題は、惑星内部に関係する2つの独立した問題からなる。惑星の表面曲率の効果は無視できるとする。必要であれば、次の近似公式を用いてよい。

$$(1+x)^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon x, \text{ when } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Part A. 中央海嶺 (5 点)

一様な重力(重力加速度 g)の下に置かれた大きな容器に水が入っている。互いに平行な2枚の直立した長方形の板は、容器の大きさに等しく、板の両端は、容器の鉛直な壁と隙間なく接している。それぞれの板は、長さ h だけ水に浸るように容器に立てられている(図1)。板の y -軸方向の幅を w とする。板の両端と容器の壁の隙間を、流体は出入りしないと仮定する。水の密度は ρ_0 である。

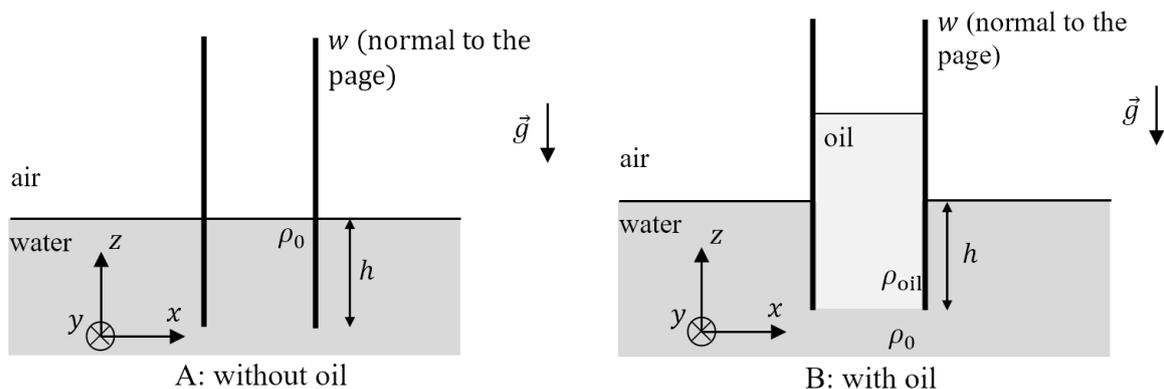


図1. 水中での平行な板.

密度 ρ_1 ($\rho_1 < \rho_0$) の油を、油の下底が板の下端に達するまで板の間に注入する。板と容器の端は十分に高く、油は板と容器の端を超えて溢れ出ることはないとする。流体の表面張力と流体間の混合は無視できる。

A.1 右側の板に作用する合力の x -成分 F_x の大きさと向きを求めよ。

0.8pt

図2は、中央海嶺の断面を示している。それはマントル、地殻、海洋水が層状に重なっている。マントルは地質学的な時間スケールで流動している岩石からなる。それゆえこの問題では、マントルは流体として扱われる。地殻の厚さは、 x -方向の特徴的な長さよりずっと小さく、地殻は自由に曲がる板である。高い精度でこのような分水嶺は、 y -軸(図2の紙面に垂直)方向への変化を無視して2次元系としてモデル化できる。 y -軸に沿った海嶺の長さ L は、この問題で導入される長さ比べてずっと長いとする。

海嶺の中心では、地殻の厚さはゼロである。地殻の中心から水平方向の距離 x が増えるにつれ、地殻の厚さは増加し、 $x \rightarrow \infty$ で一定の厚さ D に達する。対応して、海洋の底は海嶺の頂点 O より鉛直下方に h だけ沈んでいる。ここでは、頂点 O を座標系の原点とする(図2)。海水の密度 ρ_0 とその温度 T_0 は空間的にも時間的にも変化しない一定値とする。同様に、マントルの密度 ρ_1 とその温度 T_1 も一定値とする。地殻の温度 T は、時間的には変化しないが、位置に依存する。

地殻物質は、温度 T で線形に広がっていると高い精度で考えられている。海水とマントルの温度は一定であるため、熱膨張係数を変換して用いるのが便利である。 $l(T) = l_1 [1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)]$

ここで、 l は地殻物質のある部分の長さであり、 l_1 は温度 T_1 でのその部分の長さ、 k_l は変換された熱膨張係数(一定値とみなされている)である。

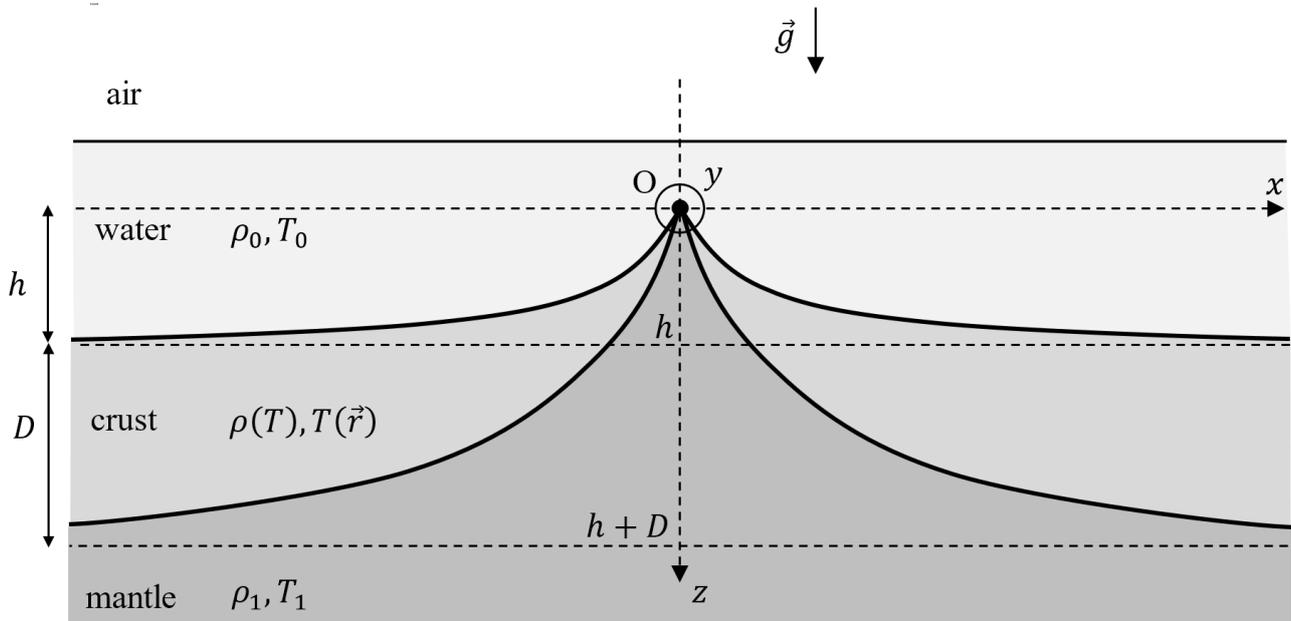


図2. 中央海嶺. z 軸は下方を向いている.

- A.2** 地殻は等方的と仮定する. 地殻の密度 ρ は温度 T にどのように依存するか. $|k_l| \ll 1$ 0.6pt
として, 近似的な式

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right], \quad (2)$$

で表すことができる. ここで, 2次の項 k_l^2 , および, それより高次の項は無視する. このとき定数 k を定めよ.

$k > 0$ であることが知られている. また, 地殻の熱伝導率 κ は一定であるとする. 結果として, 海嶺の軸から十分に遠く離れると, 地殻の温度は深さに線形に依存する.

- A.3** マントルと海水は非圧縮的であり, それらは静的平衡にあると仮定して, 遠く離れた地殻の厚さ D を, h, ρ_0, ρ_1 , および, k を用いて表せ. 物質の移動は無視できるとする. 1.1pt

- A.4** 右半分 ($x > 0$) の地殻に作用する水平方向の合力 F を, k の最も効果の大きい次数 (leading order) まで, ρ_0, ρ_1, h, L, k および g を用いて表せ. 1.6pt

地殻が地球の他の部分から熱的に遮断されているとする. そうすると熱伝導の結果, 地殻の上面と下面の温度は, 地殻が熱平衡に達するまで互いに近づいていく. 地殻の比熱は c であり, 一定であるとする.

- A.5** 次元解析, あるいは大きさの次数解析を用いることにより, 海嶺から遠く離れた地殻の上表面と下表面の温度差がゼロに近づく特徴的な時間 τ はどのように表されるか求めよ. ただし, τ は, はじめの地殻の2つの表面温度には依存しないとする. 0.9pt

Part B. 成層圏媒体中の地震波 (5.0 点)

ある惑星の表面で短い地震が発生したとする． x は水平座標を， z は地表からの深さを表すとして， $z = x = 0$ に位置する線状の波源から地震波が発生していると仮定する (図 3)．地震波源は，この問題で考えられている他のどの長さよりもはるかに長いと仮定することができる．

地震の結果， $x-z$ 平面内で z 軸に沿って正の成分を持つすべての方向に，いわゆる縦波の P 波が一様に放射される．固体中の波動理論は一般に複雑なので，この問題では，地震によって放出された他のすべての波を無視する．惑星の地殻は層を成しており，P 波の速度 v は深さ z に依存し， $v = v_0(1 + z/z_0)$ となる．ここでは， v_0 は表面での速度， z_0 は既知の正の定数である．

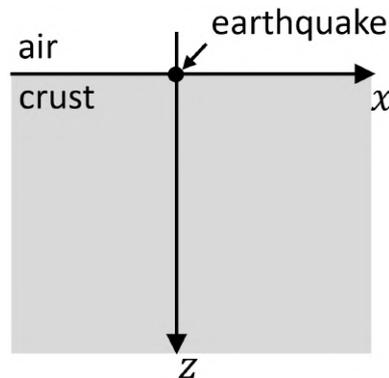


図 3. Part B で使用する座標系

- B.1** 地震によって発せられた 1 つの地震波が， z 軸と初期角度 $0 < \theta_0 < \pi/2$ をなし， $x-z$ 1.5pt
平面上を進むと考える．この地震波が惑星の表面で検出される水平座標 $x_1(\theta_0) \neq 0$
はどのように表されるか？ 波の経路は円弧で表されることが知られている．こ
こで， A と b を求めるべき定数として， $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ の形で答えよ．

A と b を求めることができなかつた場合，以下の問題では， $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ という結果をそのまま使うことができる．地震の際に地殻中に P 波として放出された震源の単位長さあたりのエネルギーの総量を E とし，波が下から惑星の表面に到達したときに完全に吸収されると仮定する．

- B.2** 表面が吸収する単位面積当たりのエネルギー密度 $\varepsilon(x)$ が，表面に沿った距離 x に 1.5pt
どのように依存するかを求めて， $\varepsilon(x)$ のプロットを描け．

ここからは，波が地表に到達したときに完全に反射されると仮定する． $z = x = 0$ の位置に，先ほどの地震源と同じ形状の装置があるとする．この装置は，自由な角度分布で P 波を放射することができる．この装置に狭い範囲の放射角をもつ信号を放射させる．具体的には，信号が垂直に対してなす初期設定の角度は， $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ の範囲にあるとする．ここで， $0 < \theta_0 < \pi/2$ ， $\delta\theta_0 \ll 1$ であり， $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ である．

- B.3** 信号が到達しない最遠点は，地震源から表面に沿ってどのくらいの距離 x_{\max} にあ 2.0pt
るか？ 答は， θ_0 ， $\delta\theta_0$ および上記の他の定数を用いて記述せよ．



静電レンズ (10 点)

全電荷 q で一様に帯電した半径 R の導体リングを考える．リングは太さ $2a \ll R$ の中空トロイド (ドーナツのような真ん中に穴が空いた回転曲面) とする．この太さは Part A, B, C, E では無視して良い．図 1 のように, xy 平面はリング面と一致するようにとり, z 軸はリングと垂直になるようにとる．Part A 及び B において, 必要ならば以下の近似式 (テイラー展開) を用いて良い．

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \text{ when } |x| \ll 1.$$

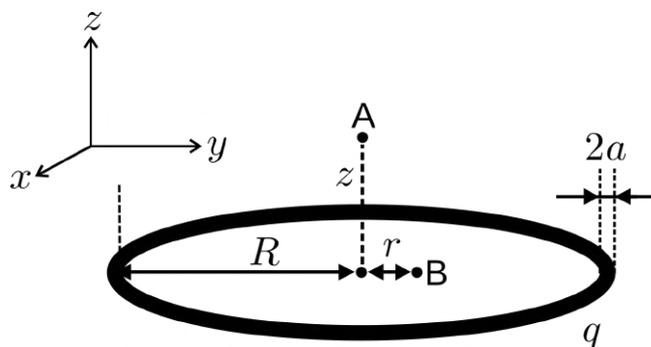


図 1. 半径 R の帯電した導体リング

Part A. リングの軸上の電位 (1 点)

A.1 リングの中心から z 離れた中心軸上の点 (図 1 での点 A) での電位 $\Phi(z)$ を計算せよ. 0.3pt

A.2 $z \ll R$ を仮定して, 電位 $\Phi(z)$ を z のべきについて (0 でない) 最低次数まで計算せよ. 0.4pt

A.3 質量 m , 電荷 $-e$ の電子が点 A に置かれている (図 1 参照, $z \ll R$). 電子にはたらく力を求めよ. また, 力の表式から振動解を持つための q の符号を決定せよ. ただし, 動く電子はリング上の電荷に影響を与えないものとする. 0.2pt

A.4 そのような調和振動の角振動数 ω を求めよ. 0.1pt

Part B. リング面上の電位 (1.7 点)

この Part では, $r \ll R$ を満たすリング面 $z = 0$ 上の点 (図 1 の点 B) での電位 $\Phi(r)$ を解析する. r のべきについて最低次数まで取ると, 電位は $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ で与えられる.

B.1 β の表式を求めよ. 必要ならば上で与えたテイラー展開の近似式を用いて良い. 1.5pt

- B.2** 電子が点 B に置かれている (図 1, $r \ll R$). 電子にはたらく力を求めよ. また, 力の表式から振動解を持つための q の符号を決定せよ. ただし, 動く電子はリング上の電荷に影響を与えないものとする. 0.2pt

Part C. 理想的な静電レンズの焦点距離：瞬間的に帯電する場合 (2.3 点)

電子を集めるためのデバイス—静電レンズを構築することを考える. 以下のような構成を考えよう. リングは図 2 のように z 軸に垂直に置かれている. 我々は必要に応じて非相対論的な速さの電子群を放出できる電子源を持っている. これらの電子の運動エネルギーは $E = mv^2/2$ (v は電子の速さ) であり, 正確に調整された運動量で電子源を飛び出す. システムは次のようにプログラムされている: ほとんどの時間においてリングは電気的に中性であるが, 電子たちがリングが置かれている平面から距離 $d/2$ ($d \ll R$) 以内に (図 2 での影付きの部分, 以後“active region(活性領域)”と呼ぶ) あるときに限り, リングは電荷 q で帯電する. Part C では, リングが帯電及び電気的中性に戻るプロセスは一瞬であり, 電場が“空間を満たす”のにかかる時間も同様に一瞬であると仮定する. また, 磁場の影響を無視し, 電子の z 軸成分の速度は一定であると仮定する. さらに, 動く電子群がリング上の電荷に影響を与えることはないとする.

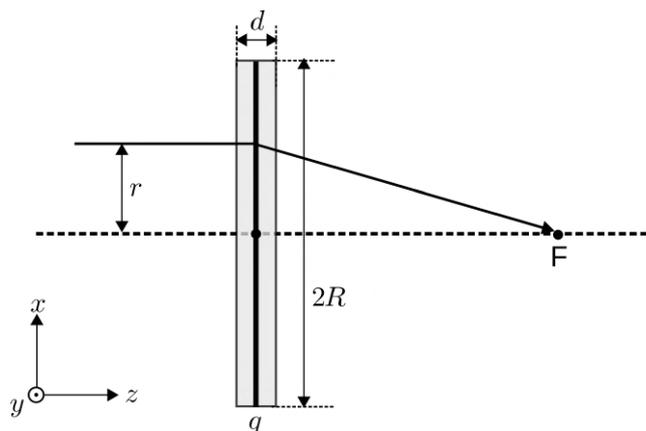


図 2. 静電レンズの模式図

- C.1** このレンズの焦点距離 f を求めよ. ただし, $f \gg d$ を仮定して良い. 問題 B.1 での定数 β や他に定めた諸物理量を用いて答えること. また, “active region(活性領域)”に到達する前の電子群は z 軸に平行で近軸である (z 軸からの最大距離が $r \ll R$ である) と仮定して良い. q の符号はレンズが電子を集めるように適切に選べ. 1.3pt

実際には, 電子源はリングの中心から距離 $b > f$ だけ離れた z 軸上に置かれている. “active region(活性領域)”に到達する前の電子群はもはや z 軸に平行ではなく, z 軸に対して角度 $\gamma \ll 1$ rad の範囲で 1 つの点源から放出されているとする. このとき, 電子群はリングの中心から距離 c 離れた点に集まる.

- C.2** c を求めよ. 問題 B.1 での定数 β や他に定めた諸物理量を用いて答えること. 0.8pt



C.3 薄い光学レンズについてのレンズの公式,

0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

は静電レンズに対しても成り立つか？ 明示的に $1/b + 1/c$ を計算することで示せ.

Part D. コンデンサとしてのリング (3点)

これまで考察してきたレンズは理想化されたモデルであり、リングが瞬間的に帯電すると仮定していた。リングが有限の静電容量 C を持つコンデンサであるため、これは実際には成り立たない。この Part では、このコンデンサとしての性質を解析する。必要ならば以下の積分公式を用いよ。

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

and

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1 リングの静電容量 C を求めよ。ただし、リングは有限の太さ $2a$ を持っているとし、 2.0pt
 $a \ll R$ に注意せよ。

電子群が“active region(活性領域)”にたどり着いたとき、リングは電圧 V_0 を持つ電源に接続される (図3)。電子群が“active region(活性領域)”を離れた瞬間、リングは接地される。接触抵抗は R_0 であり、リング自身の抵抗は無視できるとする。

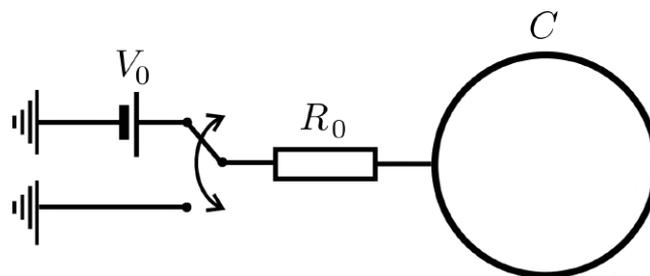


図3. 静電レンズの帯電

D.2 時間の関数としてのリングの電荷 $q(t)$ を求め、その時間依存性の概略をグラフに示せ。ただし、電子群がリング面上にある瞬間を $t = 0$ と定めることにする。また、電荷の絶対値が最大となるときにリングに蓄えられている電荷 q_0 を求めよ。リングの静電容量を C とせよ (つまり D1 で求めた具体的な表式は使わなくて良い)。注意：図3に示した電源の符号はあくまで図示のためのものである。符号は静電レンズが電子を集める働きをするように決定される。 1.0pt

**Part E. より実際に近いレンズの焦点距離：帯電が瞬間的でない場合 (2点)**

この Part ではより現実的な静電レンズの効果を考える．ここでは再びリングの太さ $2a$ は無視し，“active region(活性領域)”に到達する前の電子群は z 軸に平行に入射すると仮定する．しかし，リングの帯電や放電はもはや瞬間的には起きない．

E.1 このレンズの焦点距離 f を求めよ．ただし， $f/v \gg R_0 C$ ではあるが d/v と $R_0 C$ は同じオーダーの大きさであると仮定せよ．Part B での定数 β や他に定めた諸物理量を用いて答えること． 1.7pt

E.2 前問での f の表式は，Part C で得られた結果について q を q_{eff} で置き換えたものと同一形であることに気づくであろう． q_{eff} の表式を問題文中の文字を用いて求めよ． 0.3pt



粒子と波 (10 点)

粒子が波としても表現でき、また逆に波が粒子としても表現できるという波と粒子の二重性は、量子力学の中心的な概念の一つである。この問題では、この概念と少しの基本的な仮定に基づき、ミクロな世界の二つの異なるタイプの粒子 (フェルミオンとボソン) を対象とした量子現象を調べる。

Part A. 箱の中の量子力学的な粒子 (1.4 点)

一次元井戸型ポテンシャル中の質量 m の粒子の運動を考える。ポテンシャルエネルギー $V(x)$ は以下のように与えられる。

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ or } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

このようなポテンシャル中で古典的な粒子が任意の運動エネルギーを持つことができる一方で、量子力学的な粒子は正の離散的なエネルギー準位しか持つことができない。そのような状態のときには、粒子は壁で節を持つド・ブロイ定常波として表現することができる。

- A.1** 井戸内の量子力学的な粒子の取りうる最小エネルギー E_{\min} を求めよ。答えは m, L およびプランク定数 h で表すこと。 0.4pt

粒子が最小エネルギーにある状態は基底状態と呼ばれ、それ以外の全ての状態は励起状態と呼ばれる。全ての可能なエネルギー状態をエネルギーが小さい順に並べていき、各エネルギーを E_n のように番号づける。基底状態のエネルギーは E_1 となる。

- A.2** エネルギー E_n の表式を求めよ (ここで $n = 1, 2, 3, \dots$ である)。 0.6pt

- A.3** 粒子はある状態から別の状態へと瞬間的に遷移することがあるが、このような遷移はそれらの状態間のエネルギー差に対応するエネルギーを持った光子の放出または吸収によってのみ起こる。最初の励起状態 (E_2) から基底状態 (E_1) へ粒子が遷移した際に放出される光子の波長 λ_{21} を求めよ。 0.4pt

Part B. 分子の光学的性質 (2.1 点)

この Part では、シアニン Cy5 分子 (色素分子として広く用いられている。図 1a) の光学的性質について調べる。その光学的な性質は、主には単結合と二重結合が交互に並んだ炭素主鎖 (図 1b) によって決定され、一方で分子末端の環やラジカル R の影響は非常に小さい。主鎖内の各 C 原子が持つ 4 つの価電子 (および N 原子の持つ価電子たち) のうち各々 3 つは化学結合を形成する一方で、残りの価電子たちは”シェア”されて主鎖全体を動くことができる。そのような各電子のポテンシャルエネルギーは、図 1c に波打った細線で表されており、谷の部分は C 原子や N 原子に対応している。

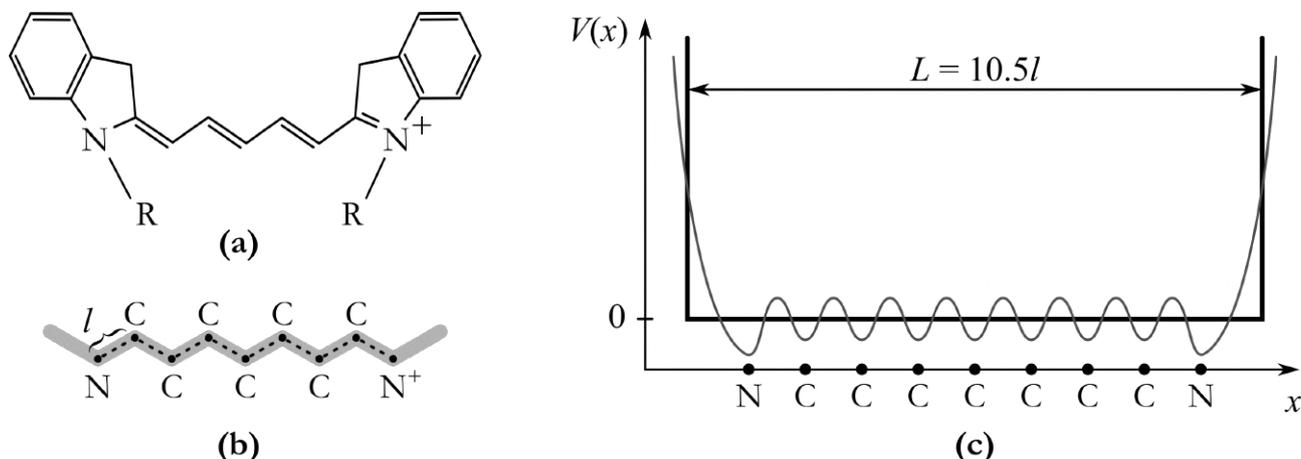


図 1. (a) シアニン Cy5 分子の化学的な構造 (簡単のため水素原子は省略している. また R はラジカルを表す.) (b) Cy5 分子の主鎖. 平均原子間距離は l . (c) 主鎖に沿った電子のポテンシャルエネルギー (細線) および式 (1) で与えられる階段関数による近似 (太線).

簡単のため, このポテンシャルエネルギーを式 (1) で与えられる単純な関数で近似することにする. ただし, 幅は $L = 10.5l$ (図 1c の太線を見よ), ここで $l = 140$ pm は平均原子間距離 (図 1b も参考にせよ). その結果, Part A で議論した井戸型ポテンシャルの中を動く, 10 個の電子 (7 個は C 原子, 2 個は N 原子, そして 1 個は N^+ イオンから.) から成る”電子気体”の描像が得られる. ここからの計算では, これらの電子間の相互作用は無視できるものとする. ただし, 電子はフェルミオンであり, パウリの排他原理に従うということは考慮する必要がある. また, その他の電子の影響および原子核の運動による影響は無視する.

B.1 電子系が最初その基底状態にあったとして, Cy5 分子に吸収されうる光子のうち最も長い波長 λ を求めよ. 答えは l および物理定数, また単なる数の係数を用いて表せ. さらに計算により数値も求めよ. 0.8pt

B.2 これとは異なる色素分子である Cy3 も似たような構造を持つが, その主鎖は炭素原子 2 つ分短くなっている. その吸収波長は Cy5 分子に比べて青方, 赤方のどちらにシフトするか. また波長のシフトの大きさ $\Delta\lambda$ の数値を求めよ. ただし, 二つの炭素原子を取り除くことによる影響は主鎖の長さが原子間距離二つ分だけ短くなるのみであり, 分子の形は変えないものとしてよい. 0.4pt

励起状態にある分子は, 光子を放出して基底状態に自発的に遷移しうる. そのような事象が起きる平均的な割合 K (すなわち, 時間 dt あたりの, 励起状態にある分子の相対的な減少を dN/N としたときの $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) は, 以下の量で決定される. すなわち, 放出光子の波長 λ , 遷移双極子モーメント d (電気素量を e として $d \approx el$ のオーダーで表される), 真空の誘電率 ϵ_0 , そしてプランク定数 h を用いて決定される.

B.3 次元解析により, 自発的な光子放出の割合の表式を ϵ_0, h, λ , および d を用いて決定せよ. ただし, その数値的な係数については $k = \frac{16}{3}\pi^3$ と与えられる. 0.7pt

B.4 Cy5 分子においては, $d \approx 2.4 el$ である. 励起状態のうち最もエネルギーの低い状態にある Cy5 分子の平均蛍光寿命 τ_{Cy5} を求めよ. ここで, この平均蛍光寿命は基底状態への放出遷移の時間あたりの割合の逆数として与えられる. 0.2pt



Part C. ボース・アインシュタイン凝縮 (1.5 点)

ここでは、ボース粒子の集団的な振る舞いを考察する。Part A, Part B の内容とは直接的な関係はない。

ボソンは、パウリの排他原理には従わず、低温や高密度では、ボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) と呼ばれる劇的な現象を起こす。これは、多数の同一粒子が単一の粒子状態に入り、あたかも 1 つの波のように振る舞うことを特徴とする、興味深い集団的量子状態への相転移である。この相転移は、通常、一定数の粒子を臨界温度以下に冷却することで得られる。原理的には、温度を固定したまま密度を臨界値以上にするだけでも相転移を引き起こすことができる。

まず、転移時の温度と密度の関係を調べよう。すぐ明らかになるように、臨界温度は、単純な観点から導き出すことができる。ボース・アインシュタイン凝縮は、粒子の二乗平均速度に対応するド・ブロイ波長が気体中の粒子間の平均距離と等しいときに起こるということである。

C.1 熱平衡状態にある ^{87}Rb 原子の理想気体を考えよう。原子の典型的な運動量 p と典型的なド・ブロイ波長 λ_{dB} を、原子の質量 m 、温度 T 、及び適切な物理定数を用いて表せ。 0.4pt

C.2 気体中の原子間平均距離 l を粒子密度 n の関数として表せ。その結果を用いて転移温度 T_c を原子質量、粒子密度、及び物理定数を用いて表せ。 0.5pt

実験室で BEC を実現するためには、実験家たちは気体を $T_c = 100 \text{ nK}$ という極低温まで冷却しなければならない。

C.3 BEC 転移がこのような温度で生ずるとき、Rb 気体の粒子密度 n_c はどのような値をとるであろうか。比較のために、理想気体が標準的な温度と圧力、すなわち、 $T_0 = 300 \text{ K}$ および $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ の時の通常の粒子密度 n_0 を求めよ。通常の粒子密度は BEC 転移点における粒子密度 n_c の何倍ほどに大きくなるだろうか。この通常の気体も原子質量単位で $87m_{\text{amu}}$ をもっているとして答えよ。 0.6pt

Part D. 3-ビーム光格子 (5 点)

ボース・アインシュタイン凝縮体が初めて実現されたのは 1995 年のことであったが、それ以来、実験的な研究はさまざまな方向に枝分かれして発展している。この Part では、いくつかのコヒーレントなレーザービームを干渉させることによって作られる空間的に周期的なポテンシャル中に凝縮体をおくという、非常に実り多いアイデアについて調べる。この系は干渉パターンが周期的であることから、光格子と呼ばれている。光格子の中を移動する原子に対するポテンシャルエネルギー $V(\vec{r})$ は、光の局所的な強度に比例するので、計算では次のように仮定することができる。

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle. \quad (2)$$

ここで、 α は正の定数であり、角括弧は急速に振動する項を除去する時間平均を示す。i 番目のレーザーで発生する電場は次のように表される。

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{\varepsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

ここで振幅は $E_{0,i}$ 、波数ベクトルは \vec{k}_i 、そして分極の単位ベクトルは $\vec{\varepsilon}_i$ である。

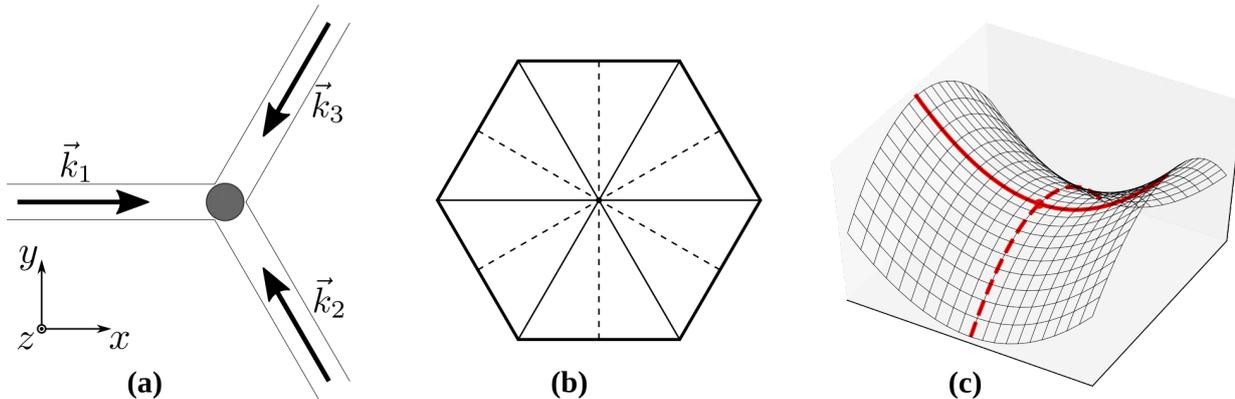


図 2.(a) 3-ビーム光格子: 波数 $\vec{k}_{1,2,3}$ をもつ 3 つの平面波が灰色で示された円内で交差して干渉を起こす. (b) 正六角形の対称性: 実線と破線は 2 組の対称軸を示す. (c) 鞍点: 曲面上で直交する方向の傾きがすべてゼロになる点で, プロットされた関数の極値ではない点. 実線で示された軌跡に沿って進むと, 見かけ上の最小値に遭遇する. 真の最小値と鞍点 (図示) を区別するには, 直角方向 (破線) の追加分析が必要である.

ここでの課題は, 同じ強度の 3 本のコヒーレント・レーザー・ビームを干渉させることによって生じる三角形の光格子を調べることである. 典型的なセットアップを図 2a に示す. ここでは, 3 本のビームはすべて z 方向に偏光しており, xy 平面を伝搬し, 120° の等角度で交差している. x 軸の方向を波数ベクトル \vec{k}_1 に平行に選ぼう.

D.1 式 (2) と式 (3) を用いて, ポテンシャルエネルギー $V(\vec{r})$ を位置 $\vec{r} = (x, y)$ の関数として求めよ. 1.4pt
ヒント: この結果は, 定数項と, 引数 $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$ をもつ 3 つの余弦関数の和としてきれいに表現できる. 結果をこの形式で書き, ベクトル \vec{b}_i を特定せよ.

D.2 結果として得られたポテンシャルエネルギーは, 6 回の回転対称軸を持っている. 0.5pt
つまり, ポテンシャルの分布は, 原点の周りで 60° の倍数の回転に対して不変である. これが本当であることを証明する簡単な議論をせよ.

以上の対称性の観察により, 2 次元のポテンシャル分布の解析が簡単になった. 図 2b に示すように, 正六角形には, 対向する頂点同士を結ぶ対称線 (実線) と対向する辺の midpoint 同士を結ぶ対称線 (破線) がある. そのため, 2 次元のポテンシャル分布図を作成して検討する必要はなく, 対称線に沿った座標軸 x 及び y に注目することで, 多くの知見を得ることができる.

D.3 座標軸に沿ったポテンシャル $V(\vec{r})$ の振る舞いを導き出せ. すなわち, 関数 $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ および $V_Y(y) \equiv V(0, y)$ を決定せよ. $V_X(x)$ および $V_Y(y)$ を各々単一の引数の関数として扱い, それら各々の極値を与える点を求めよ. これらの関数は周期的であるので, 周期的に繰り返される最小値と最大値の各族から代表的なものを 1 つだけリストにいれること. 1.2pt

我々は, いわゆる格子点の位置を決定することに関心がある. 完全な 2 次元ポテンシャル $V(\vec{r})$ の最小値を与える点が格子点である. 求められた単一引数関数 V_X および V_Y の極小値は極小値の可能性はあるが, 鞍点を排除するためにはまだチェックが必要である. 図 2c に示すように, 一本の線に沿って調べると, 鞍点が極小のように見えるが実際には極小ではない.



- D.4** 前問の結果を検討して，光学格子の実際の最小点を決定せよ．原点に最も近い（ただし一致しない）等価な最小点をすべて特定せよ．最も近い最小点の間の距離 a ，すなわち光格子の格子定数はいくらか？ 答えをレーザーの波長 λ_{las} で表せ． 0.8pt

超低温の原子は電荷をもたないため，2つ以上の原子が光学格子の同じ場所を占める場合にのみ，その相互作用が重要になると考えられている．しかし，実験家たちは，長距離の原子間相互作用を維持するような設定を模索することもできる．その方法として，物理的に大きく，誇張された特性をもつ「リュードベリ原子」を作ることが考えられる．リュードベリ原子とは，外殻電子が主量子数 n の非常に大きな状態に励起された原子のことである．リュードベリ原子の大きさは，軌道角運動量が $n\hbar$ になるような電子の古典的円軌道の半径としてよい．ここに \hbar はディラック定数である．

- D.5** Rb リュードベリ原子の半径がレーザー光の波長 $\lambda_{\text{las}} = 380\text{nm}$ に匹敵する場合の n の値を計算せよ．答えを λ_{las} と物理定数とで表し，その数値も求めよ． 1.1pt