

全般的な注意：理論試験

2016年7月14日

理論試験は5時間で、合計30点である。

試験前

- ・試験開始を告げる音声による合図がある前に、問題の入っている封筒を開いてはならない。
- ・試験の開始と終了は、音声による合図で指示する。また、1時間経過するごとに告知を行う。さらに、試験終了の15分前（試験終了の合図の前）にも同様の告知を行う。

試験中

- ・用意された解答用紙は、自分の解答を記入するためのものである。対応する解答用紙（Aと記入されている）の枠の中に最終結果を記入せよ。さらに、各問題には、詳細な作業を実行するための余分な白紙（ワークシート）（Wと記入されている）が用意されている。現在作業している問題に対応するワークシートを用いているかどうか、つねに注意すること（用紙上部にある問題番号をチェックせよ）。採点されたくないことを用紙に記入してしまった場合には、その箇所に「×」印を付けること。用紙の表のみを使うこと。
- ・解答は、できるだけ簡潔にせよ。つまり、自分の考えていることを、できる限り数式、論理演算、図を用いて説明し、長文の使用は避けること。
- ・数値に言及するときは、適切な有効数字で答えることが要求される。
- ・前の問題に答えられなくても後の問題に答えることが可能な場合がある。
- ・物理定数のリストを次ページに表示する。
- ・許可なしに試験の場を離れてはいけぬ。何か補助が必要な場合には（飲料水を補給したい場合や、電卓が壊れた場合、トイレに行きたい場合など）、部屋に付属されたホルダーのなかにある3つのフラッグのうちの1つを掲げて、チームガイドに伝えること（"Refill my water bottle, please"（水のペットボトルが欲しい）、"I need to go to the toilet, please"（トイレに行きたい）、あるいはその他のすべての場合には、"I need help, please"（助けが欲しい））。

試験終了時

- ・試験の終了時には直ちに書くのをやめなければならない。
- ・それぞれの問題について、用紙を次のように仕分けること：表紙（C）、問題（Q）、解答用紙（A）、ワークシート（W）。
- ・1つの問題に対する用紙は、すべて同じ封筒のなかに入れること。また、全般的な注意（G）は、残った別の封筒の中に入れること。自分の学生コード（student code）が封筒の窓から見えるようにしなさい。さらに、何も記入していない用紙も提出すること。試験場からどの用紙も持ち出してはいけぬ。
- ・主催者が準備した青い電卓は机の上に残しておくこと。
- ・筆記用具（2本のボールペン、1本のサインペン、1本のシャープペンシル、1個のはさみ、1本の定規、2組の耳栓）および各自の電卓（持ち込み可能なもの）は持ち帰ること。飲み物のペットボトルも持ち帰ってよい。

- 封筒が回収されるまで、自分の席で待ちなさい。すべての封筒が回収されると、ガイドが試験場の外へ誘導する。

物理定数表

真空中の光速	c	$=$	$299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
真空の透磁率 (磁気定数とも呼ばれる)	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-2}\cdot\text{s}^{-2}$
真空の誘電率 (電気定数とも呼ばれる)	ϵ_0	$=$	$8.854\,187\,817\dots \times 10^{-12}\text{ A}^2\cdot\text{s}^4\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$
電気素量	e	$=$	$1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19}\text{ A}\cdot\text{s}$
電子の質量	m_e	$=$	$9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31}\text{ kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
陽子の質量	m_p	$=$	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
中性子の質量	m_n	$=$	$1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27}\text{ kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \frac{\text{MeV}}{c^2}$
統一原子質量単位	m_u	$=$	$1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27}\text{ kg}$
リュードベリ定数	R_∞	$=$	$10\,973\,731.568\,508(65)\text{ m}^{-1}$
万有引力定数	G	$=$	$6.674\,08(31) \times 10^{-11}\text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
重力加速度 (チューリヒにおけるもの)	g	$=$	$9.81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
プランク定数	h	$=$	$6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
アヴォガドロ数	N_A	$=$	$6.022\,140\,857(74) \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
気体定数	R	$=$	$8.314\,4598(48)\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
モル質量定数 (Molar mass constant)	M_u	$=$	$1 \times 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$
ボルツマン定数	k_B	$=$	$1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
シュテファン・ボルツマン定数	σ	$=$	$5.670\,367(13) \times 10^{-8}\text{ kg}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{K}^{-4}$

力学2題 (10点)

問題を解き始めるまえに、別の封筒のなかに入った「全般的な注意」を読みなさい。

Part A. 隠された円盤 (3.5点)

半径 r_1 、厚さ h_1 の固い木製円柱を考える。この木製円柱の内部のどこかに半径 r_2 、厚さ h_2 の金属の円盤が入っている。金属円盤の中心軸 B は、木製円柱の中心軸 S と平行であり、また、金属円盤は木製円柱の上面と下面から等距離の所に置かれている。 S と B の距離を d 、木の密度を ρ_1 、金属の密度を ρ_2 として、 $\rho_2 > \rho_1$ とする。木製円柱と金属円板の質量の合計を M とする。

この問題では、この木製円柱を基盤の上に置き、円柱が左右に自由に転がるようにする。図1は横から見た図 (a) と真上から見た図 (b) である。

Part A のゴールは、金属円盤の大きさや位置を求めることである。

以下の問題では、

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M \quad (1)$$

という量は与えられているものとして、間接的な測定によって、 r_2, h_2, d を求めることが目的である。

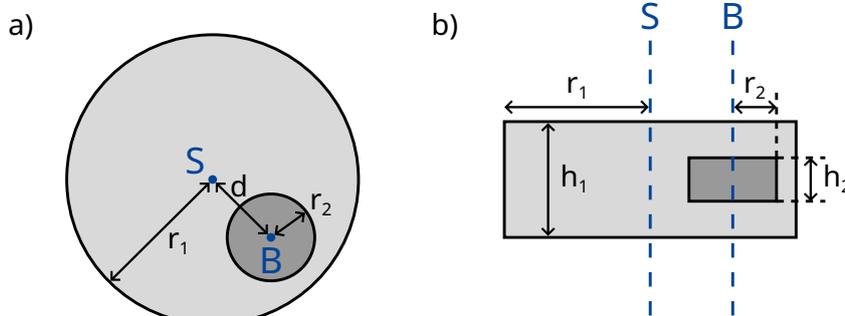


図1：a) 横から見た図 b) 真上から見た図

全体の重心 C と木製円柱の中心軸 S との間の距離を b とする。この距離 b を求めるために、以下の実験を行う。まず、この木製円柱を水平な基盤の上に置いて、安定な平衡状態にあるようにする。次に、この基盤をゆっくりと傾けて、その角を θ にする (図2)。静摩擦のために、木製円柱はすべることなく自由に転がる。木製円柱は傾斜を角度 ϕ まで転がって後安定な平衡状態となる。この角度 ϕ を測定する。

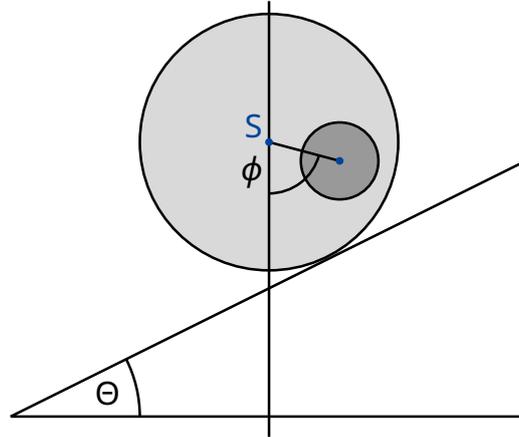


図2：傾いた基盤の上にある円柱。

A.1 (1)で示した量と角度 ϕ と基盤の傾斜角 θ の関数として、 b を表せ。

0.8pt

以下では、 b は知られているものと仮定する（解答中に用いてよい）。

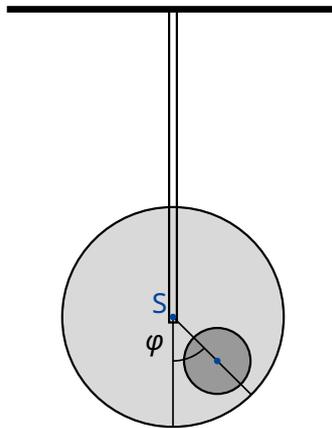


図3：吊るされた円柱。

次に、この木製円柱の中心軸 S のまわりの慣性モーメント I_S を測定する。そのために、この木製円柱を中心軸 S のところで、固定した棒にとりつける。ただし S のまわりで木製円柱は回転できる。その木製円柱をつりあいの状態から小さな角度 φ だけ回してから放す（図3を見よ）。このとき、 φ は周期 T で周期的に変化する。

A.2 φ に対する運動方程式を求めよ。木製円柱の中心軸 S のまわりの慣性モーメント I_S を、 T, b と (1) に示された量を用いて表せ。つりあいの状態からのずれ φ は常に小さいものとする。

0.5pt

問題 A.1 と **問題 A.2** の測定結果から、円柱内部の金属円盤の形状と位置を求めたい。

A.3 中心軸の位置 d を、 b と (1) で示された量で表せ。この結果に r_2 と h_2 を変数として含んでもよい (これらは問題 A.5 で求める)。 0.4pt

A.4 慣性モーメント I_S を b および (1) の量で表せ。解答には、 r_2 と h_2 が変数として含まれていてもよい (これらは問題 A.5 で求める)。 0.7pt

A.5 これまでに求めたすべての結果を用いて、 h_2 と r_2 を b, T および (1) の量を用いて表せ。 h_2 を r_2 の関数として表してもよい。 1.1pt

Part B. 回転する宇宙ステーション (6.5 点)

アリスは宇宙ステーションに住む宇宙飛行士である。宇宙ステーションは半径 R の巨大な車輪のようになっていて、中心軸のまわりに回転している。それによって、宇宙飛行士たちにとっての人工的な重力が与えられている。宇宙飛行士たちは、宇宙ステーションの外輪の内側に住む。宇宙ステーションによる万有引力と、床の曲率は無視できる。

B.1 宇宙飛行士が地球上の重力加速度 g_E と同じ加速度を感じる時、宇宙ステーションの角速度 ω_{ss} を求めよ。 0.5pt

宇宙飛行士どうしの友人アリスとボブは議論をしている。ボブは宇宙ステーションに住んでいることが信じられず、じつは地球上に住んでいるのではないかと疑っている。アリスはボブが回転する宇宙ステーションに住んでいることを物理を使って示したいと思っている。そのために、彼女は質量 m の物体をばね定数 k のばねに取り付けて振動させることを思いついた。物体は鉛直方向にしか振動せず、水平方向には動くことができないものとする。

B.2 地球表面における重力は一定であるとして、その加速度を g_E とするとき、地球上にいる人が測定する振動の角振動数 ω_E を求めよ。 0.2pt

B.3 宇宙ステーションのなかで、アリスが測定した場合の振動の角振動数 ω を求めよ。 0.6pt

アリスは、回転する宇宙ステーションに宇宙飛行士たちがいるということが実験によって証明されると確信している。しかし、ボブは納得しなかった。彼は、もし地表面での高度による重力変化を考慮したら、同じ結果が得られるのではないかと考えた。

以下の問題で、ボブの疑問が正しいかどうか考えよう。

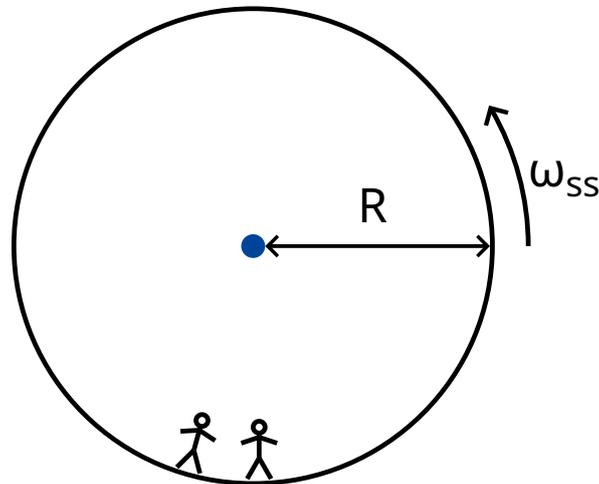


図4：宇宙ステーション

- B.4** 地球表面から小さな高さ h における重力加速度 $g_E(h)$ の表式を求めて、振動する物体の角振動数 $\tilde{\omega}_E$ を求めよ（線形近似で十分である）。地球の半径を R_E とする。地球の自転は無視せよ。 0.8pt

実際、この宇宙ステーションでは、ばね振り子の振動数はボブが予想したとおりであることを、アリスは確認した。

- B.5** 地球における角振動数 $\tilde{\omega}_E$ と等しい角振動数 ω でばね振り子が振動するときの、宇宙ステーションの半径 R を求めよ。地球の半径 R_E を用いて表せ。 0.3pt

ボブのがんこさにいらしたアリスは、更なる実験をおこなって、ここは宇宙ステーションの中であることを証明することにした。そのために、彼女は宇宙ステーションの床から高さ H の塔にのぼって、物体を落とすことにした。この実験は、慣性系で考えることもできるし、回転座標系で考えることもできる。

一様に（一定の角速度で）回転している座標系では、コリオリ力と呼ばれるみかけの力 \vec{F}_C が宇宙飛行士には見える。一定の角速度 $\vec{\omega}_{ss}$ で回転する座標系において、速度 \vec{v} で運動する質量 m の物体が受けるコリオリ力 \vec{F}_C は、次のように与えられる：

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

あるいは、スカラー量で表現すると、以下のようになる：

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

ここで ϕ は速度ベクトルと回転軸のなす角である。力の向きは、速度 v と回転軸の両方に垂直である。力の向きは右手の法則にしたがっているが、どちらの向きにとってもかまわない。

- B.6** 物体が床にぶつかったときの、（塔の真下を基準として塔とは垂直な向きの）物体の水平方向の速さ v_x と物体の水平方向の変位 d_x を求めよ。ただし、塔の高さ H は小さく、物体が落下している間は加速度は一定であるとみなしてよい。また、 $d_x \ll H$ としてよい。 1.1pt

良い結果を得るために、アリスはこれまでよりもっと高い塔の上から実験をおこなうことにした。しかし、アリスは驚いたことに、物体は塔の真下に落ちたのであった。つまり、 $d_x = 0$ である。

B.7 $d_x = 0$ となるような塔の高さの下限を求めよ。

1.3pt

アリスは、ボブを説得しようと、また別の方法を試みた。コリオリ力の影響を示すために、ばね振り子を用いようとしたのである。そのために、彼女は実験のセットアップを以下の図のように作り変えた：棒の上を x 方向に摩擦なしに動くことができるリングに、さっきのばねを取り付けた。ばね自身は、 y 方向に振動する。棒は床に平行で、宇宙ステーションの回転軸に垂直である。したがって、 xy 平面は回転軸に垂直であり、 y 方向が常に宇宙ステーションの回転の中心を向くようになっている。

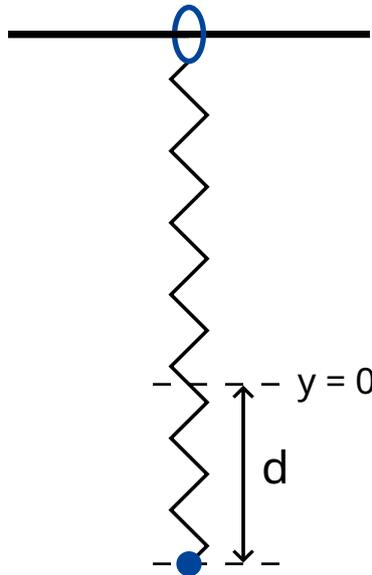


図5：セットアップ

B.8 平衡位置 $x = 0, y = 0$ から、アリスは物体を距離 d だけ引き下げて、ばねを離した (図5を見よ) 1.7pt

- $x(t)$ と $y(t)$ の表式を求めよ。 $\omega_{ss}d$ は小さいとしてよい。また、 y 方向の運動についてはコリオリ力を無視してよい。
- 軌跡 $(x(t), y(t))$ をスケッチせよ (概略図を描け)。振幅のような、軌跡の重要な特徴はすべて記載すること。

アリスとボブは、議論を続ける……

電気回路における非線形ダイナミクス (10 点)

問題を解き始めるまえに、別の封筒のなかに入った「全般的な注意」を読みなさい。

イントロダクション

双安定な（ふたつの安定な状態をもつ）非線形半導体素子は、スイッチや電磁振動の発生器として、電子工学でひろく使われる。そのような素子の例として、サイリスタ (thyristor) がある。サイリスタの最も重要な応用分野は、電力工学において交流電流を制御することである。例えば、サイリスタはメガワットのスケールで交流電流を直流電流に整流することができる。また、双安定な素子は、物理学のなかでも (Part B)、生物学のなかでも (Part C)、あるいはその他の現代の非線形科学のなかでも、自己組織化現象のモデルとして用いられる。

ゴール

非線形な $I-V$ 特性をもった素子を含む回路の、不安定性と非自明なダイナミクスについて考える。そのような回路の、工学的な応用と、生物系のモデリングへの応用を見出す。

Part A. 定常状態と不安定性 (3 点)

図1が示しているのは、非線形素子 X の、いわゆる **S 字型 $I-V$ 特性** である。 $U_h = 4.00 \text{ V}$ (保持電圧、the holding voltage) から $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (しきい電圧、the threshold voltage) までの電圧領域では、この $I-V$ 特性は、ひとつの電圧に対して複数の電流をとる。簡単のため、図1のように、特性曲線は折れ線であるとみなす (グラフのそれぞれの部分は直線とみなしてよい)。なお、上側の部分は、延長すると原点を通っている。この近似は、実際のサイリスタの特徴を説明するのに、よい近似となっている。

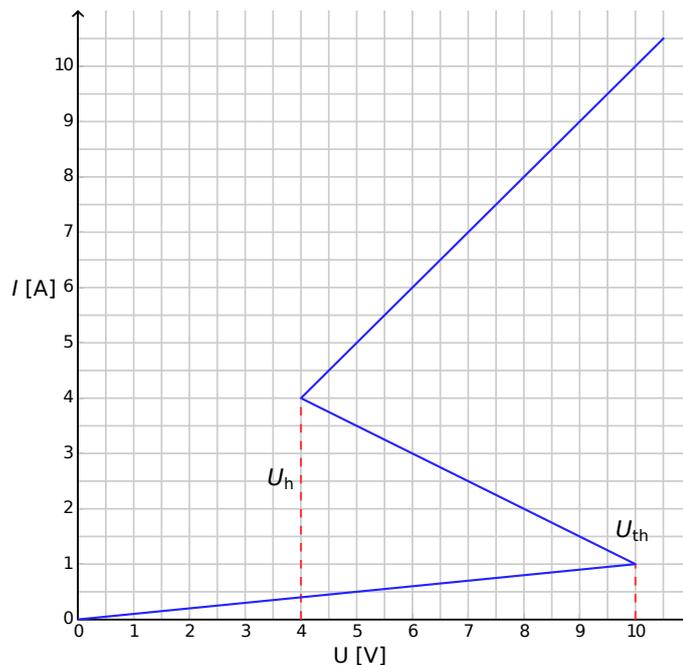


図1：非線形素子 X の $I-V$ 特性。

- A.1** 図1のグラフを用いて、 $I-V$ 特性の上側の部分における、素子 X の抵抗 R_{on} の数値を求めよ。同様にして、下側の部分における抵抗 R_{off} の数値を求めよ。また、中間の部分は、次の式で記述される： 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}} \quad (1)$$

このとき、パラメーター I_0 と R_{int} の数値を求めよ。

非線形素子 X は、抵抗 R 、コイル L 、理想的な電圧源 \mathcal{E} と直列につながっている (図2)。回路が定常状態にあるとは、電流が時間変化せずに一定になること ($I(t) = \text{const}$) と定義する。

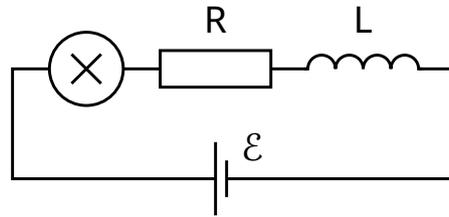


図2：素子 X 、抵抗 R 、コイル L 、電圧源 \mathcal{E} によって構成された回路。

- A.2** 図2の回路で、 \mathcal{E} の値が適当に固定され、 $R = 3.00 \Omega$ である場合に、定常状態となりえる状態の数は何個か？ また、 $R = 1.00 \Omega$ である場合には、定常状態の数はどうに変わるか？ 1pt

- A.3** 図2の回路で、 $R = 3.00 \Omega$, $L = 1.00 \mu\text{H}$, $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ とする。定常状態において、電流 $I_{\text{stationary}}$ の数値と、素子 X にかかる電圧 $V_{\text{stationary}}$ の数値を求めよ。 0.6pt

図2の回路が $I(t) = I_{\text{stationary}}$ という定常状態にあるとする。電流の値が定常状態の値からわずかに離れたときに (定常状態の値からわずかに増加あるいは減少したときに)、定常状態に戻る向きに状態が変化するならば、定常状態は「安定である (stable)」と定義する。定常状態から離れる向きに状態が変化するならば、定常状態は「不安定である (unstable)」と定義する。

- A.4** 問題 A.3 で設定された数値の場合に、定常状態 $I(t) = I_{\text{stationary}}$ の安定性について 1pt
考える。定常状態は安定か、あるいは不安定か？

Part B. 物理学のなかの双安定非線形素子：無線送信機 (5点)

次に、新しい回路を考える (図3)。この場合には、非線形素子 X は、静電容量 $C = 1.00 \mu\text{F}$ をもつコンデンサーと並列につながれている。そして、この非線形素子とコンデンサーは、抵抗 $R = 3.00 \Omega$ と電圧源 $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ と直列につながれている。この場合には、回路は振動することがわかっている。その振動の1周期において、非線形素子 X は、 $I-V$ 特性曲線のひとつの直線部分からべつの直線部分へと不連続的にジャンプする。

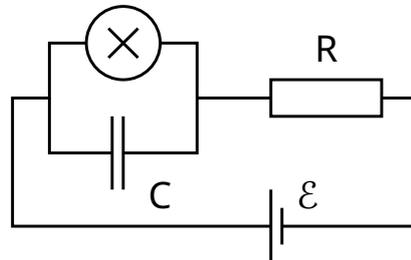


図3：素子 X 、コンデンサー C 、抵抗 R 、電圧源 ε によって構成された回路。

B.1 振動の1周期の状態の変化を、 $I-V$ グラフのなかに描け。振動の向き（時計回りか反時計回り）もグラフのなかに示すこと。また、式とスケッチ（概略図）を用いて、そのように状態が変化する理由も説明せよ。 1.8pt

B.2 振動の1周期において、 $I-V$ グラフの一方の直線部分と他方の直線部分にいる時間 t_1 と t_2 をそれぞれ求めよ。表式だけではなく、数値も求めること。また、 $I-V$ グラフのなかで一方の直線部分から他方の直線部分へとジャンプする時間は無視できるとしたとき、振動の周期 T の数値を求めよ。 1.9pt

B.3 振動の1周期において、非線形素子が消費する平均の電力（パワー） P を概算せよ。オーダーの評価のみで十分である。 0.7pt

図3の回路は、無線送信機（ラジオ送信機）をつくるときに用いられる。無線送信機をつくるときには、素子 X は長さ s の長い直線状のアンテナに取り付けられる。このとき、素子を取り付けた端と逆側の端は自由端になる。アンテナのなかでは、電磁波の定在波が形成されている。アンテナを伝わる電磁波の速さは、真空中のものと同じである。また、送信機は、問題 B.2 で得られた周期 T をもつ系の基本周波数を用いている。

B.4 s は 1 km 以下であるとしたとき、 s として最適な値を求めよ。 0.6pt

Part C. 生物学のなかの双安定非線形素子：ニューリスタ（2点）

この Part では、双安定非線形素子を生物のモデリングに応用することを考える。まず、人間の脳のなかにあるニューロンは、次のような性質をもっている：外部からの信号で刺激されると、1回だけ振動して、もとの状態に戻る。この特徴は興奮性と呼ばれるが、この特徴のために、神経系を構成するニューロンのネットワークのなかでパルスが伝わるのが可能となる。そして、ニューロンの興奮性とパルスの伝達に似た性質をもつように設計された半導体チップのことを、「ニューリスタ (neuristor)」と呼ぶ（ニューロン neuron とトランジスタ transistor を合わせた言葉である）。

これまでに考えてきた非線形素子 X を含む回路を用いて、ニューリスタの簡単なモデルをつくることを考えよう。そのためには、まず、図3の回路のなかにある電圧 ε を、 $\varepsilon' = 12.0 \text{ V}$ までいったん下げる必要がある。そうすると、振動は起こらなくなり、系は定常状態に達する。そして、電圧を再び $\varepsilon = 15.0 \text{ V}$ まで急激に増加させて、時間 τ ($\tau < T$) が経った後に、電圧を ε' まで戻す（図4を見よ）。このとき、 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ の場合と $\tau > \tau_{\text{crit}}$ の場合とでは質的に異なる振舞いを示すような、臨界値 τ_{crit} が存在する。

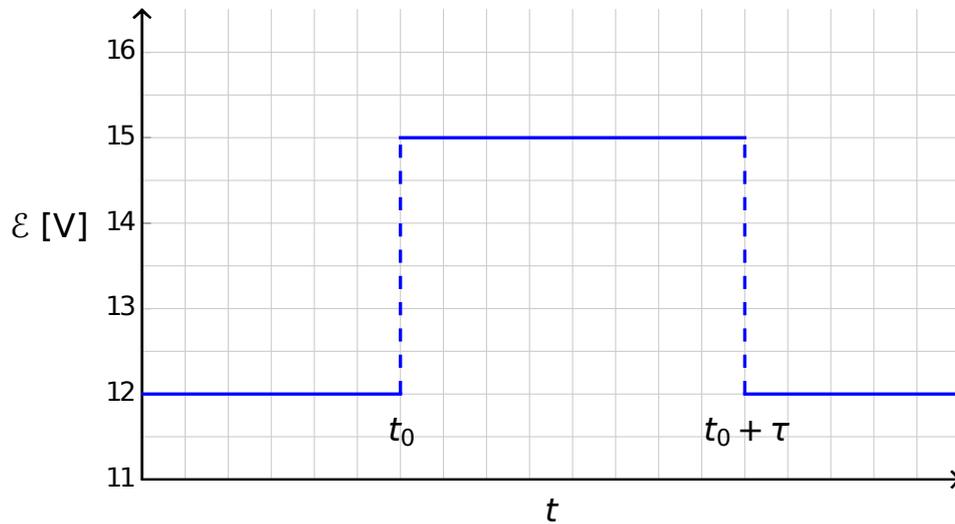


図4：電圧源から発せられる電圧の時間変化。

C.1 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ と $\tau > \tau_{\text{crit}}$ のそれぞれの場合について、素子 X を流れる電流 $I_X(t)$ の時間依存性のグラフをスケッチせよ（定性的に描け）。 1.2pt

C.2 臨界値 τ_{crit} の、表式と数値を求めよ。 0.6pt

C.3 $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s である回路は、ニューリスタとして機能するといえるか？ 0.2pt

大型ハドロン衝突型加速器 (10 points)

問題に取り組む前に、別の封筒に入っている「全般的な注意」を読みなさい。

この問題では、CERN 研究所の粒子加速器 LHC (Large Hadron Collider : 大型ハドロン衝突型加速器) の物理について議論する。CERN 研究所は世界最大級の素粒子物理学の実験施設であり、基礎的な自然法則に対する知見を得ることが CERN の主要な目標である。LHC では、粒子のビームを高いエネルギーまで加速し、強い磁場によってリング状の加速器内を周回させて、時計回りと反時計回りのビームを互いに衝突させる。加速器内の陽子は、リングに沿って一様には分布しておらず、バンチとよばれる集団をいくつか形成して周回している。衝突によって生成した粒子は大きな粒子検出器によって観測される。LHC に関するパラメータは、表 1 にまとめられている。

LHC リング	
リングの周長	26659 m
一方向に周回しているビームに含まれる陽子の"バンチ"の数	2808
"バンチ"あたりに含まれる陽子の数	1.15×10^{11}
陽子ビーム	
陽子のエネルギー	7.00 TeV
衝突における重心系でのエネルギー	14.0 TeV

表 1 : LHC に関するパラメータの典型的な数値

素粒子物理学では、エネルギー、運動量、質量の単位として次のような単位を用いるのが便利である。まず、エネルギーは [eV] で表される。その定義から、1 eV は素電荷 e の粒子が 1V の電位差を通過する際に得るエネルギーに等しい ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$)。また、運動量は eV/c という単位で、質量は eV/c^2 という単位で表される。ここで、 c は真空中の光速である。素粒子物理では、1 eV のエネルギーは非常に小さい量であり、MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$)、GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$)、TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$) といった単位が用いられる。

Part A では、陽子や電子の加速について取り扱う。Part B では、CERN での衝突実験によって生じる粒子の種類の見分けについて議論する。

Part A. LHC 加速器 (6 points)

粒子の加速

電圧 V によって光速に近い速度まで加速された陽子を考えよう。ここで、放射や他の粒子との衝突によるエネルギー損失は無視する。

A.1 加速後の陽子の速度 v の正確な表式を、加速電圧 V および物理定数を用いて求めよ。 0.7pt

CERN では今後の実験として、LHC によって加速された陽子とエネルギーが 60.0 GeV の電子を衝突させることが計画されている。

- A.2** 質量の小さい粒子が高エネルギーに加速された場合、その粒子の速度 v の光速との相対的なずれ $\Delta = (c - v)/c$ は非常に小さい。電子について、1次近似での Δ の表式を、加速電圧 V と物理定数を用いて求めよ。また、60.0 GeV のエネルギーでの Δ の値を計算せよ。 0.8pt

LHC を周回する陽子について再び考えよう。LHC のリングは円形とする。

- A.3** 陽子ビームを円軌道に保つために必要な一様な磁束密度 B を、陽子のエネルギー E 、リングの周長 L 、基礎物理定数と数字のみで表せ。近似による効果が有効数字の最後の桁に比べて小さければ、適宜近似を用いてよい。陽子のエネルギーが $E = 7.00$ TeV の場合に、磁束密度 B を計算せよ。陽子同士の相互作用は無視してよい。 1.0pt

放射パワー

加速度を持つ荷電粒子は、エネルギーを電磁波として放射する。荷電粒子が一定の角速度で円運動している時の放射パワー P_{rad} は、加速度 a 、電荷 q 、光速 c 、真空の誘電率 ϵ_0 のみに依存する。

- A.4** 次元解析を用いることで、放射パワー P_{rad} の表式を求めよ。 1.0pt

放射パワーの実際の表式には、 $1/(6\pi)$ という因数と相対論的な取り扱いから出てくる因数 γ^4 が追加で掛かる。ここで、 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ である。

- A.5** LHC を回るすべての陽子について、放射パワーの合計 P_{tot} を計算せよ。陽子1つのエネルギーは $E = 7.00$ TeV とする (表 1)。適切な近似を用いてもよい。 1.0pt

線形加速器

CERN では、静止した陽子は電位差 $V = 500$ MV を持つ長さ $d = 30.0$ m の線形加速器によって加速される。この区間での電場は一様であると仮定する。線形加速器は図 1 に示されているように、2 枚の電極からなる。

- A.6** 陽子がこの電場を通過するのにかかる時間 T を決定せよ。 1.5pt

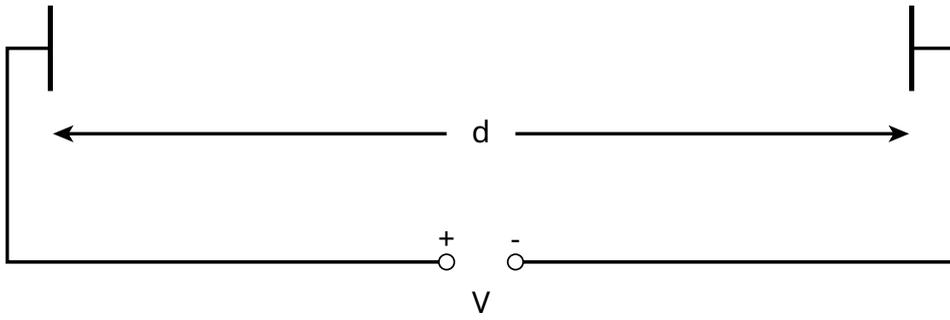


図 1: 加速ユニットのスケッチ

Part B. 粒子の識別 (4 points)

飛行時間:

衝突における相互作用の過程を理解するためには、衝突によって生じた高エネルギー粒子の種類を識別することが重要である。そのための単純な方法は、運動量の分かっている粒子がある距離 l を通過するのにかかる時間 t を飛行時間検出器を用いて測定することである。このような検出器によって特定される典型的な粒子とそれらの質量を表 2 に示す。

粒子	質量 [MeV/c ²]
重陽子	1876
陽子	938
荷電 K 中間子	494
荷電 π 中間子	140
電子	0.511

表 2: 粒子の種類と質量

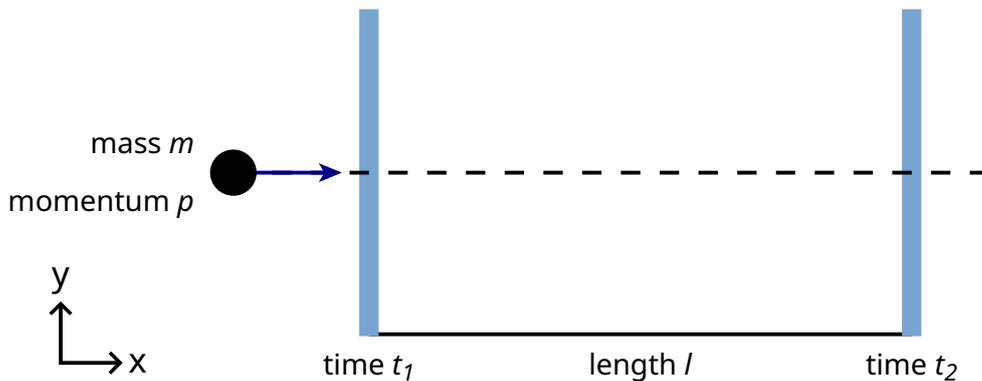
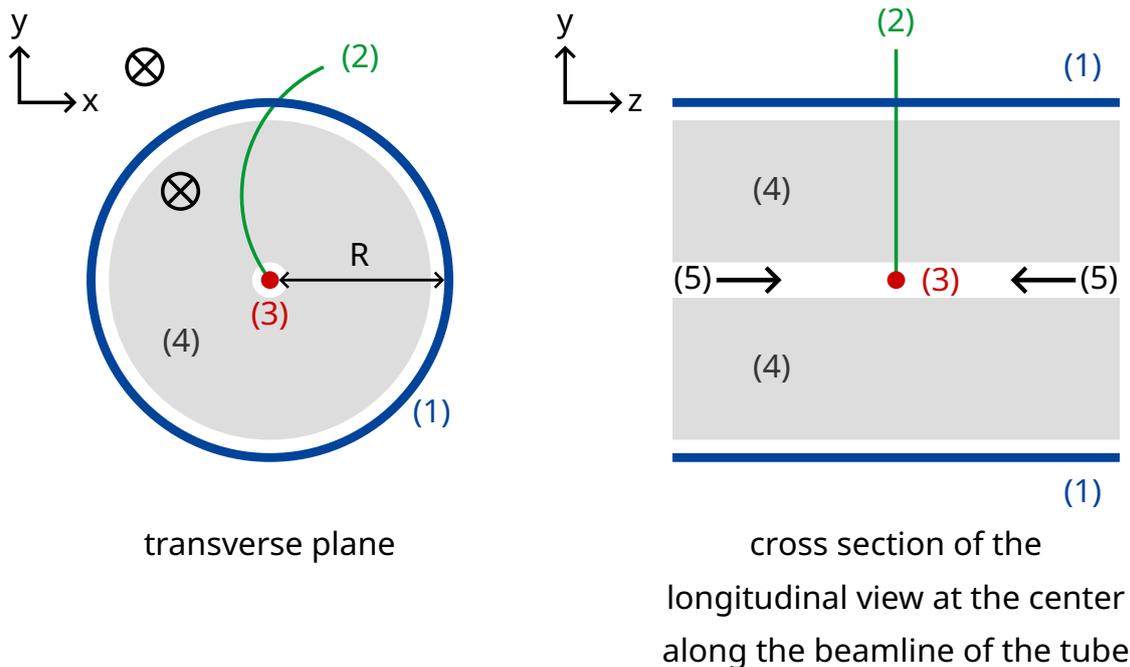


図 2: 飛行時間検出器の概略図 (図中の語の訳: mass= 質量、momentum= 運動量、time= 時刻、length= 長さ)

- B.1** 粒子の質量 m を、運動量 p 、飛行距離 l 、飛行時間 t を用いて表せ。ただし、粒子は素電荷 e を持ち、光速 c に近い速さを持つとする。また、飛跡は直線状で、2つの飛行時間検出器の面を垂直に通過するとする (図 2 を見ること)。 0.8pt

B.2 運動量がともに $1.00 \text{ GeV}/c$ の荷電 π 中間子と荷電 K 中間子を十分良く識別するために最低限必要となる飛行時間検出器の長さ l を計算せよ。十分良い識別のためには、飛行時間の差が検出器の時間分解能の3倍以上であることが必要である。飛行時間検出器の典型的な時間分解能は 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$) である。 0.7pt

LHCにおいて生成された粒子は、飛跡検出器と飛行時間検出器の2段階からなる検出器群によって識別される。このセットアップの断面図を、陽子ビームに垂直な向きと平行な向きについて図3に示す。両方の検出器は、衝突点を囲む円筒状の形状で、ビームはその中心を通る。飛跡検出器は、内部の磁場中を通過する荷電粒子の飛跡を測定する。ここで、磁場は陽子ビームと平行な向きにかけられている。測定された飛跡の半径 r から、ビーム軸に垂直な方向の運動量 p_T を求めることができる。また、粒子の衝突時刻は既知であるため、衝突時刻を起点とした飛行時間の測定のためには、飛行時間検出器は1層あれば十分である。この飛行時間検出器は、飛跡検出器のすぐ外側に設置されている。この問題では、陽子ビームの衝突によって生成された粒子は、全て陽子ビームに垂直な面内を運動し、陽子ビームに平行な方向の運動量は0であると仮定する。



- (1) - 飛行時間検出器
- (2) - 粒子の飛跡
- (3) - 衝突点
- (4) - 飛跡検出器
- (5) - 陽子ビーム
- ⊗ - 磁場

図3：飛跡検出器と飛行時間検出器を用いた粒子識別のための実験セットアップ。2つの検出器は、中心の衝突点を囲む円筒状の形である。左図：ビームラインに垂直な断面図。右図：ビームラインを通りビームラインに平行な断面図。生成された粒子は、ビームラインに垂直な面内を運動している。

B.3 粒子の質量を、磁束密度 B 、飛行時間検出器の円筒の半径 R 、物理定数、測定量 1.7pt
(飛跡の半径 r と飛行時間 t) を用いて表せ。

我々は粒子を 4 つ検出した。そこで、それぞれの粒子の種類を同定したい。飛跡検出器内の磁束密度は $B = 0.500 \text{ T}$ である。また、飛行時間検出器の円筒の半径 R は 3.70 m である。測定結果は、以下にまとめられている。ここで、 $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ である。

粒子	飛跡の半径 r [m]	飛行時間 t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 これらの粒子の質量を計算することによって、粒子の種類をそれぞれ同定せよ。 0.8pt

力学2題 (10点)

Part A. 隠された円盤 (3.5点)

A.1 (0.8 pt)

$$b =$$

A.2 (0.5 pt)

φ の運動方程式：

$$I_S =$$

A.3 (0.4 pt)

$$d =$$

A.4 (0.7 pt)

$$I_S =$$

A.5 (1.1 pt)

$$h_2 =$$

$$r_2 =$$

Part B. 回転する宇宙ステーション (6.5 点)

B.1 (0.5 pt)

$$\omega_{ss} =$$

B.2 (0.2 pt)

$$\omega_E =$$

B.3 (0.6 pt)

$$\omega =$$

B.4 (0.8 pt)

$$g_E(h) =$$

$$\tilde{\omega}_E =$$

B.5 (0.3 pt)

$$R =$$

B.6 (1.1 pt)

$$v_x =$$

$$d_x =$$

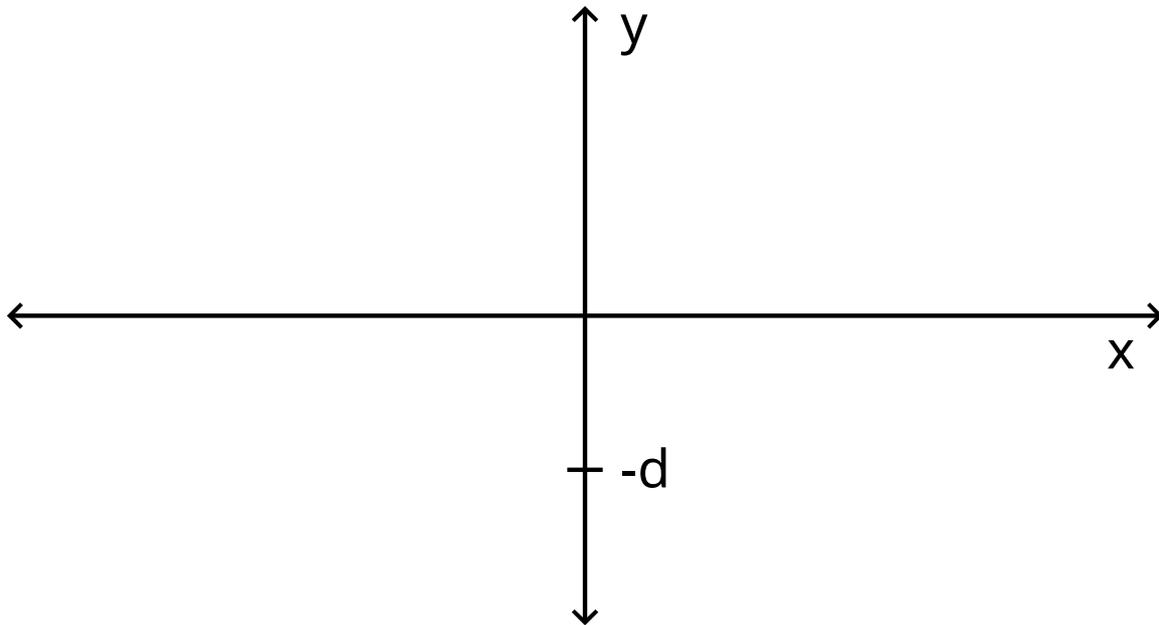
B.7 (1.3 pt)

$$H \geq$$

B.8 (1.7 pt)

$$x(t) =$$

$$y(t) =$$



電気回路における非線形ダイナミクス (10 点)

Part A. 定常状態と不安定性 (3 点)

A.1 (0.4 pt)

$$R_{\text{on}} =$$

$$R_{\text{off}} =$$

$$I_0 =$$

$$R_{\text{int}} =$$

A.2 (1 pt)

$R = 3.00 \, \Omega$ の場合 :

$R = 1.00 \, \Omega$ の場合 :

A.3 (0.6 pt)

$$I_{\text{stationary}} =$$

$$V_{\text{stationary}} =$$

A.4 (1 pt)

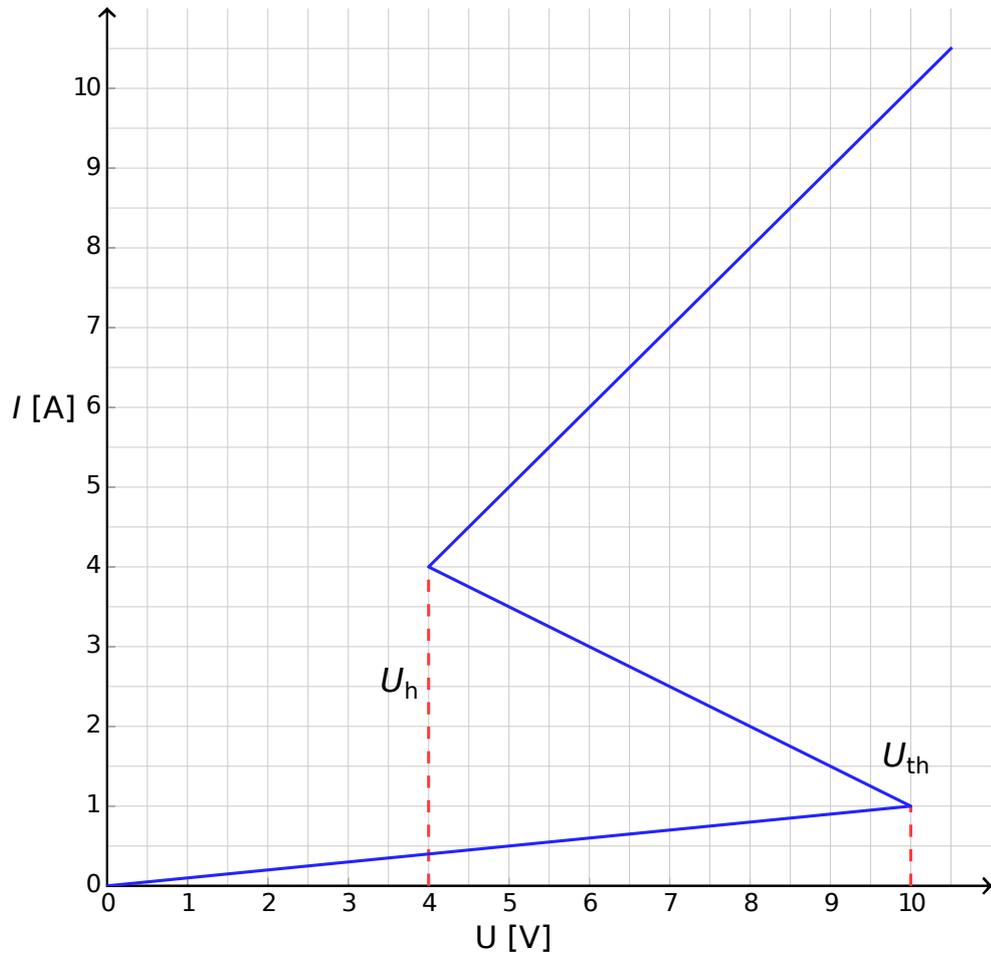
$I(t = 0) > I_{\text{stationary}}$ の場合のふるまい：

$I(t = 0) < I_{\text{stationary}}$ の場合のふるまい：

定常状態は、安定か、不安定か？： stable? unstable?

Part B. 物理学のなかの双安定非線形素子：無線送信機 (5 点)

B.1 (1.8 pt)



理由の説明：

B.2 (1.9 pt)

式 $t_1 =$

数值 $t_1 =$

式 $t_2 =$

数值 $t_2 =$

数值 $T =$

B.3 (0.7 pt)

$P \approx$

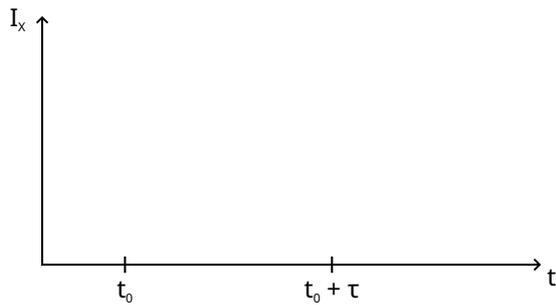
B.4 (0.6 pt)

$s =$

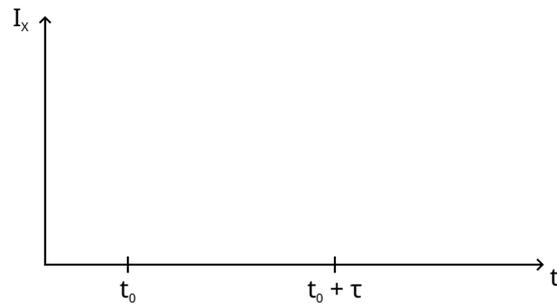
Part C. 生物学のなかの双安定非線形素子：ニューリスター (2点)

C.1 (1.2 pt)

$\tau < \tau_{\text{crit}}$ における概略図：



$\tau > \tau_{\text{crit}}$ における概略図：



C.2 (0.6 pt)

式 $\tau_{\text{crit}} =$

数値 $\tau_{\text{crit}} =$

C.3 (0.2 pt)

この回路はニューリスターか？ Yes No

大型ハドロン衝突型加速器 (10 points)

Part A. LHC 加速器 (6 points)

A.1 (0.7 pt)

$$v =$$

A.2 (0.8 pt)

近似式: $\Delta =$

計算値: $\Delta =$

A.3 (1.0 pt)

式: $B =$

計算値: $B =$

A.4 (1.0 pt)

$$P_{\text{rad}} \propto$$

A.5 (1.0 pt)

$$P_{\text{tot}} =$$

A.6 (1.5 pt)

$T =$

Part B. 粒子の識別 (4 points)

B.1 (0.8 pt)

$m =$

B.2 (0.7 pt)

$l =$

B.3 (1.7 pt)

$m =$

B.4 (0.8 pt)

粒子	質量	単位 []	同定した粒子名
A			
B			
C			
D			