

**T1: ソレノイドとループ**

**Part a. 解答例 I.** ニュートンの第三法則によれば、ソレノイドに働く力はループに働く力と大きさが等しく向きが反対である。ループに流れる電流は  $J = \mathcal{E}/R$  であるから後者の力は、ループの線素  $\Delta\vec{l}$  に働く無限小のローレンツ力  $\Delta\vec{F} = J\Delta\vec{l} \times \vec{B}$  の和として求められる。  $\vec{B}$  は線素の位置における磁束密度である。

ソレノイドは長くて細いので、ソレノイド内部の磁力線はその両端の近傍を除いて  $+z$  方向を向いている。ソレノイドの外部で、磁場は渦も源ももたない。換言すると回転も発散ももたない。これと同じ条件は真空中の電場でも同様にみたされている。従って、ソレノイド外部の磁場は、ふたつの磁極、すなわち  $O_1$  近傍に置かれた N 極と  $O_2$  近傍に置かれた S 極が作り出す磁場で十分良く近似できる。N 極から出る (そして S 極に入る) 磁束  $\Phi$  は、ソレノイド断面を通る磁束に等しい:

$$\Phi = B_{in}A = \mu_0 \frac{NI}{\ell} A.$$

ソレノイドの先端  $O_1$  がループの中心  $O$  に到達したとき、ソレノイドの最後尾  $O_2$  からの磁場は無視できる。  $O_1$  にある N 極から出た磁場は放射状に広がり、ループの円周上における大きさは (球対称性から):

$$B(r) = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 NIA}{4\pi \ell r^2}.$$

*Note.* ソレノイドの端点から出た磁束密度 B 場 (上記に比べて因子 1/2 を含む) が、  $z > 0$  の半球に一樣に広がると想定してもよい。

ループの各部分に働く力 (そしてそれらの合力) は  $-z$  方向を向いているが、これはループとソレノイドに流れる電流が同じ向きであることから期待されるとおりである。従ってソレノイドに働く反作用の力は  $+z$  方向をむいており、その大きさは

$$F_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot 2\pi r \cdot \frac{\mu_0 NIA}{4\pi \ell r^2} = \frac{\mu_0 NIA\mathcal{E}}{2\ell Rr}$$

で与えられる。

最後尾の点  $O_2$  がループの中心に至ったとき、S 極からの磁場がループに力を及ぼす。磁場は放射状で内向きなので、ソレノイドに働く力は上に得られた力と大きさが等しく向きが逆になる:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1.$$

Grading scheme: T1 part a., Solution I.	
ニュートンの第三法則を適用する	0.5 p
磁気単極子を用いた外場の近似 0.5 p, その正当化 0.5 p	1.0 p
磁気単極子から出た磁束 $\Phi$ の計算 (符号が違う場合, 0.3 p)	1.0 p
磁極による磁場 $B(r)$ の表式	1.0 p
ローレンツの法則を用いてループに働く力を求める	1.0 p
力 $\vec{F}_1$ の正しい方向 0.5 p, 及び $\vec{F}_2$ が $\vec{F}_1$ と逆向きなこと 0.5 p	1.0 p
<b>part a. 全体で</b>	<b>5.5 p</b>

**解答例 II.** この解答例ではソレノイドに働く力を電流の流れるループの中心に置かれた磁荷に働く力として計算し

てみよう。そのためには磁極の強さ (すなわち磁荷)  $Q_m$  の表式を見つけなければならない。これは力と磁場の比として定義される。

全双極子モーメント  $m$  は、巻き数と一巻きあたりの双極子モーメントの積である:

$$m = NIA.$$

これは磁荷と磁極間の距離の積としても表すことができる  $m = Q_m \ell$ . 従って次の表式を得る。

$$Q_m = \frac{NIA}{\ell} = \frac{\Phi}{\mu_0}$$

ただし、 $\Phi$  は磁極から出る全磁束である。(解答例 I 参照)

*Note.* 同じ結果は静電場と静磁場の間にある類似性からも得ることができる。二つの点電荷  $\pm Q$  の間のクーロン力は仮想仕事の原理に基づき、静電場のエネルギーの電荷間距離に関する微分として導出できる。二つの磁極  $\pm Q_m$  の間の力もまた同様な方法で計算することができる。電場と磁場のエネルギー密度の表式から、磁極間の力の表式を得る:

$$w_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \longleftrightarrow w_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2,$$

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} \longleftrightarrow F_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_m^2}{r^2}.$$

容易に分かるように、静電気学でよく知られた公式は、置きかえ  $\epsilon_0^{-1} \longleftrightarrow \mu_0, E \longleftrightarrow B, Q \longleftrightarrow Q_m$  によって、静磁気学においても使うことができる。この類似性を活用することによって磁極の強さに対する表式を見つけ出すことができる:

$$Q = \epsilon_0 \Psi \longleftrightarrow Q_m = \frac{\Phi}{\mu_0} = \frac{N}{\ell} IA,$$

ただし、 $\Psi$  および  $\Phi$  は、それぞれ、電荷および磁荷を囲む閉曲面を貫く電束と磁束である。

ソレノイドの先端  $O_1$  が点  $O$  にあるとき N 極はループの中心に位置する。ループがこの位置に作り出す磁場は、ビオ・サバールの法則より:

$$B_{loop}^{(at\ center)} = \frac{\mu_0 J}{2r} = \frac{\mu_0 \mathcal{E}}{2Rr},$$

で、 $+z$  方向を向いている。ソレノイドの先端点  $O_1$  に働く力の大きさは

$$F_1 = Q_m B_{loop}^{(at\ center)} = \frac{\mu_0 \mathcal{E} NIA}{2\ell Rr},$$

で、 $+z$  方向を向いている。

最後尾の点  $O_2$  がループの中心に来たときに S 極に働く力  $F_2$  も同様に計算でき、 $F_1$  と同じ大きさで向きが反対であることもわかる。

Grading scheme: T1 part a., Solution II.	
磁気単極子を用いた外場の近似 0.5 p, その正当化 0.5 p	1.0 p
磁極の強さ $Q_m$ の表式 (次元を間違えた解答は 0 p)	1.0 p
計算方法の正当化	1.0 p
電流ループ中心の磁場をビオ・サバールの法則を用いて計算	0.5 p
磁極に働く力の大きさの表式	1.0 p
力 $\vec{F}_1$ の正しい方向 0.5 p, 及び $\vec{F}_2$ が $\vec{F}_1$ と逆向きなこと 0.5 p	1.0 p
<b>part a. 全体で</b>	<b>5.5 p</b>

**解答例 III.** ループが作り出す磁力線の一部は先端  $O_1$  からソレノイド内部に入る。その磁束は

$$\Phi_{in} = B_{loop}^{(at\ center)} A = \frac{\mu_0 J}{2r} A = \frac{\mu_0 \mathcal{E} A}{2Rr}.$$

最後尾  $O_2$  はループから遠くにあるのでループがそこに作り出す磁束は無視できるほど小さい。これは磁束  $\Phi_{in}$  のほとんどすべてがソレノイドの側面から流出することを意味する。

ループがソレノイドの  $i$  巻目の外周に作り出す磁場の動径成分を  $B_i$  としよう。この成分だけがソレノイドに働く力に寄与する。 $z$  軸方向の成分は動径方向の力を作り出すが、これは回転対称性から打ち消し合う。ソレノイドの  $i$  巻目が受ける力は

$$F_{1,i} = 2\sqrt{A\pi}IB_i,$$

となる。ここで  $2\sqrt{A\pi}$  はソレノイドの円周で、力は  $+z$  方向を向いている。両辺の和をとることによってソレノイドに働く合力が得られる:

$$F_1 = \sum_i F_i = \sum_i 2\sqrt{A\pi}IB_i$$

因子  $I$  を総和記号の外に出し、代わりに  $1$  をちょっと変わった形  $1 = (\ell/N) \cdot (N/\ell)$  にして挿入する:

$$F_1 = I \frac{N}{\ell} \sum_i 2\sqrt{A\pi} \frac{\ell}{N} B_i.$$

右辺の和はソレノイドの側面から流出する磁束で  $\Phi_{in}$  に等しい。従って、力は

$$F_1 = I \frac{N}{\ell} \Phi_{in} = \frac{\mu_0 \mathcal{E} AN I}{2Rr\ell},$$

となるが、これは解答例 I, II の結果と同一である。

Grading scheme: T1 part a., Solution III.	
ループ中心における $B$ -場	0.5 p
一巻きあたりの力の表式	1.0 p
全磁束がソレノイドの側面から流出するとの認識	0.5 p
流出する磁束から力を求める	1.5 p
各ソレノイドに関する和を取り正しい結果を得る	1.0 p
力 $\vec{F}_1$ の正しい方向 0.5 p, 及び $\vec{F}_2$ が $\vec{F}_1$ と逆向きなこと 0.5 p	1.0 p
<b>part a. 全体で</b>	<b>5.5 p</b>

**解答例 IV.** 電流ループを等価な磁気モーメント  $\vec{m}$  で置きかえるとき、これが磁場  $\vec{B}$  から受ける力は  $\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$  と表せる。ソレノイドを、等しい微小な長さ  $\Delta\ell$  をもつ円周状のコイルに分割しよう。すると、それぞれのコイルの磁気モーメントは

$$\Delta\vec{m} = IA \frac{N\Delta\ell}{\ell} \vec{e}_z,$$

となる。ただし  $\vec{e}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。この磁気モーメントは電流の流れる大きなループが作る磁場  $\vec{B}_{loop}$  と平行なので、それぞれの分割コイルに働く  $z$  方向の力は

$$\Delta F_1 = \Delta m \frac{dB_{loop}}{dz} = IA \frac{N\Delta\ell}{\ell} \frac{dB_{loop}}{dz}$$

と書ける。ソレノイドに働く合力は、各部に働く力の積分として求められる。

$$F_1 = \int_{-\ell}^0 d\ell \frac{\Delta F_1}{\Delta\ell} = IA \frac{N}{\ell} (B_{loop}(0) - B_{loop}(-\ell)).$$

ビオ・サバールの法則を用いると、ループが  $z$  軸に添って作り出す磁場  $B_{loop}(z)$  を計算できる。

$$B_{loop}(z) = \frac{\mu_0 \mathcal{E}}{2R} \frac{r^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

$B_{loop}$  に対するこの表式からソレノイドに働く力を求めることができる。

$$F_1 = \frac{\mu_0 \mathcal{E} AN I r^2}{2R\ell} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{(\ell^2 + r^2)^{3/2}} \right) \stackrel{\ell \gg r}{\approx} \frac{\mu_0 \mathcal{E} AN I}{2\ell R r},$$

$F_1$  の向きは  $+z$  方向である。同様の計算から  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$  を得る。

Grading scheme: T1 part a., Solution IV.	
ソレノイドを等しい長さの切片に分割するというアイデア	1.0 p
一つの切片のもつ磁気モーメント	0.5 p
一つの切片に働く力を磁場勾配を用いて表現	1.0 p
ビオ・サバールの法則を用いて電流ループによる磁場を計算する(その代わりにループ中心における磁場のみ重要と指摘し 0.5 p, 更にこの磁場を計算 0.5 p)	1.0 p
各切片に働く力を積分して全体に働く力を求める(結果が積分を残したままの場合は最大 0.5 p)	1.0 p
力 $\vec{F}_1$ の正しい方向 0.5 p, 及び $\vec{F}_2$ が $\vec{F}_1$ と逆向きなこと 0.5 p	1.0 p
<b>part a. 全体で</b>	<b>5.5 p</b>

**Note:** ソレノイドを小さな切片に分割するというアイデアを用いると他の解も可能になる(たとえば、小さな双極子の寄与を考慮する)。この場合には解答例 IV の採点基準を調整する必要がある。しばしば見受けられるこの種の解は、ソレノイドを長さ  $dz$  の微小な切片に分割し、ビオ・サバールの法則を用いてループによる  $z$  方向の磁場を計算し、ガウスの法則を用いて切片を貫く動径方向の磁束と  $dB/dz$  の関係を求める。更に切片に働くローレンツ力を計算し、これをソレノイドの長さ方向に積分しソレノイド全体に働く力を求める。この場合、磁場の動径成分を求めるのにガウスの法則を適用することに対し 0.5p を与える。

**解答例 V.** この解答例では我々はソレノイドに働く力を系のエネルギー変化に関係づける。まずはじめに、点  $O_1$  が点  $O$  にある場合を調べよう。電流の向きが同じなので、ソレノイドに働く力  $\vec{F}_1$  は  $+z$  の方向を向いている。ソレノイドに外力  $-\vec{F}_1$  を与えて平衡を保ちつつ正の  $z$  方向に小さな変位  $\delta z$  を与えてみよう。このとき外力のする仕事が系のエネルギー変化に等しい。

$$-\vec{F}_1 \cdot \delta\vec{z} = -F_1 \delta z = \delta E_{total},$$

系が閉じていないことに注意しよう: バッテリーと電流源が回路の中に含まれている。従って、 $\delta E_{total}$  は場のエネルギーの変化分と電源のエネルギーの変化分を含む:

$$\delta E_{total} = \delta E_{field} + \delta E_{sources}.$$

ここで議論している力は電源の種類に依存しないので、バッテリーを一定の電流  $J = \mathcal{E}/R$  を供給する定電流源で置きかえよう。ここで  $\delta E_{field}$  と  $\delta E_{sources}$  の関係を見つけよう。場に蓄えられるエネルギーは

$$E_{field} = \frac{1}{2} L_1 I^2 + \frac{1}{2} L_2 J^2 + L_{12} I J,$$

と表現できる。ここに  $L_1$  はソレノイドの自己インダクタンス、 $L_2$  はループの自己インダクタンスで、 $L_{12}$  はこれらの

相互インダクタンスである. 小さな変位  $\delta z$  のもとで変化するのは最後の項のみである. 従って

$$\delta E_{\text{field}} = \delta L_{12} \cdot IJ.$$

この小さな変位はループとソレノイドに囲まれた磁束を変化させる. ソレノイドがループに作り出す磁束は  $L_{12}I$  で, ループがソレノイドに作る磁束は  $L_{21}J = L_{12}J$  である (ここで相互インダクタンスの対称性を用いた). 変位  $\delta z$  の起こる短い時間  $\delta t$  の間, 誘導起電力がループ ( $V_{\text{ind}}^{\text{loop}}$ ) とソレノイド ( $V_{\text{ind}}^{\text{solenoid}}$ ) に発生する. これらはファラデーの法則から次のように求められる.

$$V_{\text{ind}}^{\text{loop}} = -\frac{\delta L_{12}}{\delta t} I, \quad V_{\text{ind}}^{\text{solenoid}} = -\frac{\delta L_{12}}{\delta t} J.$$

回路に流れる電流を一定に保つために, 電流源は (ジュール熱に加えて) 追加の電力を供給する必要がある. 電流源のエネルギー変化は

$$\delta E_{\text{sources}} = \left( V_{\text{ind}}^{\text{loop}} J + V_{\text{ind}}^{\text{solenoid}} I \right) \delta t.$$

先に得られた結果により, 最終的に

$$\delta E_{\text{sources}} = -2\delta L_{12}IJ = -2\delta E_{\text{field}},$$

を得る. この結果から  $\delta E_{\text{total}} = -\delta E_{\text{field}}$  が得られ, 従って  $F_1 \delta z = \delta E_{\text{field}} = \delta L_{12}IJ$  を得る.

*Note 1.* 電流源なしに永久電流の流れる超伝導回路を考えると, ナイブには  $\delta E_{\text{total}} = \delta E_{\text{field}}$  が成り立つと思うかも知れない. 詳細な計算によると, この場合, ループとソレノイドに流れる電流が共に変化することが分かる. これは, 超伝導回路に囲まれる磁束は変化することができないという条件 (磁束の量子化) があるためである. 上の結果に負符号が現れることを物理的に正当化することが, この解答例の重要な部分となる.

ここで相互インダクタンスの変化を計算しよう. 小さな変位  $\delta z$  は最後尾の短い切片 (巻き数  $N\delta z/\ell$ ) を切り取って先端部に移動させることと考えよう. その結果, ループがソレノイドに作り出す磁束は微小量

$$\delta \Phi_{12} = \delta L_{21}J = \underbrace{\frac{\mu_0 J}{2r}}_{B_{\text{loop}}^{\text{(at center)}}} A \frac{N}{\ell} \delta z.$$

だけ増加する. このことから

$$F_1 = \frac{\delta L_{12}IJ}{\delta z} = \frac{\mu_0 \mathcal{E} N A I}{2\ell R r}.$$

が得られる. 最後尾  $O_2$  が点  $O$  に来たときは相互インダクタンスが微小変位に伴って減少するので  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$  という結果になる.

*Note 2.* 場のエネルギーはエネルギー密度を全空間で積分することによっても計算できる. 場のエネルギーの総量を計算する代わりに, 上に述べたのと同じアイデア, 即ち, 長さ  $\delta z$  のソレノイド切片を最後尾から切り取って先端部分に移動するというアイデア, を用いてエネルギー変化を計算する方が容易である.  $\ell \gg \delta z \gg \sqrt{A}$  を仮定すると, ソレノイドがこの切片に作り出す磁場は  $\mu_0 NI/\ell$  となる (磁場の値はソレノイドの両端の近傍  $\sim \sqrt{A}$  を除いてこの値に等しい). 場のエネルギーの変化, 最終的に

$$\delta E_{\text{field}} = \frac{1}{2\mu_0} \left[ (B_{\text{loop}}^{\text{(at center)}} + B_{\text{sol}})^2 - (B_{\text{loop}}^{\text{(at center)}})^2 - B_{\text{sol}}^2 \right] A \delta z.$$

となり, 従って  $\delta E_{\text{field}}$  に対し, 上記の値と同一の結果を得る.

*Note 3.* 第三の可能性としてソレノイドの変位に伴うポテンシャルエネルギーの変化を計算してみよう. 長さ  $\delta z$  の切片の磁気モーメントは  $\vec{m} = \vec{e}_z I A N \delta z / \ell$  であるから外場中のエネルギーは  $E_{\text{pot}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  である. 注目すべきことだがこのポテンシャルエネルギーは解答例の冒頭に議論した-1の因子を既に含んでいる. ソレノイドに働く力は

$$F_1 = -\frac{\delta E_{\text{pot}}}{\delta z}.$$

となる.

外場はループの作る磁場  $\vec{B}_{\text{loop}}$  とコイルの作る磁場  $\vec{B}_{\text{sol}}$  の重ね合わせである (後者はソレノイドの中央に比べて  $1/2$  の因子を含むことに注意).  $\vec{B}_{\text{sol}}$  はソレノイドの両端  $O_1$  と  $O_2$  で同一なので, エネルギー変化は

$$\delta E_{\text{pot}} = -\vec{m} \vec{B}_{\text{loop}}^{\text{(at centre)}} - \vec{m} \vec{B}_{\text{loop}}(z = \ell).$$

となるが, 第2項は無視できるので, 最終的に

$$\delta E_{\text{pot}} = -\frac{I A N \delta z}{\ell} \frac{\mu_0 \mathcal{E}}{2R r},$$

が得られる. これから得られる力  $F_1$  は, 他の方法で得られた結果と同一である.

**Grading scheme: T1 part a., Solution V.**

力をエネルギー変化に結びつける	0.5 p
仮想変位に対するエネルギー変化の式を与える (電流源のエネルギー変化が考慮されていない場合 0.2 p)	0.5 p
$\delta E_{\text{field}}$ を電流と相互インダクタンスを用いて表現	1.0 p
関係 $\delta E_{\text{sources}} = -2\delta E_{\text{field}}$ を導出	1.0 p
場のエネルギーと力を正しく計算	1.5 p
力 $\vec{F}_1$ の正しい方向 0.5 p, 及び $\vec{F}_2$ が $\vec{F}_1$ と逆向きなこと 0.5 p	1.0 p
<b>part a. 全体で</b>	<b>5.5 p</b>

*Part b.* 重要な特徴を表示するグラフをプロットするために有益なくつかの計算を行う. 問題文では時間のゼロ点が指定されていないのでソレノイドの中心が点  $O$  にある瞬間を  $t = 0$  とする. つまり時刻  $t$  において, ソレノイドの先頭の部分  $O_1$  は  $z_1 = \ell/2 + vt$  に位置し, ソレノイドの尾の部分  $O_2$  は  $z_2 = -\ell/2 + vt$  に位置する.

任意の時間にループを流れる電流は以下の式で与えられる.

$$J(t) = \frac{\mathcal{E} + V_{\text{ind}}(t)}{R},$$

ここで  $V_{\text{ind}}(t)$  は時間の関数としてループ内に誘起される起電力である. この誘導起電力についての解析的な式を与える2つの異なる解法を以下に示す.

**解答例 I.**

再び, ソレノイドの外側の磁場をそれぞれ  $z_1$  と  $z_2$  の2つの磁極によって近似することが出来る. その結果得られるループを貫く磁束はそれぞれの極から見込む立体角を考慮して計算される. part a. の解答例 I で計算された極の全磁束を用いて下式を得る.

$$\Phi_{\text{loop}} = \frac{\mu_0 N I A}{2\ell} \left\{ \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + r^2}} + 1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + r^2}} - 1 \right\}.$$

この結果と,  $z_1 = z_2 = v$  を用いる. 誘導起電力はファラデーの法則により  $V_{\text{ind}} = -d\Phi_{\text{loop}}/dt$  を満たすので下式を得る.

$$V_{\text{ind}} = -v \frac{\mu_0 N I A}{2\ell} \left\{ \frac{r^2}{(z_1^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r^2}{(z_2^2 + r^2)^{3/2}} \right\}.$$

**解答例 II.** ソレノイドがループを貫いて発生する磁束の変化率はループに対するソレノイドの相互インダクタンス  $L_{12}$  を用いて表される:

$$\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d}{dt}(L_{12}I) = I \frac{dL_{12}}{dt}.$$

相互インダクタンスの対称性 ( $L_{12} = L_{21}$ ) を用いて,  $\dot{L}_{12}$  を計算する代わりに  $L_{21}$ , つまりソレノイドに対するループの相互インダクタンスの時間微分を求める. そこで, ループ内の電流が  $J_0$  で一定であると仮定して, ごく短い時間  $dt$  の間にソレノイドを通してループから生み出される磁束の変化を計算する. ソレノイドの小さな変位  $vdt$  は, ソレノイドの尾の部分から先頭の部分へ長さ  $vdt$  の短い領域を移動させたものと解釈することが出来る. この短い領域による磁束の変化は次式で与えられる.

$$d\Phi_{21} = dL_{21}J_0 = vdt \frac{NA}{\ell} (B_{\text{loop}}(z_1) - B_{\text{loop}}(z_2)).$$

ビオーサバルの公式によって得られた  $B_{\text{loop}}(z)$  の計算式 (part a. の解答例 IV を参照せよ) を用いて以下を得る.

$$\frac{dL_{21}}{dt} = v \frac{NA \mu_0}{\ell} \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{(z_1^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r^2}{(z_2^2 + r^2)^{3/2}} \right].$$

これによって誘導起電力  $V_{\text{ind}} = I\dot{L}_{12} = I\dot{L}_{21}$  は次のように表される:

$$V_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -v \frac{\mu_0 NIA}{2\ell} \left[ \frac{r^2}{(z_1^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r^2}{(z_2^2 + r^2)^{3/2}} \right]$$

この解析結果はループに流れる電流を正しく与えるが, part b. の課題はグラフを描くことであった.

グラフには関数の最も重要な特徴を反映させる必要がある. まず,  $V_{\text{ind}}(t)$  は奇関数である. つまり,  $V_{\text{ind}}(-t) = -V_{\text{ind}}(t)$  が成立している.  $t < 0$  においてはループを貫く磁束が増加するので,  $V_{\text{ind}} < 0$  および  $J < \mathcal{E}/R$  が成立. 一方で,  $t > 0$  においては磁束は減少するので,  $V_{\text{ind}} > 0$  および  $J > \mathcal{E}/R$  が成立する.

異なる時間領域では,  $V_{\text{ind}}(t)$  の振る舞いは大きく異なっている.  $t \ll -\ell/(2v)$  および  $t \gg \ell/(2v)$  において, ソレノイドはループ電流から非常に離れている ( $vt$  程度の距離離れている). そのため磁場は双極子場に近似される ( $v^{-3}t^{-3}$  に比例する). 場の時間微分はループ内の誘導起電力に比例するので, 時間がこの範囲にある時には,  $V_{\text{ind}}(t) \propto t^{-4}$  が成立し, その値が非常に小さい. この結果は先ほど求めた厳密な  $V_{\text{ind}}$  の表式をテイラー展開することによっても得られる.

$t \approx \pm\ell/(2v)$  の時 ( $r/v$  の精度で) はソレノイドの極の一方を無視することが出来る. ここでは誘導起電力の絶対値は最大値を取っており, その値は以下:

$$|V_{\text{ind}}| = v \frac{\mu_0 NIA}{2\ell r},$$

よって, 電流の最大値と最小値は以下.

$$J_{\text{min}} = \frac{\mathcal{E}}{R} - v \frac{\mu_0 NIA}{2Rr\ell}, \quad J_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}}{R} + v \frac{\mu_0 NIA}{2Rr\ell}.$$

最大値の近傍では,  $V_{\text{ind}}$  は時間の二次関数であることが, 厳密な式を展開することで証明される.

ソレノイドの中心がループの中心に近い場合, つまり  $|t| \ll \ell/(2v)$  では磁束はほとんど変化しないので  $V_{\text{ind}} \approx 0$  となる. 注意深く厳密な式を確認すると非常に弱い時間が時間に対して線型であることが示される.

以上をまとめて以下の表を得る.

時間領域	$V_{\text{ind}}(t)$	$J(t)$
$t \ll -\ell/(2v)$	小さい, $\propto -1/t^4$	$\approx \mathcal{E}/R$
$t \approx -\ell/(2v)$	大きい, $\propto -\left(t + \frac{\ell}{2v}\right)^2$	$J_{\text{min}}$ , 谷
$ t  \ll \ell/(2v)$	無視しうる ( $\propto t$ )	$\approx \mathcal{E}/R$
$t \approx \ell/(2v)$	大きい, $\propto \left(t - \frac{\ell}{2v}\right)^2$	$J_{\text{max}}$ , 山
$t \gg \ell/(2v)$	小さい, $\propto 1/t^4$	$\approx \mathcal{E}/R$

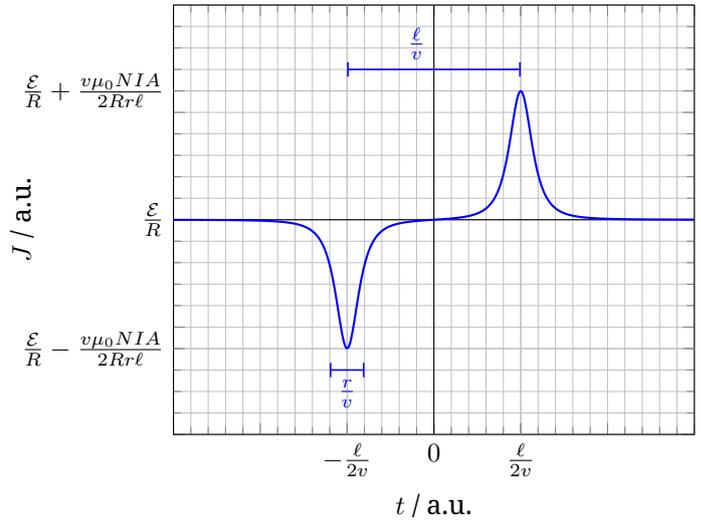


Figure 1: Qualitative graph of  $J$  as a function of time for  $\ell = 5r$ .

Grading scheme: T1 part b.	
$J(t)$ を $V_{\text{ind}}$ もしくは他の適切な量に関連付ける (part a. の結果に依らない)	0.5 p
$J(t)$ のグラフが全ての $t$ において滑らか (グラフが漸近的なものも認めて全領域において描かれていない場合は0 p)	0.5 p
$t \approx \pm\ell/(2v)$ を除いて $J(t) \approx \mathcal{E}/R$ (単に漸近的に $J(t) \approx \mathcal{E}/R$ とした場合は0.2 p)	0.5 p
$J(t) - \mathcal{E}/R$ が明確に奇関数である ( $J$ についての解析的な表式を計算すれば奇関数として振舞うことが確認できるのであれば十分であるが, その理由が誤っている場合は0.2 p)	0.5 p
$J(t)$ はまず最小値を取り, その $\ell/v$ だけ後に最大値を取る (順序が逆であるか, この時間が誤っている場合は0 p)	1.0 p
$J_{\text{min}}$ および $J_{\text{max}}$ についての表式 (近似式でも厳密なものでも良い) もし $J(t)$ の解析的な表式を与えているが最小値, 最大値を計算していない場合は0.5p が, その式の微分を計算すれば最小値, 最大値が厳密に求まることから与えられる.	1.0 p
山と谷の横幅は $r/v$ 程度である	0.5 p
$J(t)$ ではなく $J(z)$ がプロットされている, もしくは軸上のラベルが欠けている場合には0.5 p が減点される. ただし減点されるのはグラフに対して0.5 p 以上の得点がついている場合に限る.	(-0.5 p)
<b>Total for part b.:</b>	<b>4.5 p</b>

グラフが描かれていない場合:  $J(t)$  と  $V_{\text{ind}}$  の関係に最大0.5 p, また  $J_{\text{min}}$  と  $J_{\text{max}}$  の関係に最大1.0 p ( $J(t)$  の表式のみ与えて最小値, 最大値について言及していない場合: 0.5 p) が与えられる.

ソレノイドの磁場はループ電流を横切る間一定であるとするもしくは磁束の断面積を  $A$  とした場合には最小値と最大値についての得点は0 p となる.

**T1の採点に関する追加の一般的なガイドライン:**

- 採点はここで挙げられた解法のいずれか一つに従うべきである. 解法が混在している場合には, 最も高い点数を得たものを得点とする.
- 採点は0.1 p 単位で行う.
- 誤記に起因する単純な数値に関する誤りは, 採点基準に明確な断りが無い限り, 0.1 p の減点となる.
- 次元が簡単に確認できる場合の次元に関する誤りは少なくとも50%の減点となる. より複雑な場合は減点が少なくなる場合もある.
- 誤りが引きずられることについては, それがかなり簡単なものであるか, 妥当性が容易に検証可能な誤った結果につながるかでない限り繰り返し減点されることはない.
- part a. において, 力が物理的に正しくない場合 (例: 結果として生じる力がゼロになる), または力が計算されていない場合には力の方向についての得点は与えられない.
- 力の計算において, ソレノイドに流れる電流  $I$  をループ内の電流として  $\mathcal{E}/R$  の代わりに使用した場合, またはその逆の場合には0.5 p が減点される.
- 磁場の  $z$  成分 (ソレノイドまたはループのどちらか一方からのもの) のみが計算され, ソレノイドにかかる力がローレンツ力を用いて導出されている場合には, アイデア (最大1.0 p) とビオ-サバルの法則の使用 (最大1.0 p) のみに点数が与えられる.

**T2: Mechanical accelerator**

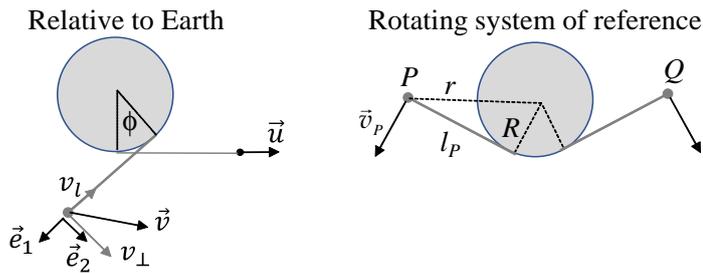


Figure 2: Mechanical accelerator

**解答例 I. Part 1:** 糸が円筒に接触している時. おもり  $P$  の速度は糸に沿った縦成分  $v_l$  と糸に垂直な成分  $v_{\perp}$  とに分解できる:

$$\vec{v} = v_l \vec{e}_1 + v_{\perp} \vec{e}_2$$

ここで  $\vec{e}_1$  と  $\vec{e}_2$  はそれぞれ糸に平行および垂直な単位ベクトルである (Fig. 2を参照せよ). 糸が伸び縮みしないことから, 縦成分は一定である:  $v_l = -u$ , 即ち

$$\vec{v} = -u \vec{e}_1 + v_{\perp} \vec{e}_2$$

よって, おもり  $P$  の加速度として下式を得る:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -u \frac{d\vec{e}_1}{dt} + v_{\perp} \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \frac{dv_{\perp}}{dt} \vec{e}_2$$

ベクトル  $\vec{e}_1$  および  $\vec{e}_2$  は剛体として回転する座標系を形成する. その回転の角速度は

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_3$$

ここで,  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  は運動の起こる平面に垂直な単位ベクトルである. つまり円筒軸に平行な単位ベクトルである. また,  $\phi$  は  $X$  軸と糸の成す角である (Fig. 2を参照せよ). よって, 基底ベクトルの時間微分は以下ようになる:

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_1 = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_2$$

および

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_2 = -\frac{d\phi}{dt} \vec{e}_1$$

よって,  $P$  の加速度は角速度を用いて以下のように表せる:

$$\vec{a} = -v_{\perp} \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_1 + \left( -u \frac{d\phi}{dt} + \frac{dv_{\perp}}{dt} \right) \vec{e}_2$$

ここで  $P$  に働く力は糸の張力のみであることに注目する. 糸と垂直な方向の加速度成分は0となる, 即ち  $\vec{e}_2$  の係数は0となるので下式を得る:

$$-u \frac{d\phi}{dt} + \frac{dv_{\perp}}{dt} = 0$$

これを時間について積分すると,  $P$  の持つ速度の横成分と糸の回転角との関係式を得る:

$$v_{\perp} = u\phi$$

糸が完全に円筒から外れるまでに糸の端は  $2\pi N$  だけ回転する. よって,  $P$  の速度の横方向成分は糸が外れる瞬間に以下の値を持っている:

$$v_{\perp} = 2\pi N u$$

よって, この時の速さの値は

$$v = \sqrt{v_l^2 + v_{\perp}^2} = u \sqrt{(2\pi N)^2 + 1}$$

**Part 2:** 糸が円筒から外れる時.

しかし, 上式は  $P$  の得る最大の速さを表していない. 糸が円筒から外れた後, 糸の自由端から見た系ではおもりは糸の自由端を中心に回転し続ける.  $P$  の静止系での速さは糸が  $X$  軸と垂直になった時, つまり  $P$  の横速度の方向が  $\vec{u}$  と一致した時に最大となる:

$$v_{\text{max}} = u(2\pi N + 1)$$

**解答例 II. Part 1:** 糸が円筒に接触している時.

糸の引っ張られる側の端点  $Q$  は円柱に接触している初期状態においておもり  $P$  と重なっている. 円柱の中心の周りを角速度  $\omega = u/R$  で回転する基準系における糸の運動を考える. この基準系では糸の円柱に接している部分は静止しており, 点  $Q$  は円柱の周りを角速度  $\omega_Q = -\omega$  で回転している (図を参照せよ).

糸の中間部は静止しているので, おもり  $P$  のエネルギーは保存されている. 同じ理由で,  $P$  の速度  $v_P$  は糸に垂直である. 従って, 回転する基準系から見た時, おもりの得た運動エネルギーは遠心力ポテンシャルエネルギーの損失分に等しい:

$$\frac{1}{2} m v_P^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 l_P^2$$

ここで、 $l_P$  は、おもり  $P$  の側の糸のほどけた部分の長さである (図を参照せよ)。従って、おもり  $P$  は糸と円柱との接点の周りを以下の速さで運動する:

$$v_P = \frac{u}{R} l_P$$

また、この時の角速度は一定で以下の値を取る:

$$\omega_P = \frac{u}{R} = \omega.$$

$\omega_P = -\omega_Q$  となるため、回転する基準系では糸の両端が対称的にほどけて、どの瞬間においても糸の両端の直線部分の長さが等しくなっている。そのため、糸が円筒から離れる瞬間において、下式が成立する:

$$l_P = \frac{1}{2}(2\pi RN) = \pi NR$$

また、この時の  $P$  の速さは

$$v_P = \pi Nu$$

$P$  の速度を静止系のものに変換する時、 $\vec{v}_P$  に回転速度  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  を加える必要がある。横方向成分については容易に下式を得る:

$$v_{\perp} = 2v_P = 2\pi Nu$$

Part 2: 糸が円筒から外れる時.

解答例 I と同様にして最大の速さの値を得る.

**解答例 III. Part 1:** 糸が円筒に接触している時.

解答例 I のように、速度を縦成分と横成分とに分解する。すると、解答例 I と同様に速度の縦成分について  $v_l = -u$  という結果を得る。その後  $P$  の加速度の表式を導出するが、この解答例では加速度の縦方向 (中心方向) の成分を考えていく:

$$a_l = -v_{\perp}^2/l \equiv -v_{\perp} \frac{d\phi}{dt}$$

ニュートンの第二法則より、糸の張力  $F$  について次が成り立つ:

$$F = -mv_{\perp} \frac{d\phi}{dt}$$

おもりの運動エネルギーの変化率は張力の仕事率に等しい:

$$\frac{dE_k}{dt} = Fv_l = +mv_{\perp} \frac{d\phi}{dt} u$$

また、下式を考慮する:

$$E_k = \frac{1}{2}m(u^2 + v_{\perp}^2)$$

この式を一度微分することで次の式を得る:  $mv_{\perp} dv_{\perp}/dt = mv_{\perp} d\phi/dtu$ , 即ち:

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = u \frac{d\phi}{dt}$$

これ以降は解答例 I と同様にして最大の速さの値を得る.

採点基準: T2 part 1, 解答例 I	
$\vec{v}$ を $v_l$ と $v_{\perp}$ に分解	1.0 p
伸び縮みしないことから $v_l = -u$	1.0 p
$d\phi/dt$ を用いた加速度の成分ごとの表式	2.0 p
張力が糸に沿っていることおよび $a_{\perp} = 0$	1.0 p
$dv_{\perp}/dt = u \cdot d\phi/dt$ の導出	1.0 p
糸が離れる瞬間の $v_{\perp} = 2\pi Nu$	1.0 p
最終的な速さ $v = u\sqrt{1 + (2\pi N)^2}$	1.0 p
<b>Total for part 1:</b>	<b>8.0 p</b>

採点基準: T2 part 1, 解答例 II	
角速度 $\omega = u/R$ で回転する基準系の導入	0.5 p
糸の巻き付いている部分が静止していることへの言及	0.5 p
$P$ のエネルギーが保存していることを示す	1.0 p
遠心力によってポテンシャルエネルギー $E_P = -m\omega^2 r^2/2$ を持っていることを示す	1.0 p
エネルギー保存則についての立式	1.0 p
$l_P = l_Q$ の証明	0.5 p
糸が離れる瞬間の $l_P = \pi NR$	0.5 p
糸が離れる瞬間の $v_P = \pi Nu$	1.0 p
点 $P$ における、静止系から見た回転する基準系の回転速度 $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	0.5 p
$v_{rot\perp} = \pi Nu$	0.5 p
静止系に対する最終的な速度の横方向成分 $v_{\perp} = 2\pi Nu$	1 p
<b>Total for part 1:</b>	<b>8.0 p</b>

採点基準: T2 part 1, 解答例 III	
$\vec{v}$ を $v_l$ と $v_{\perp}$ に分解	1.0 p
伸び縮みしないことから $v_l = -u$	1.0 p
$v_{\perp} = l d\phi/dt$ の導出	0.5 p
加速度の縦方向成分について $a_l = v_{\perp}^2/l$	0.5 p
ニュートンの第二法則より $F = ma_l$	0.5 p
運動エネルギーについて $E_k = m(u^2 + v_{\perp}^2)/2$	0.5 p
運動エネルギーと力の関係式 $dE_k/dt = Fv_l$	1.0 p
$dv_{\perp}/dt = u d\phi/dt$ の導出	1.0 p
糸が離れる瞬間の $v_{\perp} = 2\pi Nu$	1.0 p
最終的な速さ $v = u\sqrt{1 + (2\pi N)^2}$	1.0 p
<b>Total for part 1:</b>	<b>8.0 p</b>

採点基準: T2 part 2, 全ての解答例	
最大の速さを得る時のおもりの位置	1.0 p
$v_{max}$ の値	1.0 p
<b>Total for part 2</b>	<b>2.0 p</b>

### T3: Cat eyes

レンズの写真あるいはグラフを見ると、明るさの違う4つの領域がある。最も明るいのはランプの (スクリーン上の) 「ぼけ像 (blur spot)」 のレンズによる拡大像である。(ランプの像が) ぼけ像となるのは、レンズとスクリーンの距離が焦点距離よりわずかに大きいからである: グラフからぼけ像の明るさはほぼ一定 ( $\log_{10} I = 4.4$ ) であり、ランプからレンズに入射する光はぼけ像に均等に分布するとしてよいことが分かる。ぼけ像の縁がシャープでないのは、(明るい円板である) ぼけ像のレンズによる実像はレンズとカメラの間の位置にできるが (末尾の図参照)、写真から分かるようにカメラはレンズにピントを合わせているからである。このため、ぼけ像の拡大像は  $\log_{10} I$  が 3.4 から 4.4 まで変化するぼやけた縁をもつ。

$\log_{10} I = 3.4$  の2番目に明るい領域は最も明るい領域からの散乱光を表す: この領域ではレンズを通してスクリーン上のぼけ像の隣の領域を見ていて、理想的にはそこは (レンズの影なので) レンズの影となっていない領域より暗いはずである。しかし、レンズは理想的ではなく、ランプやぼけ像からの光が散乱されて、見かけ上、明るくなっている。ぼけ像 (の像) では、散乱光は無視できるが、(暗い) スクリーンの像ではむしろ散乱光が明るさを決めている。最も明

るい領域の本来の明るさは見かけの明るさ ( $10^{4.4}$ ) から散乱光の寄与 ( $10^{3.4}$ ) を差し引いたものである。

最も暗い領域 ( $\log_{10} I < 1.75$ ) はレンズ側面内側の、光を吸収する塗装がされた部分であり、 $x > 420$  の  $\log_{10} I = 1.95$  の領域がランプに照らされたスクリーン (のレンズの影になっていない部分) である。下のように、最も明るい領域と  $x > 420$  の領域を使ってレンズとスクリーンの距離  $d_0$  が得られる。

問題に与えられた数値から、 $L \gg f$  である。レンズの写真から、 $d_0$  が  $f$  と同程度であることが明らかである。したがって、レンズの位置の照度 (単位面積当たりの入射フラックス, *illuminance*)  $E$  はスクリーンと同じとみなせる。光を散乱する表面からの、単位面積、単位立体角あたりの光束を輝度 (*luminance*)  $\mathcal{L}$  と呼ぶ。レンズに入る散乱光の方向はスクリーンにほぼ垂直で、広がり角は小角なので、スクリーンの輝度 (*luminance*) は方向によらないとみなせる。また、カメラのセンサー上の光の強度  $I$  (照度, 単位面積あたりの光束  $\Phi$ ) は  $\mathcal{L}$  に比例する (**Explanation 1** 参照)。

スクリーン上のランプのボケ像の面積とレンズの面積の比を  $k$  とすると、スクリーンにおけるボケ像の輝度  $\mathcal{L}_{BS}$  は、スクリーンの明るさ  $\mathcal{L}_s$  の  $1/k$  である: レンズに入射する光はすべてボケ像に「圧縮される」。

広がり角が小角であることから、ボケ像のレンズによる像の輝度  $\mathcal{L}_I$  はボケ像の輝度  $\mathcal{L}_{BS}$  と同じである (**Explanation 2** 参照)。したがって、カメラのセンサー上で最も明るい部分の光の強度  $I_I$  は、(レンズの影になっていない) スクリーンに対する光の強度  $I_s$  と  $I_I = I_s/k$  の関係がある。グラフから  $k$  が読み取れるから、 $d_0$  の値が分かる。

ボケ像のレンズによる像とレンズの距離を  $d_s$  とすると Newton のレンズの公式  $(d_s - f)(d_0 - f) = f^2$  が成り立つ。よって、

$$d_s = f + \frac{f^2}{d_0 - f} = \frac{d_0 f}{d_0 - f}$$

$d_0 - f \ll f$  と仮定しよう。  $s$  をレンズの焦点面とランプの光が集まる点との距離とすると、スクリーン上のボケ像の大きさは、

$$D_{BS} = \frac{D(d_0 - f - s)}{f + s} \approx \frac{D(d_0 - f - s)}{f}$$

であり、ボケ像のレンズによる像の大きさは

$$D_I = \frac{D_{BS} d_s}{d_0} = \frac{D_{BS} f}{d_0 - f}$$

である。Newton のレンズの公式から、 $s = f^2/(L - f - d_0) \approx f^2/L$  なので、

$$D_{BS} \approx D \left( \frac{d_0 - f}{f} - \frac{f}{L} \right)$$

したがって、

$$D_I \approx D \left[ 1 - \frac{f^2}{L(d_0 - f)} \right]$$

であり、 $d_0 - f = \frac{d_0 f}{d_s} \approx \frac{f^2}{d_s}$  に注意すると、次を得る。

$$D_I \approx D \left( 1 - \frac{d_s}{L} \right) = \frac{D(L - d_s)}{L}$$

これは、カメラの位置から見たボケ像のなす角  $\theta_{BS} = D_I/(L - d_s)$  はレンズのなす角  $\theta_L = D/L$  と同じことを意味する。このことは写真からも確かめられる。

このことは次の2つの理由で重要である: ボケ像の写真によって、 $d_0$  (したがって、 $d_s$ ) を求めることはできないが、一方で、レンズの中心とボケ像の像の中心との (カメラから見た) 角  $\theta$  は写真から求めることができる。また、これらの角が等しいことは、図から、幾何学的に分かる。カメラから出発してボケ像の縁を通る青線  $SAG$  と  $SBF$  を考えると、 $F$  の像  $J$  はレンズの中心を通る光線  $FO$  と  $SBF$  の交点であり、 $G$  の像  $H$  も同様である。また、 $h$  は ( $L$  に比べて) 小さいから、ランプ  $S$  から見てもカメラ  $C$  から見ても角はほとんど同じである。

どちらの像も円として、面積比  $k$  は  $(D_{BS}/D)^2$  に等しい、すなわち、

$$\pm\sqrt{k} = \frac{1}{f} \left( d_0 - \frac{Lf}{L-f} \right) = \frac{d_0}{f} - \frac{L}{L-f}$$

上式で、複号  $\pm$  はスクリーンがランプの像の後ろにあるか前にあるかに対応する。最も明るい領域と  $x > 420$  とを比べて、明るさの比  $10^{4.4-1.95} \approx 282$  が  $1/k$  に等しい。よって、 $d_0/f$  は  $\pm\sqrt{k} + 1 + f/L$  から  $d_0/f \approx 1.07$  または  $d_0/f \approx 0.95$  と求まるが、 $d_0$  は  $f$  より大なので、 $d_0/f \approx 1.07$ 、したがって  $d_s \approx 15.03f \approx 83 \text{ cm}$  となる。この解は、初めの仮定、 $d_0 - f \ll f$  を満たしている。

ボケ像のレンズによる像の面の上で、ボケ像の中心が、その面とカメラからレンズ中央に向かう線との交点と距離  $h'$  にあるとすると、 $h' = h \frac{d_s}{L}$  の関係がある (三角形  $OQP$  と  $OCS$  は相似)。  $\theta = h'/(L - d_s)$ 、 $\theta_L = D/L$  だから、

$$\frac{\theta}{\theta_L} = \frac{hd_s}{D(L - d_s)}$$

左辺の比はレンズの径と三日月状の2番目に明るい領域との大きさの比として写真から分かる (訳注: 図面は写真に比べてこの比がかなり小さい場合である)。よって

$$h = \frac{d_{cr}}{D'} \frac{D(L - d_s)}{d_s}$$

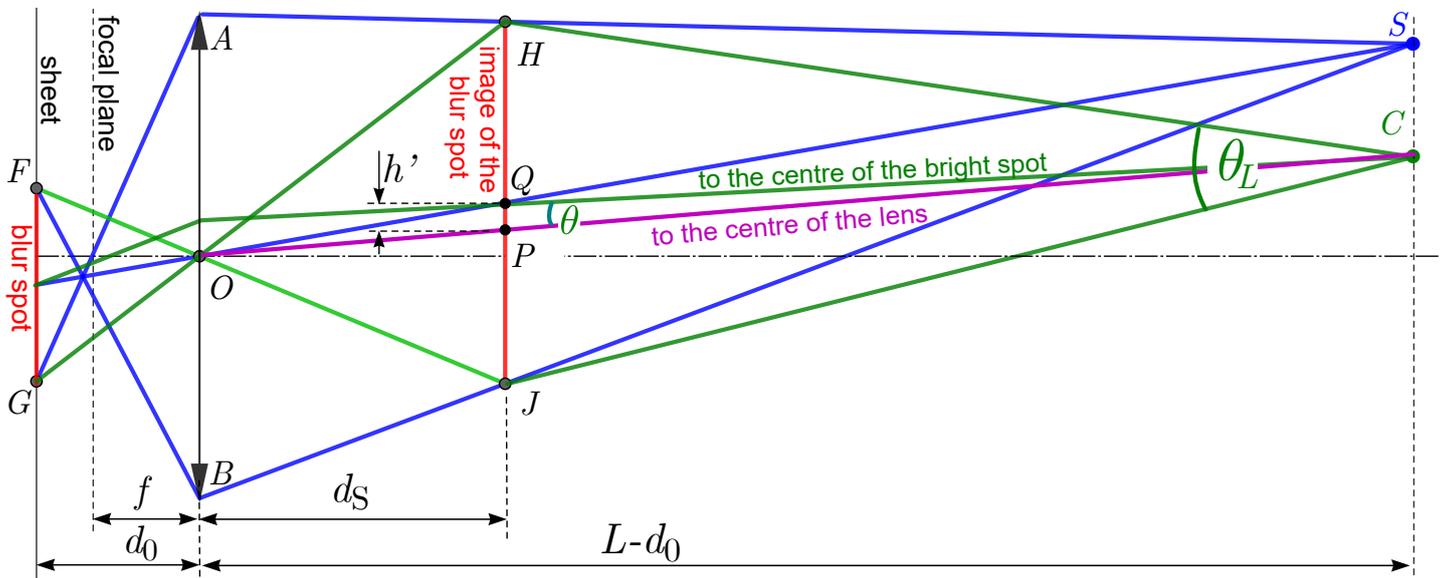
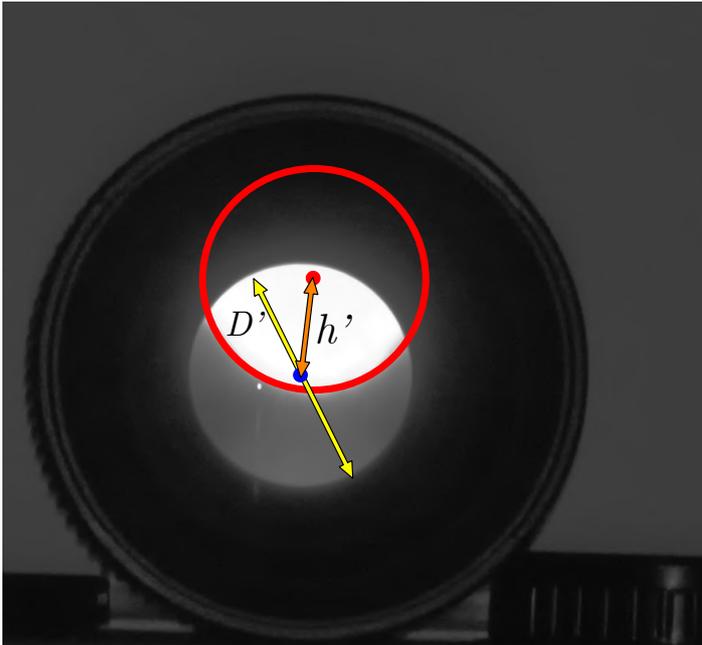
グラフから、三日月状の領域は  $x \approx 30 \text{ px}$  からぼやけた境界の中点  $x \approx 120 \text{ px}$  までの  $d_{cr} \approx 90$  ピクセルであり、レンズは  $x \approx 30 \text{ px}$  から、右端  $x \approx 240 \text{ px}$  までの  $D' = 210 \text{ px}$  である。したがって  $h \approx 8 \text{ cm}$  となる (訳注: 英文の解答では  $80 \text{ mm}$  となっているが有効数字は1桁)。

**Remark 1.** 適切な精度で最終的な答えを得るのに、レンズとぼけ像の見かけの大きさが等しいことを示す必要は厳密にはない。ぼけ像を円として、その中心とレンズの中心との間隔  $h'$  を求めればよい (小さい方の図参照)。

**Remark 2.** 必要な精度で三日月状の領域の大きさを得るには写真からでもよい。しかし、グラフからの方がより正確である。

**Explanation 1:** カメラから遠くの、距離  $\uparrow$  にある輝度  $\mathcal{L}$  の光源を考えよう。カメラの位置での照度 (単位面積あたりの光束) は  $\uparrow^{-2}$  に比例する。一方、すべての光はセンサー上の面積  $S'$  の集まる。この面積も  $\uparrow^{-2}$  に比例する。したがって、センサー上のピクセルの照度 (*illuminance*)  $I$  は  $\uparrow$  に依存しない。

**Explanation 2:** ぼけ像の微小面積  $S$  から出る、スクリーンにほぼ垂直な、立体角  $\omega$  の細い光を考えよう。光束  $\Phi$  をもつとする。この光は  $d_0$  の距離にあるレンズを通してレンズから  $d_s$  の位置に実像をつくるが、実像の面積は  $S' = S(d_s/d_0)^2$  である。幾何学的に、実像から出るときの立体角  $\omega'$  は  $\omega/\omega' = (d_s/d_0)^2$  を満たすから、実像の輝度は  $\mathcal{L}_I = \Phi/(S'\omega') = \Phi/(S\omega)$  で与えられ、ぼけ像の輝度と同じである。



**Remark 3: Explanation 1 と Explanation 2** を踏まえ、 $d_0$  が得られたとすると、幾何光学によってレンズによるカメラの像を考えて解くこともできる。(訳注: カメラの位置に点光源を置いたとすると、レンズによりスクリーン上にできるその像は右側の写真のレンズの部分にあたり、ランプのぼけ像と同じ大きさの円で、中心が  $h$  に比例した距離だけずれている。比例関係に着目すれば  $h$  を得る。) 最も暗いリングで囲まれた領域はカメラがレンズを通して見たスクリーンである。これは直径  $d$  の円とみなせる ( $d$  はグラフから読んだ  $D'$  と同じ)。ランプとカメラはレンズから同じ距離にあり、スクリーン上のぼけ像の大きさも直径  $d$

から、 $d = D\sqrt{k}$  である。レンズの中心から見てランプとカメラは角  $h/(L-d_0)$  をなす。したがって、これらの中心の間隔、あるいは  $d_{cr}$  と表された縁の間隔は、 $d_0 h/(L-d_0)$  である。これから、前に得たのと同じ式を得る:

$$\frac{d_0 h/(L-d_0)}{D\sqrt{k}} = \frac{d_{cr}}{D'} \Leftrightarrow h = \frac{d_{cr}}{D'} D\sqrt{k} \frac{L-d_0}{d_0} \approx 8 \text{ cm.}$$

もとの解析と比べて、( $d_0$  と  $d_S$  を求める際の)  $f/L$  による誤差の影響は大きく減る (20% から約 1% に)。  $d_0 \approx f$  としても結果は約 7% ずれるだけである。

<b>Grading scheme: T3</b>	
最も明るいのはぼけ像のレンズによる拡大像であるの理解 (陽に述べる, 図で示す, あるいは正しく解く過程で暗黙に仮定)。そうでないときは, 最も明るい像がぼけ像に対応することの理解に 1.0p, 最も明るい像がぼけ像に対応し, カメラに達する前に2度レンズを通過していることの理解に 2.0p.	2.5 p
グラフの $x > 420$ がレンズの影になっていないスクリーンであることへの理解に 0.2p. $1/k$ をグラフから読むことに 0.8p. $\log_{10}(I_1/I_2)$ の数値の読み取りの誤りが, 0.05以上0.1より小のとき 0.2p 減点, 0.1より大のとき 0.4p 減点。	1.0 p
$k$ を距離の比 ( $d_0/f$ , $d_S/f$ , または同等のもの) として正しく表していること。式は正しいが比の値が正しくない場合は部分点 2p: 2p の配分は, $I_1/I_2$ がぼけ像とレンズの影になっていないスクリーンの光度の比であることを示すことに 0.5p, (薄い) レンズの式, $k$ を直径の比で表すこと, 直径と対応する距離の比の対応, にそれぞれ 0.4p, 0.3p, 0.3p.	2.5 p
グラフまたは写真から読める距離の比を正しく $h$ と関係づけること。はじめの式が正しいが距離の比が正しく求まっていないときは部分点 1.5p. これらの配分: ぼけ像とぼけ像の実像についてのレンズの式 (別の考え方では, カメラとその像についてのレンズの式 (訳注 Remark 3 参照)) に 0.3p, $\theta_{BS} = \theta_L$ を示すことに 0.4p, $h$ を他の距離と関係づける意味のある式に 0.4p, 測れる距離の比を系の他の距離と関係づける意味のある式に 0.4p. はじめの式は正しくないが, 図から測れる距離を他の関係する距離とともに正しく図示しているときには部分点 1.0p.	2.0 p
適切な精度で距離を測れていること (ただし, それまでの点が 0 でないときのみ)。誤りが 20% から 30% のとき部分点 0.5p, 10% から 20% のとき 0.8p.	1.0 p
適切な精度で最終的な解答を得ていること。最終的な式を得ているが, 数値を得ていないとき部分点 0.5p. 計算ミスは 0.5p 減点, 10% 以上結果を丸めたときは 0.2p 減点。	1.0 p