



## ゼロ長ばねとスリンキーコイル - 解答

## Part A: 静力学 (3.0 points)

A.1  $F \leq kL_0$  のとき、ばねの全長は変わらないので、 $\Delta y = \Delta \ell$ .  $F > kL_0$  のとき、ばねの全長は  $F/k$  に変化する. ばねの伸びは一樣であるから、

$$\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \frac{F/k}{L_0} \Rightarrow \Delta y = \frac{F}{kL_0} \Delta \ell. \quad (1)$$

A.1

0.5pts

$$\Delta y = \frac{F}{kL_0} \Delta \ell \quad (F > kL_0), \Delta \ell \quad (F \leq kL_0).$$

A.2 前問より  $F = k \frac{L_0}{\Delta \ell} \Delta y$ . よって任意の長さ  $\Delta \ell$  のばねの一部は、ばね定数

$$k' = k \frac{L_0}{\Delta \ell} \quad (2)$$

の ZLS とみなすことができる. よって、

$$\Delta W = \frac{1}{2} k' (\Delta y^2 - \Delta \ell^2) = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} (\Delta y^2 - \Delta \ell^2). \quad (3)$$

A.2

0.5pts

$$\Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta \ell} (\Delta y^2 - \Delta \ell^2).$$

A.3 伸びていない状態のばねにおいて下端から  $\ell$  から  $\ell + d\ell$  の位置にあったばねの微小部分にかかる力の釣り合いを考える. この部分より下にあるばねによる重力の大きさは  $\frac{\ell}{L_0} Mg$ . これがばねの張力と等しいとき釣り合う.

この重力が、ばねを伸ばすのに必要な最小の力  $kL_0$  に満たないような  $\ell$  では、微小部分は伸びない. このような  $\ell$  の最大値を  $\ell_0$  とおくと、

$$\frac{\ell_0}{L_0} Mg = kL_0 \Rightarrow \ell_0 = \frac{kL_0^2}{Mg} = \alpha L_0. \quad (4)$$

$\ell > \alpha L_0$  において、微小部分が伸びて平衡状態になった後の長さを  $dy$  とおくと

$$dy = \frac{\frac{\ell}{L_0} Mg}{kL_0} d\ell = \frac{\ell}{\alpha L_0} d\ell. \quad (5)$$

よって、

$$H = \alpha L_0 + \int_{\alpha L_0}^{L_0} \frac{\ell}{\alpha L_0} d\ell = \alpha L_0 + \frac{L_0^2 - (\alpha L_0)^2}{2\alpha L_0} = \frac{L_0}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (6)$$

A.3

2.5pts

$$H = \frac{L_0}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right).$$



## Part B: 動力学 (5.5 points)

B.1 問題 B.2 の記法を用いる．ばねの part I が受ける力は，自重  $\frac{L_0 - \ell}{L_0} Mg$  と，part II から受けるばねの張力（境界の少し下では A3 の釣りが成り立っているため，これは part II のばねの重さに等しい） $\frac{\ell}{L_0} Mg$  の和であるから， $\ell$  によらず  $Mg$  である．part II は静止しているから重力と張力の和は 0．よって，ばね全体の重心の運動方程式を考えると，ばねの重心は等加速度  $g$  で落下していることがわかる．

ばねが手放された瞬間のばねの重心の下端からの距離を  $H_{cm}$  とおく．伸びる前に下端から  $\ell$  にあったばねの微小部分の，伸びて平衡状態にある時の下端からの距離を  $H(\ell)$  とおくと，A.3 より

$$H(\ell) = \ell_0 + \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell_0} = \frac{\ell^2}{2\ell_0} + \frac{\ell_0}{2} \quad (\ell > \ell_0), \quad \ell \quad (\ell < \ell_0) \quad (7)$$

よって，

$$H_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^{L_0} H(\ell) M \frac{d\ell}{L_0} \quad (8)$$

$$= \int_0^{\ell_0} \frac{\ell}{L_0} d\ell + \int_{\ell_0}^{L_0} \frac{1}{L_0} \left( \frac{\ell^2}{2\ell_0} + \frac{\ell_0}{2} \right) d\ell \quad (9)$$

$$= \frac{\ell_0^2}{2L_0} + \frac{1}{L_0} \left[ \frac{L_0^3 - \ell_0^3}{6\ell_0} + \frac{\ell_0}{2}(L_0 - \ell_0) \right] \quad (10)$$

$$= L_0 \left( \frac{1}{6\alpha} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{6} \right). \quad (11)$$

ばねが縮み切ったとき，ばねの重心は下端から  $L_0/2$  の位置にある．よって，

$$\frac{1}{2}gt_c^2 = H_{cm} - \frac{L_0}{2} = L_0 \left( \frac{1}{6\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{6} \right) = \frac{L_0}{6\alpha}(1 - \alpha)^3 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha}(1 - \alpha)^3}. \quad (12)$$

$k = 1.02 \text{ N/m}$ ,  $L_0 = 0.055 \text{ m}$ ,  $M = 0.201 \text{ kg}$ ,  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$  を代入すると， $\alpha = 0.0285$ ，よって  $t_c = 0.245 \text{ s}$ ．

B.1

2.5pts

$$t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha}(1 - \alpha)^3} = 0.245 \text{ s}$$

B.2 この瞬間の境界の位置は下端から  $H(\ell) = \frac{\ell^2}{2\ell_0} + \frac{\ell_0}{2}$ ．この点より上にあるばねの一部の，重心の下端からの距離が，手放される前  $H_1$  であり，問題で考えている瞬間  $H_2$  であると置く．

ばねの運動している部分は常に一定の力  $Mg$  を受けて運動している．よって落下が始まってからこの瞬間までに重力がばねにした仕事は  $Mg(H_1 - H_2)$ ．これが Part I の運動エネルギー  $\frac{1}{2}(M - m(\ell))v_I(\ell)^2$  に等しい．よって，

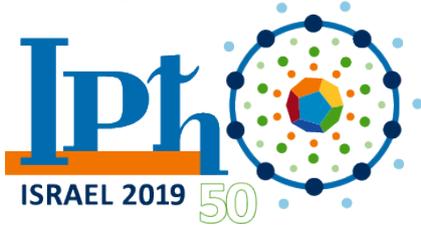
$$H_1 = \frac{1}{M - m(\ell)} \int_{\ell}^{L_0} H(\ell') M \frac{d\ell'}{L_0} = \frac{1}{L_0 - \ell} \int_{\ell}^{L_0} \left( \frac{\ell'^2}{2\ell_0} + \frac{\ell_0}{2} \right) d\ell' = \frac{L_0^2 + L_0\ell + \ell^2}{6\ell_0} + \frac{\ell_0}{2}. \quad (13)$$

$$H_2 = H(\ell) + \frac{L_0 - \ell}{2} = \frac{\ell^2}{2\ell_0} + \frac{\ell_0}{2} + \frac{L_0 - \ell}{2}. \quad (14)$$

以上より，

$$\frac{1}{2}M \frac{L_0 - \ell}{L_0} v_I(\ell)^2 = Mg(H_1 - H_2) \quad (15)$$

$$= Mg \left( \frac{L_0^2 + L_0\ell - 2\ell^2}{6\ell_0} - \frac{L_0 - \ell}{2} \right) \quad (16)$$



$$= Mg \frac{(L_0 - \ell)(L_0 - 3\ell_0 + 2\ell)}{6\ell_0} \quad (17)$$

$$\Rightarrow v_I(\ell)^2 = g \frac{L_0(L_0 - 3\ell_0 + 2\ell)}{3\ell_0} = \frac{2g}{3\alpha} \ell + \left( \frac{1}{3\alpha} - 1 \right) gL_0. \quad (18)$$

B.2

2.5pts

$$A = \frac{2g}{3\alpha}, B = \left( \frac{1}{3\alpha} - 1 \right) gL_0$$

次のことに注意しよう。 $\ell = L_0$  で  $v_{upper-f}^2 = L_0 g \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ,  $\ell = \ell_0 = \alpha L_0$  で  $v_{upper-f}^2 = L_0 g \frac{1-\alpha}{3\alpha}$  であり、ばねが放されたときの速度は 0 でない: 収縮時間  $t_c$  よりずっと短い時間でその速度になり、 $\ell = \ell_0$  のときには  $1/\sqrt{3}$  になる。

B.3 前問において  $A > 0$  より、 $v_I(\ell)$  は  $\ell = \ell_0$  となり  $v_I(\ell) = \sqrt{A\alpha L_0 + B}$  となるまで単調に減少する。 $\ell = \ell_0$  となった瞬間、Part I は伸びていない状態で静止している長さ  $\ell_0$  の Part II と衝突、運動量保存則より速度はさらに減少する。衝突の後には剛体として落下するため、速度は増加する。よってばねの移動している部分の最小の速さは、衝突の直後に達成され、その値は、運動量保存則より

$$v_{min} = \frac{(M - m(\ell_0))v(\ell_0)}{M} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}. \quad (19)$$

B.3

0.5pts

$$v_{min} = (1 - \alpha)\sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

### Part C: エネルギー論 (1.5 points)

C.1 問題 B.2 の議論より、ばねの位置エネルギーは完全に運動エネルギーに変換される。よって、エネルギーの損失  $Q$  は、手放される前に蓄えられていたばねの弾性エネルギーに等しい。

問題 A.2 より、伸びていない状態のばねにおいて下端から  $\ell$  から  $\ell + d\ell$  の位置にあったばねの微小部分に蓄えられていた弾性エネルギーを  $dQ$  とおくと、A.3 で示したように  $dy = \frac{\ell}{\ell_0} d\ell$  なので、

$$dQ = \frac{kL_0}{2} \left( \frac{\ell^2}{\ell_0^2} - 1 \right) d\ell. \quad (20)$$

よって、

$$Q = \int_{\ell_0}^{L_0} \frac{kL_0}{2} \left( \frac{\ell^2}{\ell_0^2} - 1 \right) d\ell \quad (21)$$

$$= \frac{kL_0}{2} \left( \frac{L_0^3 - \ell_0^3}{3\ell_0^2} - (L_0 - \ell_0) \right) \quad (22)$$

$$= \frac{\alpha MgL_0}{2} \left( \frac{1 - \alpha^3}{3\alpha^2} - (1 - \alpha) \right) \quad (23)$$

$$= MgL_0 \frac{(1 - \alpha)^2(2\alpha + 1)}{6\alpha}. \quad (24)$$

C.1

1.5pts

$$Q = MgL_0 \frac{(1 - \alpha)^2(2\alpha + 1)}{6\alpha}.$$





## 電子レンジの物理 – 解答

## Part A : マグネトロンの構造と動作 (6.6 points)

## A.1. (0.4 points)

LC回路の周波数は  $f = \omega/2\pi = 1/2\pi\sqrt{LC}$  と書ける。空洞のまわりを流れる電流の大きさを  $I$  とおくと、問題で与えられた仮定より、空洞に作られる磁束密度の大きさは、 $0.6\mu_0 I/h$  と計算され、磁束は  $\pi R^2 \times 0.6\mu_0 I/h$  である。よって共振器のインダクタンスは  $L = 0.6\pi\mu_0 R^2/h$  と求まる。題意のコンデンサーを平行板コンデンサーで近似すると、その電気容量は  $C = \epsilon_0 lh/d$  で与えられる。以上より、LC回路の周波数は

$$f_{est} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{0.6\pi R^2 \mu_0 \epsilon_0 l h}} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{d}{0.6\pi l}} = \frac{1}{2\pi} \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{1}{3.6\pi}} = 2.0 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

となる。

## A.2. (1.5 points)

電子の速度を  $\vec{u}(t)$  と表す。このとき電子にかかる力は

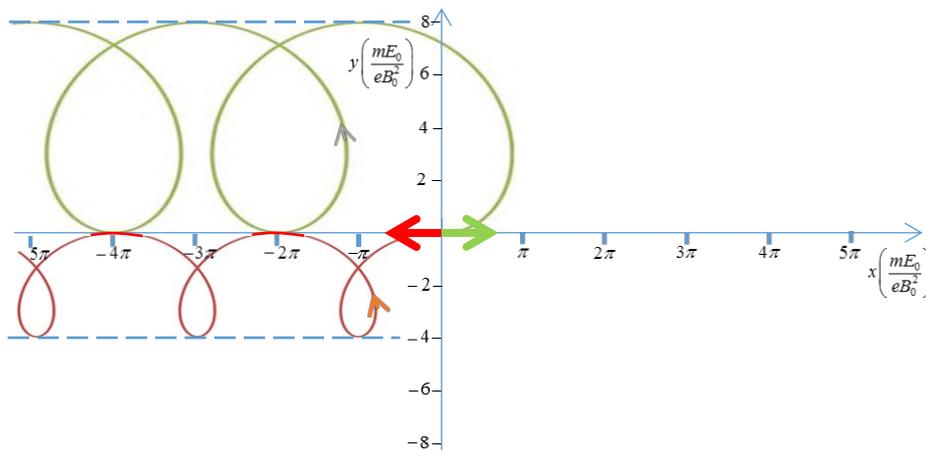
$$\vec{F} = -e(-E_0 \hat{y} + \vec{u}(t) \times B_0 \hat{z})$$

と書ける。ここで  $\vec{u}(t)$  を、直交する電磁場中で荷電粒子がドリフトする速度（電場による力と磁場による力がちょうど打ち消し合うような速度）  $\vec{u}_D = -E_0/B_0 \hat{x}$  を用いて  $\vec{u}(t) = \vec{u}_D + \vec{u}'(t)$  と表す。このとき  $\vec{F} = -e\vec{u}'(t) \times B_0 \hat{z}$  となる。このように、ドリフト速度  $\vec{u}_D$  で動く系から見ると、電子は一定の速さ  $u' = |\vec{u}'(t)|$  で半径  $r = mu'/eB_0$  の円軌道を描くことがわかる。実験室系ではこれにドリフト速度  $\vec{u}_D$  を加えればよいから、

1.  $t=0$ での電子の速度が  $\vec{u}(0) = 3E_0/B_0 \hat{x}$  である場合：  $u' = 4E_0/B_0$ ,  $r = 4mE_0/eB_0^2$

2.  $t=0$ での電子の速度が  $\vec{u}(0) = -3E_0/B_0 \hat{x}$  である場合：  $u' = 2E_0/B_0$ ,  $r = 2mE_0/eB_0^2$

円運動の周期が速さ  $u'$  に依存しないことと合わせて、電子の軌道はそれぞれ以下のように書ける（緑線は1. の場合を、赤線は2. の場合を表している）。





## A.3. (0.4 points)

電子の軌道が円形とみなせるような慣性系で見たとき、電子の速さは  $u'$  である。A.2. より  $u_D + u' = v_{\max}$ ,  $u_D - u' = v_{\min}$  なので、 $u' = (v_{\max} - v_{\min})/2 < v_{\max}$  が分かる。よってこの慣性系における電子の軌道半径について  $r = mu'/eB_0 < mv_{\max}/eB_0$  が成り立つ。速さの最大値は運動エネルギーの最大値  $K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 800 \text{ eV}$  によって決まるので、

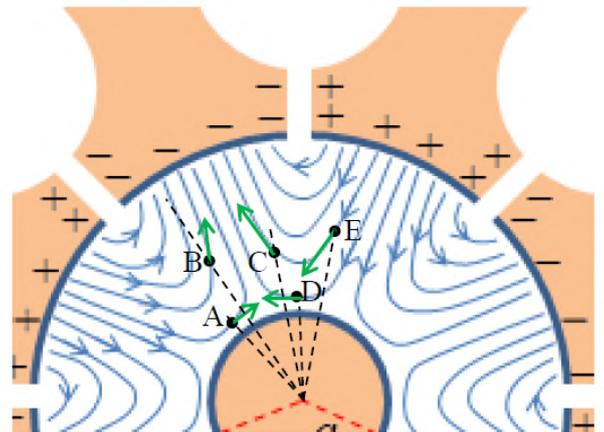
$$r < \frac{m}{eB_0} \sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{m}{eB_0} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{2mV}{e}} = \frac{1}{0.3} \sqrt{\frac{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 800}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 3.18 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ \approx 0.3 \text{ mm}$$

ここで得られた軌道半径の最大値は陰極－陽極間距離よりも十分小さいため、円運動を無視し、電子の運動をドリフトのみで近似することができる。

## A.4. (1.2 points)

前述の通り、電子の運動はドリフトのみで近似できる。A.2. で確かめたように、ドリフト  $\vec{u}_D$  は  $\vec{E} \times \vec{B}$  の方向に向かう。ドリフト速度のうち動径方向成分には電場の接線方向成分のみが寄与するが、静電場は接線成分を持たないので、考慮する必要があるのは交流電場のみである。図より、点A・Bにおいて交流電場成分は時計回り方向、点C・D・Eにおいて反時計回り方向となっているから、磁場が紙面手前方向にかかっていることと合わせて、ドリフトの方向は次の表のようになる。

点	陽極方向	陰極方向	動径方向と完全に垂直
A		X	
B		X	
C	X		
D	X		
E	X		





## A.5. (1.2 points)

本問では、ドリフト速度のうち接線方向成分のみを考えればよい。各点は全て陽極から等距離にあるので、感じる静電場は全て等しい。よって交流電場の動径方向成分のみが電子の位置ベクトルどうしのなす角の増減を決定づける。これが内向き（陰極方向）をならドリフト速度の接線方向成分は反時計回りに、外向き（陽極方向）なら時計回りになる。以上より、位置ベクトルどうしのなす角の増減は次の表のようになる。

点のペア	角度は減少する	角度は増加する	この条件だけでは決められない
AB	X		
BC	X		
CA	X		
DE		X	
EF		X	
DF		X	

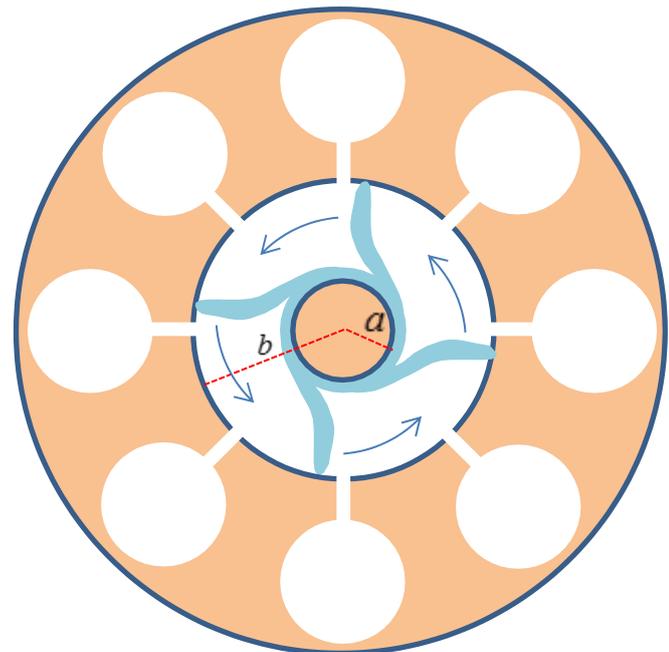
## A.6. (0.8 points)

スポークは電子が集中する場所にできる。前問より、下図のように4つのスポークができることがわかる。電子のドリフト運動により、その回転方向は反時計回りであることがわかる。

交流電場の周波数は  $f = 2.45\text{GHz}$  である。  
各スポークは、交流電場の向きが反転する半周期の間に、 $\pi/4$  回転して次の空洞に移る。  
よって各スポークの角速度は

$$\omega = \frac{\pi}{4} / \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} f = 3.85 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

となる。各スポークは交流電場4周期分の間にマグネトロンを1周する。





## A.7. (1.1 points)

陰極と陽極の間のちょうど中間の位置  $r = (b + a)/2$  における電場の大きさは、その地点での静電場の大きさ  $E = V_0/(b - a)$  に等しいから、ドリフト速度の接線方向成分は  $u_D = E/B_0 = V_0/[B_0(b - a)]$  と書ける。 $u_D/r$  が前問で求めた角速度と等しいことから、 $V_0 = \pi f B_0(b^2 - a^2)/4$  がわかる。

## Part B: マイクロ波と水分子の相互作用 (3.4 points)

## B.1. (0.5 points)

時刻  $t$  におけるトルクは  $\tau(t) = -qd \sin[\theta(t)] E(t) = -p_0 \sin[\theta(t)] E(t)$

と表される。よって電場から双極子に与えられる瞬間のエネルギーは

$$H_i(t) = \tau(t)\dot{\theta}(t) = -p_0 E(t) \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) = E(t) \frac{d}{dt} (p_0 \cos \theta(t)) = E(t) \frac{dp_x(t)}{dt}$$

である。

## B.2. (0.5 points)

双極子モーメント密度は電場に平行なので、単位時間あたりに吸収されるエネルギーの時間平均は

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle &= \langle \sin(\omega_f t) \frac{dP_x}{dt} \rangle = \langle E_0 \sin(\omega_f t) \frac{d}{dt} (\beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega_f t - \delta)) \rangle \\ &= E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \langle \sin(\omega_f t) \cos(\omega_f t - \delta) \rangle = 0.5 E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \langle \sin \delta + \sin(2\omega_f t - \delta) \rangle \\ &= 0.5 E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega_f \sin \delta \end{aligned}$$

## B.3. (1.1 points)

深さ  $z$  における電磁場のエネルギー密度は、その点での電場のエネルギー密度の2倍に等しいから、 $2 \times \epsilon_r \epsilon_0 \langle E^2(z, t) \rangle / 2 = \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) \langle \sin^2 \omega t \rangle = \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) / 2$  である。よって、深さ  $z$  におけるエネルギー流速密度の時間平均は

$$I(z) = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2(z) \times \frac{c}{n} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0} c E_0^2(z)$$

となる。ここで  $c$  は真空中での光速である。B.2. で計算したエネルギー損失を考えると、次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{1}{2} \beta \epsilon_0 \omega E_0^2(z) \sin \delta = -\frac{\beta \omega \sin \delta}{c \sqrt{\epsilon_r}} I(z)$$

これを解いて  $I(z) = I(0) \exp[-z \beta \omega \sin \delta / (c \sqrt{\epsilon_r})]$



## B.4. (0.6 points)

前問と同様に、エネルギー流速密度は

$$I(z) = \sqrt{\epsilon_r} \epsilon_0 c \langle E^2(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_r} \epsilon_0 c E_0^2 e^{-z\omega\sqrt{\epsilon_r} \tan \delta / c}$$

と求まる。B.3. の結果と比較して、 $\tan \delta \approx \sin \delta$  を利用すれば、 $\beta = \epsilon_r$  が分かる。

## B.5. (0.7 points)

1. 前問の結果から、エネルギー流速密度の値が  $z = 0$  における値の半分になるのは、

$$z_{1/2} = \frac{c \ln 2}{\omega \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta} = \frac{c \sqrt{\epsilon_r} \ln 2}{\omega \epsilon_l}$$

である。周波数と水の温度が分かっているので、グラフから読み取ると  $\epsilon_r \approx 78, \epsilon_l \approx 10$  が分かるから、 $z_{1/2} \approx 12 \text{ mm}$  となる。また、侵入長は  $\sqrt{\epsilon_r}/\epsilon_l$  に比例することがわかる。

2. 水の温度を増加させると、マイクロ波の周波数では  $\epsilon_l$  の減り具合が明らかに  $\sqrt{\epsilon_r}$  の減り具合よりも大きい。よって水の温度が増加すると、マイクロ波はより深くまで侵入して内側を温めることができる。

3. 反対に、スープを温めると、マイクロ波の周波数では  $\epsilon_l$  が増加する一方  $\epsilon_r$  は減少する。よって侵入長は短くなり、マイクロ波は奥まで侵入することはできない。

物質	温度が増加すると $z_{1/2}$ は増加する	$z_{1/2}$ は減少する	$z_{1/2}$ は変わらない
水	X		
スープ		X	





## 熱音響エンジン - 解答

## Part A: 閉じた管の中の音波 (3.7 points)

A.1 境界条件は  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  であるので、 $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$  となり、したがって  $\lambda_{max} = 2L$  を得る。

A.2 微小部分の体積は

$$V(x, t) = S\{\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)\} = S\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = V_0 + V_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

であるので、

$$V(x, t) = V_0 + akV_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad V_1(x) = akV_0 \cos kx$$

A.3 単位断面積あたりについての運動方程式より

$$\rho_0 \Delta x \cdot \ddot{u} = -\{p(x + \Delta x, t) - p(x, t)\} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \ddot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

であるので、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 a \omega^2 \sin kx \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad p(x, t) = p_0 - a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos kx \cos \omega t$$

より  $p_1(x) = a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos kx$  を得る。

A.4  $pV^\gamma = \text{const.}$  の両辺を  $t$  で微分し  $\alpha \ll L$  を用いて 2 次の微小項を落とすことで、

$$\frac{p_1}{p_0} = \gamma \frac{V_1}{V_0}$$

を得る。従って、

$$\frac{\rho_0 \omega^2}{p_0 k} = \gamma k \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

A.5 理想気体の状態方程式より、 $T(x, t)$  の変化率は  $p(x, t)$  と  $V(x, t)$  の変化率の和に等しいので

$$T_1(x) = T_0 \left( \frac{p_1}{p_0} - \frac{V_1}{V_0} \right) = (\gamma - 1) T_0 \frac{V_1}{V_0} = ak(\gamma - 1) T_0 \cos kx$$

A.6 管内の気体が動くことにより管と気体の境界で熱エネルギーがやり取りされる。今、この熱流の方向を定めるために A.5 の結果および A.1 で与えられた  $u(x, t)$  の定義式を用いる。この 2 式より、 $0 < x < \frac{L}{2}$  では変位  $u(x, t)$  が正の時に気体の温度が下がり、逆に  $\frac{L}{2} < x < L$  では変位  $u(x, t)$  が負の時に気体の温度が下がると分かるので、点 B の近くでは熱が気体に流れ込んで点 B の温度は下がり、点 A、点 C の近くでは熱が気体から放出されてそれぞれの温度は上がると考えられる。



## Part B: 外部熱源との接触による音波の増幅 (6.3 points)

B.1 考えている微小部分が接しているスタックの位置は  $x = x_0 + u(x_0, t)$  であるので、

$$T_{\text{env}}(t) = T_{\text{plate}}(x_0 + u(x_0, t)) = T_0 - \frac{\tau}{l}u(x_0, t) \quad \Rightarrow \quad T_{\text{st}} = \frac{\alpha\tau}{l} \sin kx_0 = \frac{\alpha\tau}{l\sqrt{2}}$$

B.2 気体が  $u(x_0, t) < 0$  の時接しているスタックよりも低温であり  $u(x_0, t) > 0$  の時接しているスタックよりも高温であるならば、この気体は高温熱源から低温熱源へと熱を運ぶ。これは

$$T < T_{\text{env}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{st}} > T_1$$

の時に起こるので、A.5 及び B.1 の結果を用いて、

$$\frac{\alpha\tau_{\text{cr}}}{l} \sin kx_0 = ak(\gamma - 1)T_0 \cos kx_0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{\text{cr}} = kl(\gamma - 1)T_0$$

B.3 熱力学第一法則より、

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt}$$

であるので、 $c_v = \frac{1}{\gamma-1}RT$  より  $E = \frac{1}{\gamma-1}pV$  であることを用いれば

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt}(pV) + p \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} V \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \frac{dV}{dt} \approx \frac{1}{\gamma-1} V_0 \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \frac{dV}{dt}$$

B.4 与えられた  $\frac{dQ}{dt}$  の表式を B.3 の結果に代入して、

$$\frac{1}{\gamma-1} V_0 \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \frac{dV}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos \omega t$$

これに与えられた  $p, V$  の表式を代入し  $\cos \omega t, \sin \omega t$  の係数をそれぞれ比較して

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma-1} V_0 p_a \omega + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_a \omega = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \\ \frac{1}{\gamma-1} V_0 p_b \omega - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_b \omega = 0 \end{cases}$$

従って、まず  $V_b$  について

$$V_b = \frac{p_b V_0}{\gamma p_0}$$

を得る。また、 $V_a$  については、B.1 と B.2 の結果から得られる式

$$T_{\text{st}} - T_1 = \frac{a}{l\sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{cr}})$$

を代入すれば、

$$V_a = - \left( \frac{1}{\gamma} p_a + \frac{(\gamma-1)\beta a}{\gamma \omega l \sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{cr}}) \right) \frac{V_0}{p_0}$$



B.5 全気体のなす仕事  $V_0 w$  を積分  $\int p dV$  によって求め、その結果について長時間に渡って時間平均をとる。この式における  $p, V$  として B.4 で与えられた (6) 式を用いれば、 $\cos \omega t \sin \omega t$  の時間平均が 0、 $\cos^2 \omega t, \sin^2 \omega t$  の時間平均が  $\frac{1}{2}$  であることを踏まえて、

$$V_0 w = -\pi(p_a V_b + p_b V_a)$$

を得る。これに B.4 の結果を代入すれば、

$$V_0 w = \frac{\pi(\gamma-1)\beta a}{\gamma \omega l \sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{cr}}) V_0 \frac{p_b}{p_0}$$

となり、また微小な項を考慮しなければ、(6) 式を (3) 式と比較することで

$$p_b \approx p_1(x_0) = a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos kx_0 = \frac{ak\gamma p_0}{\sqrt{2}}$$

だと分かるので、以上より

$$\begin{aligned} w &= \frac{\pi(\gamma-1)\beta a}{\gamma \omega l \sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{cr}}) \frac{p_b}{p_0} \\ &= \frac{\pi}{2\omega l} (\gamma-1)\beta (\tau - \tau_{\text{cr}}) ka^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= Slw \\ &= \frac{\pi}{2\omega} (\gamma-1)\beta (\tau - \tau_{\text{cr}}) Ska^2 \end{aligned}$$

B.6 1 サイクルの間に運ばれる熱を計算するために、気体の微小部分に出入りする熱の量を計算し、それをその瞬間の微小部分の変位で重み付けする。これにより、微小部分により運ばれる熱の総量は、1 サイクルに渡って積分して

$$Q_{\text{tot}} = \frac{1}{\Delta x} \int \left( -\frac{dQ}{dt} \right) u dt$$

と書ける。従って、近似的な計算として与えられた表式  $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1)$  と変位  $u(x_0, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega t$  を用いれば、

$$Q_{\text{tot}} = \frac{\pi}{\omega \Delta x} \beta V_0 (T_{\text{ct}} - T_1) \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\omega} \beta S \frac{a}{l \sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{cr}}) \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\omega} \beta (\tau - \tau_{\text{cr}}) \frac{a^2 S}{l}$$

[翻訳時の補足] 問題文の Hint を用いれば、1 サイクルの積分で  $Q_{\text{tot}} = \frac{1}{\Delta x} \int Q \frac{du}{dt} dt$  (\*) と表される。右辺で  $\int Q \frac{du}{dt} dt = \int \left( -\frac{dQ}{dt} \right) u dt$  に注意すれば上の解となる。気体の微小部分が位置  $u$  で熱  $-\frac{dQ}{dt}$  を出すことは  $-\frac{dQ}{dt}$  を  $x = x_0$  から  $u$  だけ運んだことになり、上の解ではこれを 1 サイクルに渡って積分している。(採点要領では  $Q(t) = -\frac{1}{\omega} \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \sin(\omega t) + Q_0$  を求め、(\*) により計算する解が想定されていた。)

B.7 B.5 と B.6 の結果より、

$$\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{tot}}} = (\gamma-1)kl = \frac{\tau_{\text{cr}}}{T_0} = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \cdot \frac{\tau}{T_0} = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau} \eta_c$$