GW150915 (10 点)

Part A: ニュートン(古典)力学による軌道 (3.0 点)

A.1 質量 M_1 に関する運動方程式より:

$$M_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = G\frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \ . \tag{1}$$

問題文の式(1)より

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2}\vec{r}_1 \ , \tag{2}$$

これを式(1)に代入し, 整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1+M_2)^2 r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1} \ . \tag{3}$$

を得る。

A.1	1. 0 点
$n = 3, \qquad \alpha = \dfrac{GM_2^3}{(M_1+M_2)^2}$.	

A.2 系の全エネルギーは 2 つの質量の運動エネルギーと位置エネルギーを合わせたものである。円運動において, それぞれの質量の速度は

$$|\vec{v}_1| = r_1\Omega \ , \qquad |\vec{v}_2| = r_2\Omega \ , \tag{4}$$

となるので,全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2)\Omega^2 - \frac{GM_1M_2}{L} \ , \tag{5}$$

ここで,

$$(M_1 r_1 - M_2 r_2)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2 \ . \tag{6}$$

よって,

$$E = \frac{1}{2}\mu L^2\Omega^2 - G\frac{M\mu}{L} \ . \tag{7}$$

A.2	1.0 点
$A(\mu,\Omega,L) = \dfrac{1}{2}\mu L^2\Omega^2$.	

A.3 問題文中のエネルギー(3)は質量 μ が, 静止している質量 M を中心に, 半径 L, 角速度 Ω の円軌道を回っている系のエネルギーと考えることができる。質量 μ にかかる万有引力による加速度と, 円運動をするために必要な向心加速度が等しいことから:

$$G\frac{M}{L^2} = \Omega^2 L\,. \tag{8}$$

これは確かに(円運動をしている物体に対する)ケプラーの第 3 法則である。よって, (7)より,

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{M\mu}{L}\,. \tag{9}$$

A.3 $\beta = -\frac{1}{2}\,.$	1.0 点

Part B: 相対論的エネルギー散逸の導入 (7.0 点)

B.1 (適切なデカルト座標系内における)それぞれの質量の x, y 方向の運動に対して簡単な三角関数を適用して以下を得る:

$$(x_1, y_1) = r_1(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)), \qquad (x_2, y_2) = -r_2(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)). \tag{10}$$

よって,

$$Q_{ij} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\cos^2(\Omega t) - \frac{2}{3}\sin^2(\Omega t) & 2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & 0 \\ 2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & \frac{4}{3}\sin^2(\Omega t) - \frac{2}{3}\cos^2(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

であり, (6)と少しの計算により整理すると,

$$Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & \frac{1}{3} - \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

B.1 1.0 点

$$k = 2\Omega, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{2}{3}, \quad b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 0, c_{12} = c_{21} = 1, c_{ij} \overset{\text{otherwise}}{=} 0.$$

B.2 まず, (12)の第３次導関数を取る:

$$\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} = 4\Omega^3 \mu L^2 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

そして, 問題文中の式(5)に代入し計算を行う:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5}(4\Omega^3 \mu L^2)^2 [2\sin^2(2\Omega t) + 2\cos^2(2\Omega t)] = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6. \tag{14}$$

B.2 1.0 点

$$\xi = \frac{32}{5}.$$

B.3 今, 重力波の放出によりエネルギーを失っている，ケプラー運動をするような系を仮定する。

まず, (9)より, 時間において微分して,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM\mu}{2L^2}\frac{dL}{dt}, \tag{15}$$

このエネルギー損失は重力波によるものなので, (14)で与えた, 単位時間あたりに放出される重力波のエネルギー(に負号をつけたもの)と等しい。したがって,

$$\frac{GM\mu}{2L^2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6 \,. \tag{16}$$

(8)で与えた, ケプラーの第 3 法則を用いることで, 式中の L, dL/dt は Ω, $d\Omega/dt$ に書き換えることができる。用いるのは以下:

$$L^3 = G\frac{M}{\Omega^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{L}{\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\,. \tag{17}$$

(16)に代入することで, 以下が求まる:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2 \equiv \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_{\mathrm{c}})^5 \,. \tag{18}$$

B.3	1.0 点
$M_{\mathrm{c}} = (\mu^3 M^2)^{1/5}\,.$	

B.4 角速度と振動数の関係は $\Omega=2\pi f$。問題文中に与えられた情報: *発せられる重力波の角振動数は軌道の各速度の 2 倍である*, より,

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{f_{\mathrm{GW}}}{2}\,. \tag{19}$$

問題文の式(10)は以下のような形をしている

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \chi\Omega^{11/3}\,, \qquad \chi \equiv \frac{96}{5}\frac{(GM_{\mathrm{c}})^{5/3}}{c^5}\,. \tag{20}$$

よって, 問題文の式(11)より

$$\Omega(t)^{-8/3} = \frac{8}{3}\chi(t_0 - t)\,, \tag{21}$$

であり, (19)と χ の定義より

$$f_{\mathrm{GW}}^{-8/3}(t) = \frac{(8\pi)^{8/3}}{5}\left(\frac{GM_{\mathrm{c}}}{c^3}\right)^{5/3}(t_0 - t)\,. \tag{22}$$

B.4	2.0 点
$p = 1\,.$	

B.5 図 1 より, ２つの Δt を半周期と捉えることができる。よって, 重力波の振動数は $f_{GW} = 1/(2\Delta t)$。これより, 与えられた 4 点から, ２つの時間間隔の中間における振動数を次のように計算することができる。

	$t_{\overline{AB}}$	$t_{\overline{CD}}$
t (s)	0.0045	0.037
f_{GW} (Hz)	$(2\times 0.009)^{-1}$	$(2\times 0.006)^{-1}$

今, (22)において, ２組の未知の (t_0, M_c) に対応する２組の (f_{GW}, t) の値が与えられている。t_{AB} と t_{CD} の２つに関して(22)を表し,それら２式を互いに割り算する。

$$t_0 = \frac{At_{\overline{CD}} - t_{\overline{AB}}}{A-1}, \qquad A \equiv \left(\frac{f_{GW}(t_{\overline{AB}})}{f_{GW}(t_{\overline{CD}})}\right)^{-8/3}. \tag{23}$$

数値を代入することで, $A \simeq 2.95$, そして $t_0 \simeq 0.054$ s と求まる。これにより, t_{AB}, t_{CD} のいずれでも(22)を用い, M_c を決定することができる。１つを用いるとチャープ質量は以下のように求まる

$$M_c \simeq 6\times 10^{31}\ \mathrm{kg} \simeq 30\times M_\odot . \tag{24}$$

したがって, 全質量 M は

$$M = 4^{3/5} M_c \simeq 69\times M_\odot . \tag{25}$$

この結果は実際, 一般相対論を用いて最大限に正確に概算した結果と驚くほど近い！[もちろん実際の物体はピッタリ同じ質量を持っているわけでもなければ, 今まで使用した理論は衝突の近くではあまり正確ではないが。]

B.5 1.0 点

$$M_c \simeq 30\times M_\odot , \qquad M \simeq 69\times M_\odot .$$

B.6 (8)より, ケプラーの法則は $L = (GM/\Omega^2)^{1/3}$。図 1 に示された点 C, D の組は衝突の直前の周期に対応する。よって, (19)を用いて t_{CD} での角速度を求めて:

$$\Omega_{t_{\overline{CD}}} \sim 2.6\times 10^2\ \mathrm{rad/s} . \tag{26}$$

そして, 全質量(25)を用いることで,

$$L \sim 5\times 10^2\ \mathrm{km} . \tag{27}$$

したがって, これらの物体は上限で R_{max} ~ 250 km の半径を持つ。すなわち, 2 つの天体は太陽の 30 倍の質量を持っていて,

$$\frac{R_\odot}{R_{\text{max}}} \sim 3 \times 10^3 \tag{28}$$

3000 倍小さく, そして！その速さは

$$v_{\text{col}} = \frac{L}{2}\Omega \simeq 7 \times 10^4 \text{ km/s} . \tag{29}$$

光の 20%以上の速さで動いているのである！

B.6 1.0 点

$$L_{\text{collision}} \sim 5 \times 10^2 \text{ km} , \qquad \frac{R_\odot}{R_{\text{max}}} \sim 3 \times 10^3 , \qquad \frac{v_{\text{col}}}{c} \sim 0.2 .$$

ニュートリノはどこに？(10点)

Part A. ATLAS検出器の物理 (4.0点)

A.1

磁場による力（ローレンツ力）は中心力であり、

$$m\frac{v^2}{r} = evB \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

速度は、運動エネルギーを用いて、

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

これを上の半径の式に代入し、

A.1 0.5点

$$r = \frac{\sqrt{2Km}}{eB}$$

A.2

一定かつ均一な磁場中の電子の円運動の半径は、

$$r = \frac{mv}{eB}$$

この式を相対論的に扱うには、質量について $m \to \gamma m$ とすればよい。

$$r = \frac{\gamma mv}{eB} = \frac{p}{eB} \;\Rightarrow\; p = reB$$

円運動の半径は検出器内部の半径の半分であることを考慮し、$[1\,\mathrm{MeV}/c = 5.34 \times 10^{-22}\,\mathrm{m\,kg\,s^{-1}}]$ を用いると、

A.2 0.5点

$$p = 330\,\mathrm{MeV}/c$$

A.3

荷電粒子の加速度は、超相対論的極限では、

$$a = \frac{evB}{\gamma m} \sim \frac{ecB}{\gamma m}$$

よって、

$$P = \frac{e^4c^2\gamma^4B^2}{6\pi\epsilon_0 c^3\gamma^2 m^2} = \frac{e^4\gamma^2c^4B^2}{6\pi\epsilon_0 c^5 m^2}$$

$E = \gamma mc^2$ より、$\gamma^2c^4 = \dfrac{E^2}{m^2}$ が得られる。これを用いて、最終的に、

$$P = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4c^5}E^2B^2$$

ゆえに、

A.3	$\xi = \dfrac{1}{6\pi},\ n = 5,\ k = 4$	1.0点

A.4

放射されるエネルギーは次の式で表される。

$$P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4c^5}E^2B^2$$

時間の関数としての粒子のエネルギーは、

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{1}{E^2}\mathrm{d}E = -\int_0^t \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^4c^5}B^2\mathrm{d}t$$

ここで、$E(0) = E_0$ を用いた。これは次の式を与える。

$$\frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E_0} = \frac{e^4B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4c^5}t \ \Rightarrow\ E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t}$$

よって α は、

A.4	$\alpha = \dfrac{e^4B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4c^5}$	1.0点

A.5

生成直後の電子のエネルギーが 100 GeV であるとき、軌道の半径は $r = E/eBc \approx 167\,m$ と、非常に大きくなる。よって、電子はATLAS検出器の内部を、近似的に直線軌道で動くとみなすことができる。電子の移動時間は $t = R/c$、また、検出器内部の半径は $R = 1.1\,m$。よって、シンクロトロン放射によって失う全エネルギーは、

$$\Delta E = E(R/c) - E_0 = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 \frac{R}{c}} - E_0 \approx -\alpha E_0^2\frac{R}{c}$$

ゆえに、

A.5	$\Delta E = -56\,\mathrm{MeV}$	0.5点

A.6

超相対論的極限では、$v \approx c$ ，$E \approx pc$ となる。サイクロトロン周波数は、

$$\omega(t) = \frac{c}{r(t)} = \frac{ecB}{p(t)} = \frac{ec^2B}{E(t)}$$

よって、

A.6 0.5点

$$\omega(t) = \frac{ec^2B}{E_0}\left(1 + \frac{e^4B^2}{6\pi\epsilon_0 m^4c^5}E_0 t\right)$$

Part B. ニュートリノを探す (6.0点)

B.1

W^+ボソンは反ミューオンとニュートリノに崩壊するため、エネルギーと運動量の保存則が適用でき、ニュートリノの運動量の z成分 $p_z^{(\nu)}$ を求めることができる。さらに、反ミューオンとニュートリノは質量がないとみなすことができ、$E = pc$ とできる。よって、運動量保存則は、

$$\vec{p}^{(W)} = \vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)}$$

また、エネルギー保存則は、

$$E^{(W)} = cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)}$$

さらに、W^+ボソンの質量、エネルギー、運動量の関係式は、

$$m_W^2 = (E^{(W)})^2/c^4 - (p^{(W)})^2/c^2$$

これらの式より、$p_z^{(\nu)}$ についての二次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} m_W^2 &= [(p^{(\mu)} + p^{(\nu)})^2 + (\vec{p}^{(\mu)} + \vec{p}^{(\nu)})^2]/c^2 \\ &= (2p^{(\mu)}p^{(\nu)} - 2\vec{p}^{(\mu)} \cdot \vec{p}^{(\nu)})/c^2 \end{aligned}$$

よって、

B.1 1.5点

$$m_W^2 = \frac{1}{c^2}\left(2p^{(\mu)}\sqrt{(p_\mathrm{T}^{(\nu)})^2 + (p_z^{(\nu)})^2} - 2\vec{p}_\mathrm{T}^{(\mu)} \cdot \vec{p}_\mathrm{T}^{(\nu)} - 2p_z^{(\mu)}p_z^{(\nu)}\right)$$

B.2

次の数値をB.1で求めた式に代入する。

$$p^{(\mu)} = 37.2\,\mathrm{GeV}/c, \quad m_W^2c^2 = 6464.2\,(\mathrm{GeV}/c)^2, \quad p_\mathrm{T}^{(\nu)2} = 10\,864.9\,(\mathrm{GeV}/c)^2$$

$$\vec{p}_\mathrm{T}^{(\mu)} \cdot \vec{p}_\mathrm{T}^{(\nu)} = 2439.3\,(\mathrm{GeV}/c)^2, \quad p_z^{(\mu)} = -12.4\,\mathrm{GeV}/c$$

よって、

$$6464.2 = 74.4\sqrt{10\,864.9 + p_z^{(\nu)2}} - 4878.6 + 24.8\,p_z^{(\nu)}$$

この二次方程式は、

$$0.88889\,p^{(\nu)2} + 101.64\,p^{(\nu)} - 12378 = 0$$

と同値であり、解は、

B.2 1.5点

$$p_z^{(\nu)} = 74.0\,\mathrm{GeV}/c \qquad \text{or} \qquad p_z^{(\nu)} = -188.3\,\mathrm{GeV}/c$$

B.1 の方程式を直接解くと、

$$p_z^{(\nu)} = \frac{2\overrightarrow{p}_{\mathrm{T}}^{(\mu)}\cdot\overrightarrow{p}_{\mathrm{T}}^{(\nu)}p_z^{(\mu)} + m_W^2c^2p_z^{(\mu)} \pm p^{(\mu)}\sqrt{-4(p_{\mathrm{T}}^{(\mu)})^2(p_{\mathrm{T}}^{(\nu)})^2 + 4(\overrightarrow{p}_{\mathrm{T}}^{(\mu)}\cdot\overrightarrow{p}_{\mathrm{T}}^{(\nu)})^2 + 4\overrightarrow{p}_{\mathrm{T}}^{(\mu)}\cdot\overrightarrow{p}_{\mathrm{T}}^{(\nu)}m_W^2c^2 + m_W^4c^4}}{2(p_{\mathrm{T}}^{(\mu)})^2}$$

この式に数値を代入すると、上で得られた $p_z^{(\nu)}$ になる。

B.3

トップクォークの崩壊の終状態は、反ミューオン、ニュートリノ、Jet 1 である。ニュートリノの運動量は前問より求められているので、トップクォークのエネルギーと運動量は次の式となる。

$$E^{(t)} = cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)} + cp^{(j_1)}$$
$$\overrightarrow{p}^{(t)} = \overrightarrow{p}^{(\mu)} + \overrightarrow{p}^{(\nu)} + \overrightarrow{p}^{(j_1)}$$

よって、トップクォークの質量は、

$$m_t = \sqrt{(E^{(t)})^2/c^4 - (\overrightarrow{p}^{(t)})^2/c^2} = c^{-1}\sqrt{(p^{(\mu)} + p^{(\nu)} + p^{(j_1)})^2 - (\overrightarrow{p}^{(\mu)} + \overrightarrow{p}^{(\nu)} + \overrightarrow{p}^{(j_1)})^2}$$

数値を代入することで、２つの解が得られる。

B.3 1.0点

$$m_t = 169.3\,\mathrm{GeV}/c^2 \quad \text{or} \quad m_t = 331.2\,\mathrm{GeV}/c^2$$

B.4

「シグナル」(破線部分) の質量分布によると、$m_t = 169.3\,\mathrm{GeV}/c^2$ である確率は、約 0.1 であり、$m_t = 331.2\,\mathrm{GeV}/c^2$ である確率は、約 0.01 以下となる。よって、

B.4 1.0点

最も可能性が高い解は、$m_t = 169.3\,\mathrm{GeV}/c^2$

B.5

トップクォークのエネルギーで、最も可能性が高いのは、$E^{(t)} = cp^{(\mu)} + cp^{(\nu)} + cp^{(j_1)} = 272.6\,\mathrm{GeV}$

$$d = vt = v\gamma t_0 = \frac{p^{(t)}}{m_t}t_0 = ct_0\sqrt{\frac{E^{(t)2}}{m_t^2c^4} - 1}$$

B.5 1.0点

$$d = 2\times 10^{-16}\,m$$

生体組織の物理(10 points)

Part A. 血液流の物理 (4.5 points)

A. 1

血管網は対称的なので、階層i+1の血管における血流は、階層iにおける血流の半分である。このようにして、全ての階層で圧力差を合計できる。

$$\Delta P = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i R_i = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{2^i}.$$

半径に依存したRの式を代入し、

$$\Delta P = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i \eta}{2^i \pi r_i^4} = Q_0 \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} = Q_0 N \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4} .$$

したがって、

$$Q_0 = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{8N\ell_0 \eta} .$$

よって、階層iでの血管網での体積流量は、

A.1	1.3pt
$$Q_i = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{2^{i+3} N \ell_0 \eta} .$$	

A.2

値を代入し、適切に単位をかえると、

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\Delta P \pi r_0^4}{8N\ell_0 \eta} = \\ &= \frac{(55-30) \times 1.013 \times 10^5 \times 3.1415 \times (6.0 \times 10^{-5})^4}{760 \times 48 \times 2.0 \times 10^{-3} \times 3.5 \times 10^{-3}} = 4.0 \times 10^{-10}\ \mathrm{m^3/s} \end{aligned}$$

要求された単位での最終的な値は、

A.2	0.5pt
$$Q_0 \simeq 1.5\ \mathrm{m\ell/h} .$$	

A.3

複素数表示で電流Iは、
$$I = \frac{P_{\text{in}}e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} .$$

コンデンサーの電位差は、
$$P_{\text{out}}e^{i(\omega t+\phi)} = \frac{P_{\text{in}}e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} \frac{1}{i\omega C} = \frac{P_{\text{in}}e^{i\omega t}}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1} .$$

その振幅は
$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

$\omega \to 0$　において、P_{in}より小さくなるためには、
$$(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2 > 1 \iff -2CL + C^2R^2 > 0 .$$

L，C、Rの表式を代入して、
$$\underline{\frac{64\eta^2\ell^2}{3Ehr^3\rho} > 1} .$$

A.3 2.0pt

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

Condition:
$$\frac{64\eta^2\ell^2}{3Ehr^3\rho} > 1 .$$

P_{out}を得る別の方法
等価回路の電流振幅は，、 $I = \frac{P_{\text{in}}}{Z}$

今、インピーダンスの絶対値は　$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

であるから、コンデンサーにかかる電圧の振幅は、
$$P_{\text{out}} = \frac{1}{\omega C} \times I_0 = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} .$$

A.4

前の式を変形して、　$h < \frac{64\eta^2\ell^2}{3Er^3\rho}$

A. 2の血管網に対して、
$$h < \frac{64\eta^2\ell_0^2 \times 2^i}{3 \times 2^{2i/3} E r_0^3 \rho} = \frac{64 \times (3.5\times10^{-3})^2 \times (2.0\times10^{-3})^2}{3 \times 0.06 \times 10^6 \times (6.0\times10^{-5})^3 \times 1.05\times10^3} \times 2^{i/3} = 7.7\times10^{-5} \times 2^{i/3} .$$

最悪の場合は i=0に対してであり、 $h_{\text{max}} = 7.7\times10^{-5}\times2^0 = 7.7\times10^{-5}$ m

実際の観測では、毛細血管の内径は18μmから60μmの範囲にあり、血管の厚さが80μmより小さいというこの値は妥当である。
（訳注：毛細血管と比較しているのは、初めは i=5, h=2×10^{-4} m が解答とされ、後にi=0と修正されたときに、この文章は変更されなかったためと考えられる。）

A.4	Maximum $h = 8\times10^{-5}$ m	0.7pt

Part B. 腫瘍の成長(5.5 points)

B.1

腫瘍と正常な生体組織の質量は

$$\begin{cases} M_{\text{T}} = V_{\text{T}}\rho_{\text{T}} = V_{\text{T}}\rho_0(1+\frac{p}{K_{\text{T}}}) \\ M_{\text{N}} = V\rho_0 = (V-V_{\text{T}})\rho_0(1+\frac{p}{K_{\text{N}}}) \end{cases}$$

圧力 pは次のように表される。

$$p = \frac{M_{\text{T}}\,K_{\text{T}}}{V_{\text{T}}\,\rho_0} - K_{\text{T}}$$

M_{N}の式に代入すると

$$M_{\text{N}} = (V-V_{\text{T}})\,\frac{M_{\text{N}}}{V}\left[\left(1-\frac{K_{\text{T}}}{K_{\text{N}}}\right)+\frac{M_{\text{T}}\,V K_{\text{T}}}{V_{\text{T}}\,M_{\text{N}}\,K_{\text{N}}}\right]$$

簡単にして、vの方程式は次のようになる　$(1-\kappa)\,v^2 - (1+\mu)v + \mu = 0$,

この式の解は次のようになる。
（２次方程式のうちもう一つの解はv=0でμ=0とならないので不適）

B.1 1.0pt

$$v = \frac{1+\mu-\sqrt{(1+\mu)^2-4\mu\,(1-\kappa)}}{2(1-\kappa)}\,.$$

B.2

$r < R_{\text{T}}$ においてエネルギー収支は

$$4\pi r^2(-k)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \mathcal{P}\frac{4}{3}\pi r^3$$

したがって、37 ℃=310. 15 Kに対する温度の差$\Delta T(r)$は次のようになる　$\Delta T(r) = -\frac{\mathcal{P}r^2}{6k} + C,$

Cは積分定数である。

$r > R_T$ において、エネルギー保存則によると　$4\pi r^2(-k)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \mathcal{P}\frac{4}{3}\pi R_T^3$

37 ℃=310. 15 Kに対する温度の差$\Delta T(r)$は　$\Delta T(r) = \frac{\mathcal{P}R_T^3}{3kr}$

rが無限大のときΔTはゼロだから積分定数はゼロである。

２つの式のΔT が$r = R_T$において一致することから、　$C = \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}.$

したがって、腫瘍の中心での温度はSI単位系で以下のようになる。

B.2	Temperature: $310.15 + \frac{\mathcal{P}R_T^2}{2k}$.	1.7pt

B.3

腫瘍の表面（腫瘍のうち最も温度が低いところ）において37 ℃=310. 15 Kに対する温度の差$\Delta T(r)$は次のようになる

$$\Delta T(R_T) = \frac{\mathcal{P}R_T^2}{3k}.$$

これが6. 0 Kであるので、

$$\mathcal{P} = \frac{3\Delta Tk}{R_T^2} = \frac{3\times 6\times 0.6}{0.05^2} = 4.3\ \mathrm{kW/m^3}.$$

B.3	$\mathcal{P}_{\mathrm{min}} = 4.3\ \mathrm{kW/m^3}$.	0.5pt

B.4

式(4)からδrとp-P_{cap}についての最初の次数の項を取り出すと、δrと腫瘍の圧力pとの関係は

$$\delta r = \frac{p - P_{\mathrm{cap}}}{2(p_c - P_{\mathrm{cap}})}\,\delta r_c\,.$$

また圧力と体積の関係はB. 1における計算から、

$$\frac{M_N}{V_N} = \frac{\rho_0 V}{V - V_T} = \frac{\rho_0}{1 - v} = \rho_0\left(1 + \frac{p}{K_N}\right)$$

であり、次のようになる。 $p = \frac{K_N v}{1-v}$.

毛細血管がより狭くなれば血管網全体を流れる血液の体積流量（階層 0 を流れる血液に等しい）も変わる。

$$\Delta P = (Q_0 + \delta Q_0) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i \eta}{2^i \pi r_i^4} = (Q_0 + \delta Q_0) \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4} \left(\sum_{i=0}^{N-2} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} + \frac{2^{4(N-1)/3}}{2^{N-1} 2^{(N-1)/3} \left(1 - \frac{\delta r}{r_0/2^{(N-1)/3}}\right)^4} \right)$$

$$\Longrightarrow \Delta P \simeq (Q_0 + \delta Q_0) \frac{\Delta P}{N Q_0} \left(N - 1 + 1 + \frac{4\,\delta r}{r_{N-1}} \right)$$

$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{\delta Q_0}{Q_0}$，より、次の式を得る。

$$1 + \frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{1}{1 + \frac{4\,\delta r}{N r_{N-1}}} \simeq 1 - \frac{4\,\delta r}{N r_{N-1}} .$$

したがって、

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}$$

すべてを合わせて、

B.4 2.3pt

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{2}{N} \frac{K_N v - (1-v) P_{\mathrm{cap}}}{(1-v)(p_{\mathrm{c}} - P_{\mathrm{cap}})} \frac{\delta r_{\mathrm{c}}}{r_{N-1}} .$$