

## 一般的な注意：理論試験（30点）

理論の試験時間は5時間であり、配点は30点である。

### 試験前

- 試験開始の音声による合図があるまで、問題の入れられた封筒を開けてはならない。
- 試験の開始と終了は音声による合図で指示する。1時間経過するごとに告知され、（最終的な終了の音声による合図の前に）試験終了の15分前にも合図がある。

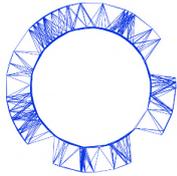
### 試験中

- 用意された解答用紙（answer sheets）は、自分の解答を記入するためのものである。対応する解答用紙（Aと記入されている）の適切な表、枠あるいはグラフの中に結果を記入せよ。各問題に対して、詳細な作業を実行するための余分な白紙（ワークシート、work sheets）（Wと記入されている）が用意されている。現在作業している問題に対するワークシートを用いているかどうか、つねに注意すること（用紙上部にある問題番号をチェックせよ）。採点されたくないことを用紙に記入してしまった場合には、その箇所に「×」印を付けること。すべての用紙の表（おもて）面だけを用いよ。
- 解答は、できるだけ簡潔にせよ。つまり、自分の考えていることを、できる限り数式、論理演算、図を用いて説明し、長文の使用は避けること。
- 数値に言及するときは、適切な有効数字で答えること。
- 前の問いに答えなくても、後ろの問いに答えることができる場合がしばしばある。
- 物理定数のリストは、次ページに与えられる。
- 許可なしに試験の場を離れてはいけぬ。何か補助が必要な場合には（飲料水を補給したい場合や、電卓が壊れた場合、トイレに行きたい場合など）、3つの旗のうちの1つを掲げて、チームガイドに伝えること。飲料水ボトルへの補給は、“H<sub>2</sub>O”、トイレに行きたい場合は、“WC”、その他のすべての場合は、“Help”の旗を掲げよ。もし、さらに白紙（ワークシート）が必要な場合は、“Help”の旗を掲げよ。

### 試験終了時

- 試験の終了時には、直ちに書くのをやめなさい。
- それぞれの問題について、対応する用紙を次のように仕分けること：表紙（C）、問題（Q）、解答用紙（A）、ワークシート（W）。
- 1つの問題に対する用紙は、すべて同じ封筒のなかに入れること。また、全般的な注意（G）は、残った別の封筒の中に入れること。また、何も記入していない用紙も提出すること。試験場からどの用紙も持ち出してはいけぬ。
- 封筒が回収されるまで、自分の席で待ちなさい。すべての封筒が回収されると、ガイドが試験場の外へ誘導する。筆記用具（1本のボールペン、1本の鉛筆、1本の物差し、1個の消しゴム／鉛筆削り）および電卓は持ち帰ること。また、飲料水ボトルも持ち帰ること。





## LIGO-GW150914 (10 点)

2015 年に重力波検出器 LIGO が初めて地球に到達した重力波 (Gravitational waves, GW) を観測した。GW150914 と名付けられたこのイベントは、円に近い軌道を運動する 2 つのブラックホールで発生した重力波によるものである。この問題では、観測データの特性から系の物理パラメータを見積もる。

## Part A: ニュートン力学による軌道 (3.0 点)

- A.1** 質量  $M_1, M_2$  の星がそれぞれ位置  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  の位置にあるとし、重心系で運動を記述する。 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

星は宇宙の他の天体から十分離れているとし、非相対論的速度で運動しているものとする。ニュートンの法則から、質量  $M_1$  の加速度ベクトルは以下のように書き表すことができる。

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

ここで  $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$  である。自然数  $n$  を求めよ。また、 $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$  の具体的な表式を求めよ。 $G$  は万有引力定数 [ $G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$ ]。

- A.2** 2 つの質量からなる系の全エネルギーは、円軌道に対して以下のように書き表される。 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

ここで

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

は系の換算質量および全質量であり、 $\Omega$  はそれぞれの質量の角速度、 $L$  は質量間の距離 ( $L = r_1 + r_2$ ) である。 $A(\mu, \Omega, L)$  の具体的な表式を求めよ。

- A.3** 式 (3) は  $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$  と簡単化できる。 $\beta$  を決定せよ。 1.0pt

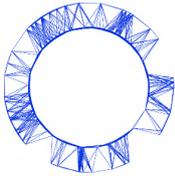
## Part B: 相対論的エネルギー散逸の導入 (7.0 点)

1915 年にアインシュタインによって定式化された重力の正確な理論である相対性理論は、重力が光の速さで伝搬することを予言する。このときに重力相互作用の情報を運ぶのが重力波である。重力波は質量が加速されるときに常に放射され、質量系のエネルギーを減少させる。

宇宙の他の天体から十分離れた 2 つの点状の天体を考えよう。十分小さな速度に対して、1) 発せられる重力波の角振動数は軌道の角速度の 2 倍であり、2) 単位時間あたりに放射される重力波のエネルギー  $\mathcal{P}$  は、以下のアインシュタインによる四重極公式で決められる:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

## Theory



IPHO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q1-2

Japanese (Japan)

ここで、 $c \approx 3 \times 10^8$  m/s は光速である。2 質量系が  $x - y$  平面内を運動する時、 $Q_{ij}$  は次のように与えられる ( $i, j$  はそれぞれ行と列の成分を表す添字である):

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = - \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

そのほかの成分については、 $Q_{ij} = 0$  である。ここで  $(x_A, y_A)$  は重心系における質量  $A$  の位置である。

- B.1** A.2 で記述した円軌道に対して、 $Q_{ij}$  の成分は時刻  $t$  の関数として以下のように書き表すことができる。 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

$k$  を  $\Omega$  を使って書き表わせ。さらに、定数  $a_i, b_i, c_{ij}$  の数値を決めよ。

- B.2** この系に対して、単位時間あたりに放射される重力波のエネルギー  $\mathcal{P}$  を計算し、次のように書き表されることを示せ。 1.0pt

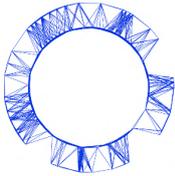
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

また、 $\xi$  を数値として求めよ。[もし  $\xi$  を得ることができなかつたら、以下の間で  $\xi = 6.4$  を用いよ。]

- B.3** 重力波の放出がない時、2 つの質点は一定の円軌道を永遠にまわりつづける。しかし、重力波の放出により、系のエネルギーが失われ、円軌道の半径は徐々に小さくなる。角速度の時間変化の割合  $\frac{d\Omega}{dt}$  は以下の式で与えられることを示せ。 1.0pt

$$\left( \frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

ここで  $M_c$  はチャープ質量と呼ばれる。 $M_c$  を  $M$  と  $\mu$  で書き表わせ。この質量が、軌道が小さくなっていく時の角速度の増加を決める。[「チャープ」は、小さな鳥が発する(振動数があがる)高音の鳴き声に由来する。]



- B.4** ここまでで与えられた情報を使って、軌道の角速度  $\Omega$  と重力波の振動数 (単位時間あたりの波の振動回数)  $f_{\text{GW}}$  の関係式を求めよ。また、任意のなめらかな関数  $F(t)$  と定数  $a \neq 1$  に対して、 2.0pt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

が成り立つ。ここで  $\chi$  は定数、 $t_0$  は積分定数である。この公式を用いて、(10) より重力波の振動数が

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\zeta \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

となることを示し、定数  $p$  を決定せよ。

GW150914 は 2015 年 9 月 14 日に、L 字型に配置された長さ 4km の 2 つのアームからなる LIGO 検出器で記録された。2 つのアームの長さの比は図 1 のように変化した。検出器のアームは通過する重力波に対して線形で応答し、その応答パターンは波のような形になる。この波は、円に近い軌道上を動く 2 つのブラックホールによって生成された。重力放射によるエネルギー損失によって、軌道は縮み、2 つのブラックホールはついには衝突する。衝突点はだいたい図 1 の点 D の右側の信号ピークの位置に対応している。

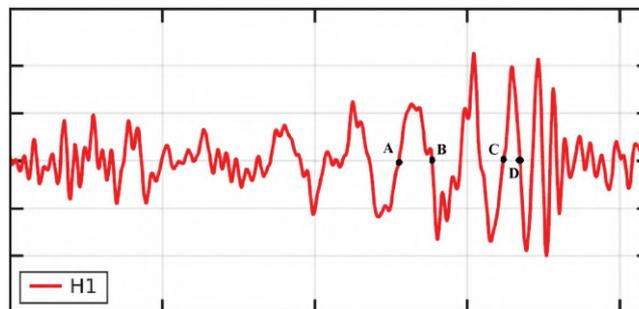


図 1. LIGO 検出器 H1 における 2 つのアームの長さ比の変化。水平軸は時刻、点 A, B, C, D はそれぞれ  $t = 0.00, 0.009, 0.034, 0.040$  [秒] の時刻に対応する。

- B.5** 図から、以下の 2 つの時刻における  $f_{\text{GW}}(t)$  を数値的に見積もれ。 1.0pt

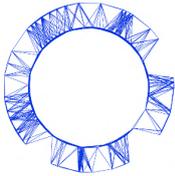
$$t_{\text{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{および} \quad t_{\text{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

さらに、(厳密には違うが) 式 (12) が衝突前に常に成立していると仮定し、2 つの質点は同じ質量を持つとして、系のチャープ質量  $M_c$  と全質量が太陽質量  $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$  kg の何倍になるか、それぞれの数値を求めよ。

- B.6** 2 つの質量間の最小距離を、時刻  $t_{\text{CD}}$  でのデータを用いて数値的に見積もれ。次に、それぞれの天体の大きさの上限  $R_{\text{max}}$  を見積もれ。太陽半径  $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$  km と比較するために、 $R_\odot/R_{\text{max}}$  を数値的に求めよ。さらに、同じ時刻に軌道上を動く天体の速さ  $v_{\text{col}}$  を数値的に見積もり、光の速さと比較のため  $v_{\text{col}}/c$  を数値的に求めよ。 1.0pt

2 つの天体はとても速く動いており、天体はとてもコンパクトであることを示せ!





## ニュートリノはどこに？ (10点)

2個の陽子が大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) で衝突すると、電子、ミューオン、ニュートリノ、クォークやそれらの反粒子などの粒子が生成される。これらの粒子のほとんどは衝突点を取り囲む粒子検出器で検出できる。例えば、クォークはハドロン化という過程で原子よりも小さい粒子のシャワー (ジェット: Jet と呼ばれる) になる。さらに、検出器内の強い磁場により、エネルギーが非常に大きい荷電粒子であっても軌道を曲げることができ、その運動量が決定できる。ATLAS 検出器は、超伝導ソレノイド系を用いて、衝突点を取り囲む検出器内部に一定かつ均一な 2.00 テスラの磁場を作っている。ある値以下の運動量をもつ荷電粒子は強く曲げられるために、磁場中を何回も回転し、ほとんど検出されない。また、ニュートリノはその性質から、相互作用せずに検出器を通り抜け、全く検出されない。

データ: 電子の静止質量  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg, 素電荷  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  C,

光速  $c = 3.00 \times 10^8$  m s<sup>-1</sup>, 真空の誘電率  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F m<sup>-1</sup>

### Part A. ATLAS 検出器の物理 (4.0点)

- A.1** 電子は磁場から速度に垂直な方向に力を受け、円運動を行う。そのサイクロトロン半径  $r$  の表式を、運動エネルギー  $K$ , 電荷の絶対値  $e$ , 質量  $m$ , 磁場  $B$  によって表わせ。電子は非相対論な古典粒子と仮定する。 0.5pt

ATLAS 検出器内部で生成される電子は相対論的に扱わなければならない。

- A.2** 検出器の内部を半径方向に抜け出す電子の運動量の最小値を計算せよ。検出器の内部は半径が 1.1 メートルの円柱状で、電子は円柱のちょうど中心の衝突点で生成される。答えは MeV/c の単位で表わせ。 0.5pt

電荷  $e$ , 静止質量  $m$  を持つ相対論的粒子が速度に垂直に加速されると、シンクロトロン放射と呼ばれる電磁波が放射される。単位時間あたりに放射されるエネルギーは、

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

ここで  $a$  は加速度,  $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$  である。

- A.3** 超相対論的粒子では、単位時間あたりに放射されるエネルギーは次のように表される。 1.0pt

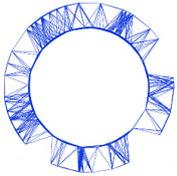
$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

ここで、 $\xi$  は実数,  $n, k$  は自然数,  $E$  は荷電粒子のエネルギー,  $B$  は磁場である。 $\xi, n, k$  の数値を求めよ。

- A.4** 超相対論的極限において、電子のエネルギーは時刻の関数として次のようになる。 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

ここで、 $E_0$  は電子の初期エネルギーである。 $\alpha$  を  $e, c, B, \epsilon_0, m$  の関数として求めよ。



**A.5** 100 GeV のエネルギーを持つ電子が衝突点で生成され、半径方向に進むとする。その電子が検出器の内部を抜けるまでにシンクロトロン放射により失うエネルギーの数値を見積もれ。答えは MeV の単位で表わせ。 0.5pt

**A.6** 超相対論的極限で、電子のサイクロトロン周波数を時刻の関数として表わせ。 0.5pt

### Part B. ニュートリノを探す (6.0 点)

図1のように、2個の陽子が衝突すると、最も重い素粒子であるトップクォーク ( $t$ ) と反トップクォーク ( $\bar{t}$ ) が生成される。トップクォークは  $W^+$  ボソンとボトムクォーク ( $b$ ) に崩壊し、反トップクォークは  $W^-$  ボソンと反ボトムクォーク ( $\bar{b}$ ) に崩壊する。図1に示されるケースでは、 $W^+$  ボソンは反ミューオン ( $\mu^+$ ) とニュートリノ ( $\nu$ ) に崩壊し、 $W^-$  ボソンはクォークと反クォークに崩壊する。この問題の課題は、検出された複数の粒子の運動量を使って完全なニュートリノの運動量を再現することである。**簡単のため、この問題で考える粒子とジェットは、トップクォークと  $W^\pm$  ボソンを除いて全て質量がないと考える。**

トップクォークが崩壊してできる生成物の運動量は、ニュートリノの運動量の  $z$  成分を除いて実験から決定できる (表を見よ)。終状態の粒子の全運動量は、横平面 ( $xy$  平面) の成分だけがゼロで、衝突軸 ( $z$  軸) 成分はゼロでない。そのため、横平面の欠けた運動量からニュートリノの横運動量を求められる。

2015年6月4日の00:21:24 (GMT+1) に、LHCのATLAS実験で図1に示されるような陽子-陽子衝突が記録された。

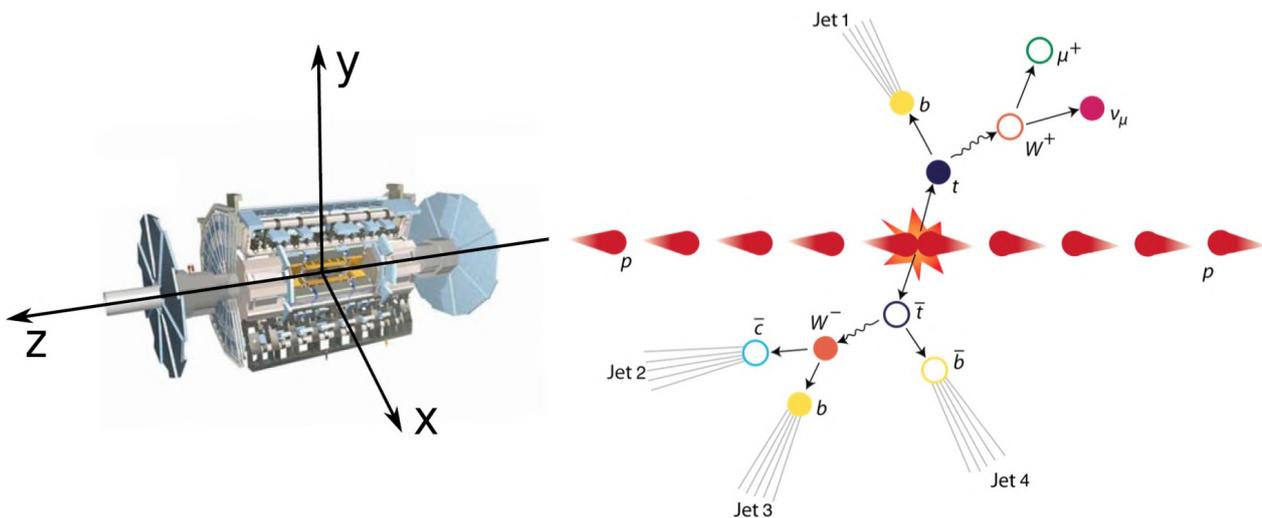
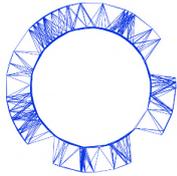


図1. ATLAS 検出器の座標系の模式図 (左) と陽子-陽子衝突の模式図 (右)



トップクォークが崩壊した終状態の3個の粒子（ニュートリノを含む）の運動量が成分ごとに示されている。

| 粒子                 | $p_x$ (GeV/c) | $p_y$ (GeV/c) | $p_z$ (GeV/c) |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|
| 反ミューオン ( $\mu^+$ ) | -24.7         | -24.9         | -12.4         |
| Jet 1 ( $j_1$ )    | -14.2         | +50.1         | +94.1         |
| ニュートリノ ( $\nu$ )   | -104.1        | +5.3          | -             |

- B.1**  $W^+$  ボソンの質量の2乗  $m_W^2$  と、上の表に示されているニュートリノと反ミューオンの運動量の成分の関係式を求めよ。解答を 1.5pt
- $$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{x} + p_y^{(\nu)} \hat{y}, \quad \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{x} + p_y^{(\mu)} \hat{y},$$
- で定義されるニュートリノと反ミューオンの横運動量と、運動量の  $z$  成分  $p_z^{(\nu)}$ ,  $p_z^{(\mu)}$  を用いて表わせ。

- B.2**  $W^+$  ボソンの質量を  $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$  と仮定して、ニュートリノの運動量の  $z$  成分  $p_z^{(\nu)}$  の2つの解を数値的に求めよ。答えは  $\text{GeV}/c$  の単位で表わせ。 1.5pt

- B.3** 前問の2つの解それぞれについて、トップクォークの質量を数値的に求めよ。答えは  $\text{GeV}/c^2$  の単位で表わせ。 1.0pt
- [もし B.2 で2つの解を得られなかったときは、次の値を用いよ。  
 $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$  ,  $p_z^{(\mu)} = -180 \text{ GeV}/c$ ]

トップクォークの質量測定で必要となる衝突イベントの相対度数は2つの要素からなる：シグナルと呼ばれる要素（トップクォークの崩壊に対応する）とバックグラウンドと呼ばれる要素（トップクォークを含まない他の過程のイベントに対応する）である。実験データにはこれら両方の過程が含まれる。図2を見よ。

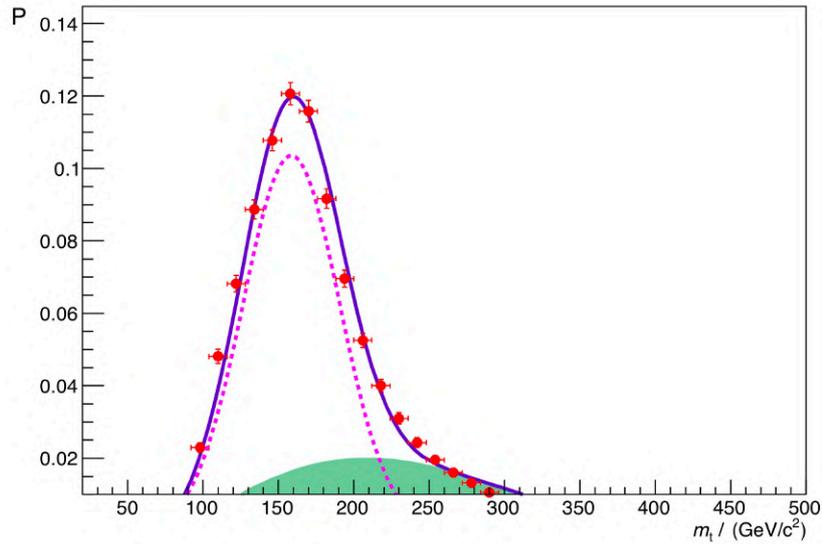
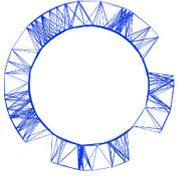
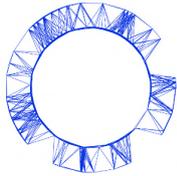


図2. 実験から決定されるトップクォークの質量分布（イベントの相対度数）がトップクォークの質量に対してプロットされている。点はデータに対応する。破線は「シグナル」、色のついた部分は「バックグラウンド」にそれぞれ対応する。

**B.4** トップクォークの質量分布に基づくと、前に求めた2つの解のうちどちらがより正しいであろうか。最も可能性の高い解について確率を見積もれ。 1.0pt

**B.5** トップクォークが崩壊するまでに進む距離を、最も可能性の高い解を用いて数値的に求めよ。トップクォークは静止系で  $5 \times 10^{-25}$  s の平均寿命を持つと仮定する。 1.0pt



## 生体組織の物理 (10 点)

データ: 標準大気圧,  $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

### Part A. 血液流の物理 (4.5 点)

この課題では血管中の血液の流れについて2つの簡略化されたモデルを解析する。

血管は近似的には円筒形である。硬い円筒中の定常的で乱流がない非圧縮性液体の流れでは、円筒の両端の圧力差は

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\ell$  と  $r$  はそれぞれ円筒の長さと半径であり、 $\eta$  は液体の粘性率、 $Q$  は体積流量（円筒断面を単位時間あたりに通過する流体の体積）である。この表現を用いると、脈動する流れや血管の弾性や不規則な形状、血液が単純な流れではなく細胞と血しょうの混合である事実を考慮することなく、血管内の圧力差を正しい桁の大きさで与えることができる。さらに、この表現はオームの法則と同じ形式となっている。体積流量は電流に、圧力差は電圧に、因子  $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$  は抵抗に相当する。

図1に示す対称的な細動脈（小さな動脈）ネットワークが生体組織の毛細血管床（図右側）に血液を分配する例を考える。このネットワークでは、それぞれの二股で血管は同じ二つの血管に分かれる。しかし、次数の高い階層 (Level) の血管ほど細く短い。連続する階層  $i$  と  $i+1$  の間の半径と長さには、 $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$  と  $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$  の関係がある。

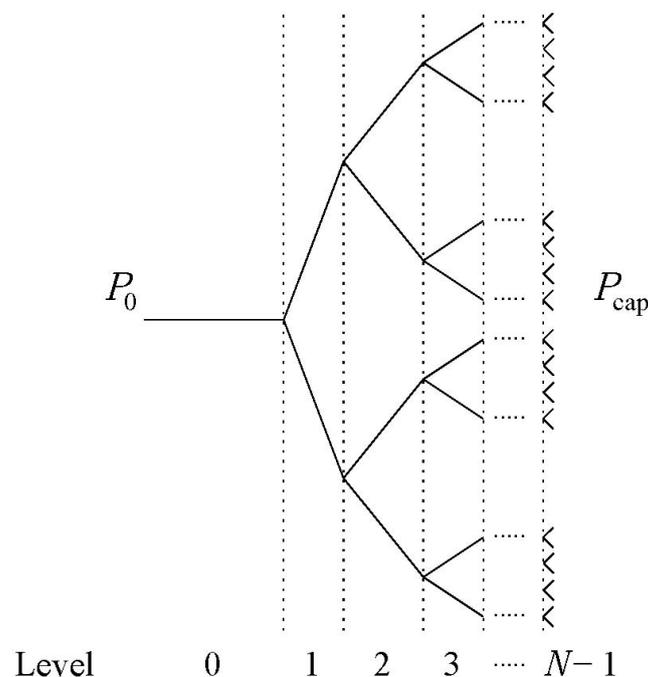
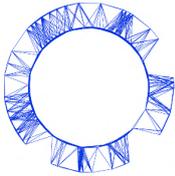


図1. 細動脈ネットワーク



**A.1** 各階層  $i$  の一本の血管中の体積流量  $Q_i$  を、全階層数  $N$ 、粘性率  $\eta$ 、最初の階層の血管の半径  $r_0$  と長さ  $\ell_0$ 、階層 0 の細動脈の圧力  $P_0$  と毛細血管床の圧力  $P_{\text{cap}}$  との差  $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$  の関数として表せ。 1.3pt

**A.2** 階層 0 の細動脈の体積流量  $Q_0$  の値を計算せよ。細動脈の半径は  $6.0 \times 10^{-5}$  m、長さは  $2.0 \times 10^{-3}$  m である。細動脈入り口の圧力は 55 mmHg である。血管ネットワークの階層数は  $N = 6$  であり、30mmHg の圧力をもつ毛細血管床につながっている。血液の粘性率は  $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup> である。結果は、ml/h の単位で表すこと。 0.5pt

### LCR 回路としての血管

硬い円筒血管の近似はいくつかの理由で不十分である。特に重要なのは、時間に依存する流れを取り入れることと、心臓による血液送り出しの周期的圧力変化による血管半径の変化を考慮することである。さらに、径の大きな血管では圧力変化は非常に大きい、小さな血管では圧力振動の振幅は非常に小さくなり流れはほとんど時間に依存しないことが観察されている。

一本の弾力性のある血管中の圧力が増加すると、その半径が増加する。これにより、血管中により多くの血液を蓄え、圧力が低下したときに排出することができる。この理由により、血管の弾性的ふるまいは、我々の最初のモデルにコンデンサーを付け加えることでシミュレートできる。さらに、時間に依存した血液流量を考慮する場合は、血液の密度  $\rho = 1.05 \times 10^3$  kg m<sup>-3</sup> に比例した慣性を考えなくてはならない。この慣性は我々のモデルではインダクタンスとして記述される。図 2 は、このモデルによる一本の血管と等価な電気回路である。等価なコンデンサー容量とインダクタンスはそれぞれ

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{と} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 $h$  は血管の壁の厚さ、 $E$  は動脈のヤング率（血管組織に圧力が加えられた時の大きさの変化の比率）である。ヤング率は圧力の単位をもち、動脈ではおおよそ  $E = 0.06$  MPa である。

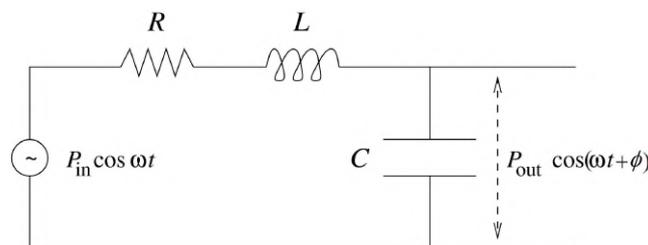
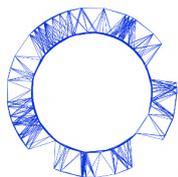


図 2. 一本の血管と等価な電気回路

**A.3** 定常的な状態において、角振動数  $\omega$  の流れの血管出口における圧力の振幅  $P_{\text{out}}$  を、入口の圧力振幅  $P_{\text{in}}$ 、等価な抵抗  $R$ 、インダクタンス  $L$ 、容量  $C$  の関数として求めよ。さらに、低振動数において、出口における圧力振幅が  $P_{\text{in}}$  よりも小さくなる条件を、 $\eta, \rho, E, h, r, \ell$  が満たす関係式として求めよ。 2.0pt

**A.4** A.2 の血管ネットワーク中の細動脈が、A.3 の条件を階層によらず常に満たすような壁の厚さの最大値  $h$  を概算せよ。 0.7pt



## Part B. 腫瘍（しゅよう）の成長（5.5点）

腫瘍の成長は非常に複雑であり，そこでは細胞増殖や自然選択などの生物学的機構と物理が絡み合っている。この問題では，腫瘍の成長を簡略化したモデルを考え，硬い腫瘍で一般的に見られる圧力の増加を記述する。

正常細胞が作る生体組織が非伸張性の膜で囲まれた場合を考える。このとき生体組織は，図3のように常に半径  $R$  の球形に保たれている。

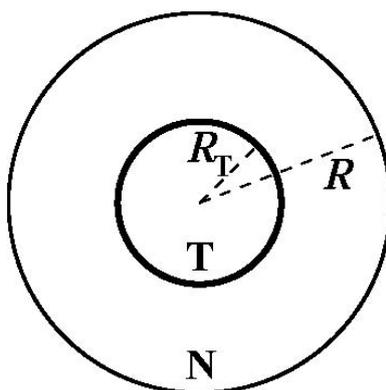


図3. 簡略化した腫瘍

初めは生体組織に余分な圧力はかかっていないものとする。つまり，すべての位置の圧力は大気圧に等しい。

時刻  $t = 0$  から腫瘍が球の中心で成長を始める。成長するにつれて，生体組織の中の圧力は高まる。二つの生体組織（正常 N と腫瘍 T）は圧縮可能であり，それぞれの密度  $\rho_N$  と  $\rho_T$  は以下のように圧力に対して線形に増加する。

$$\rho_N = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

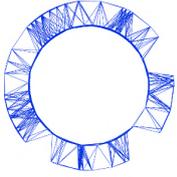
ここで， $\rho_0$  は初めの生体組織の密度であり， $p$  は大気圧との圧力差， $K_N, K_T$  はそれぞれ正常組織と腫瘍の圧縮弾性率（体積弾性率）である。一般に，腫瘍の方が硬く，高い体積弾性率をもつ。

**B.1** 腫瘍が成長しても，正常細胞の質量は変化しない。腫瘍の体積と生体組織全体の体積の比  $v = V_T/V$  を，腫瘍の質量 ( $M_T$ ) と正常細胞の質量 ( $M_N$ ) の比  $\mu = M_T/M_N$  と体積弾性率の比  $\kappa = K_N/K_T$  の関数として表せ。 1.0pt

癌の治療では，化学療法や放射線療法とともに温熱療法もしばしば用いられる。温熱療法では，癌細胞を死滅させるために，癌細胞だけの温度を人間の正常体温  $37^\circ\text{C}$  よりも高い  $43^\circ\text{C}$  にする。最近，腫瘍細胞に結び付く特別なたんぱく質に包まれたカーボンナノチューブが開発された。生体組織を近赤外線照射するとナノチューブが周囲の生体組織より多くの近赤外線を吸収するため，ナノチューブが結び付いた腫瘍細胞だけを加熱できる。

腫瘍と正常な細胞，および，それらを取り囲む生体組織が一定の熱伝導率  $k$  をもつとする。つまり，この問題の配置では，半径  $r$  の球面を通過する単位時間および単位面積あたりのエネルギーは，温度の  $r$  についての微分を  $k$  倍したものに等しい。ナノチューブは腫瘍中に均一に分配されているとし，単位体積かつ単位時間あたり  $\mathcal{P}$  の熱エネルギーが加えられているとする。腫瘍から十分に遠い位置の温度は，通常の体温に等しいと仮定せよ。

## Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q3-4

Japanese (Japan)

**B.2** 定常的な状態における腫瘍の中心の温度を,  $\mathcal{P}, k$ , 人体の体温, および腫瘍の半径  $R_T$  の関数として求めよ。 1.7pt

**B.3** 半径 5.0 cm の腫瘍の中のすべての部分の腫瘍細胞の温度を 43.0 °C 以上にするために必要な, 単位体積かつ単位時間あたりのエネルギーの最小値  $\mathcal{P}_{\min}$  を求めよ。生体組織の熱伝導率は  $k = 0.60 \text{ W K}^{-1}\text{m}^{-1}$  である。 0.5pt

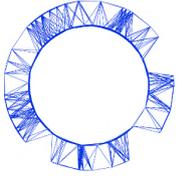
問題 **A.1** に示した樹枝状構造の血管ネットワークにより腫瘍に血液が流れているとする。腫瘍の成長により圧力  $p$  が増加し, 最も細い血管の圧力  $P_{\text{cap}}$  よりも大きくなるとき, 血管の半径は微量  $\delta r$  だけ小さくなる。もし圧力が臨界値  $p_c$  に到達すると最も細い血管は破壊され, 腫瘍への血液の流出という危険な状況となる。臨界値  $p_c$  のときの半径減少は  $\delta r_c$  であり, 圧力と血管半径の変化は以下の現象論的な関係式で表される:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left( \frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left( 2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

腫瘍による圧力の増大で最も細い血管 ( $N - 1$  の階層) の半径が変わる場合を考える。

**B.4** 線形の範囲 ( $p - P_{\text{cap}}$  が非常に小さい) を考える。最も細い血管における流量の相対的低下率  $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$  を, 腫瘍の体積比率  $v = V_T/V$ , および  $K_N, N, p_c, \delta r_c, r_{N-1}, P_{\text{cap}}$  の関数として表せ。 2.3pt

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A1-1

Japanese (Japan)

## LIGO-GW150914 (10 点)

### Part A: ニュートン力学による軌道 (3.0 点)

**A.1** (1.0 pt)

$$n =$$

$$\alpha =$$

**A.2** (1.0 pt)

$$A(\mu, \Omega, L) =$$

**A.3** (1.0 pt)

$$\beta =$$

### Part B: 相対論的エネルギー散逸の導入 (7.0 点)

**B.1** (1.0 pt)

$$k =$$

$$a_1 = \quad a_2 = \quad a_3 =$$

$$b_1 = \quad b_2 = \quad b_3 =$$

$$c_{12} = \quad c_{13} = \quad c_{23} =$$

$$c_{21} = \quad c_{22} = \quad c_{23} =$$

$$c_{31} = \quad c_{32} = \quad c_{33} =$$

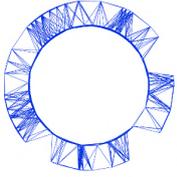
**B.2** (1.0 pt)

$$\xi =$$

**B.3** (1.0 pt)

$$M_{\dot{c}} =$$

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A1-2

Japanese (Japan)

**B.4** (2.0 pt)

$p =$

**B.5** (1.0 pt)

$M_c \simeq$

$M \simeq$

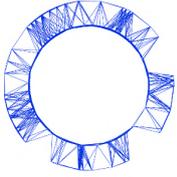
**B.6** (1.0 pt)

$L \simeq$

$\frac{R_\odot}{R_{\max}} \simeq$

$\frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq$

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A2-1

Japanese (Japan)

## ニュートリノはどこに？ (10 点)

### Part A. ATLAS 検出器の物理 (4.0 点)

**A.1** (0.5 pt)

$$r =$$

**A.2** (0.5 pt)

$$p =$$

**A.3** (1.0 pt)

$$\xi = \quad n = \quad k =$$

**A.4** (1.0 pt)

$$\alpha =$$

**A.5** (0.5 pt)

$$\Delta E =$$

**A.6** (0.5 pt)

$$\omega(t) =$$

### Part B. ニュートリノを探す (6.0 点)

**B.1** (1.5 pt)

$$m_W^2 =$$

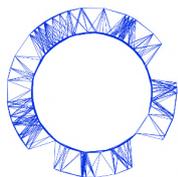
**B.2** (1.5 pt)

$$p_z^\nu = \quad \text{or} \quad p_z^\nu =$$

**B.3** (1.0 pt)

$$m_t = \quad \text{or} \quad m_t =$$

## Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A2-2

Japanese (Japan)

---

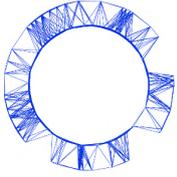
**B.4** (1.0 pt)

解のうち最も可能性が高いもの：

**B.5** (1.0 pt)

$d =$

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# A3-1

Japanese (Japan)

## 生体組織の物理 (10 点)

### Part A. 血液流の物理 (4.5 点)

**A.1** (1.3 pt)

$$Q_i =$$

**A.2** (0.5 pt)

$$Q_0 =$$

**A.3** (2.0 pt)

$$P_{\text{out}} =$$

条件:

**A.4** (0.7 pt)

$$\text{最大値 } h =$$

### Part B. 腫瘍 (しゅよう) の成長 (5.5 点)

**B.1** (1.0 pt)

$$v =$$

**B.2** (1.7 pt)

温度:

**B.3** (0.5 pt)

$$\mathcal{P}_{\text{min}} =$$

**B.4** (2.3 pt)

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq$$