問題 1 ： 解答/採点基準 ― 力学 2 題（10 点）

Part A. 隠された円盤（3.5 点）

A1（0.8 点） (1)で示した量と角度ϕと基盤の傾斜角Θの関数としてbを表せ。

A1 の解答: **[0.8]**

幾何学を用いた解答: 接点の周りのトルクが 0 であることを用いる。

$\Longrightarrow$ 重心は接点の真上でなければならない。

$$\sin\phi = \frac{D}{b}$$ **0.3**

$$\sin\Theta = \frac{D}{r_1}$$ **0.3**

ここでDは違う記号でもよい。これを解くと

$$\sin\phi = \frac{r_1}{b}\sin\Theta \Longrightarrow b = \frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$$ **0.2**

別解 1: 別の点の周りのトルクと力を考える **[0.8]**

トルクの正しい表式

$$(r_1\sin\Theta - b\sin\phi)Mg$$ **0.3**

力の正しい表式

$$(r_1\sin\Theta - b\sin\phi)Mg = 0$$ **0.3**

正しい答え

$$b = \frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$$ **0.2**

別解 2

重心を G, 接点を T とおくと、三角形 SGT について∠STG =Θ, ∠SGT の外角=ϕ

ST=r_1, SG=b. 正弦定理から

$$\frac{r_1}{\sin\phi} = \frac{b}{\sin\Theta}$$

よって,

$$b = \frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$$

A2 (0.5 点) φに対する運動方程式を求めよ。木製円柱の中心軸Sのまわりの慣性モーメントI_Sを、T , bと(1)に示された量を用いて表せ。つりあいの状態からのずれφは常に小さいものとする。

A2 の解答: **[0.5]**

次のような形の式を書くこと：$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi$ **0.1**
$\varphi = A\cos\omega t$の形の式を書いてもよい。
二通りの解法がある：

1. 運動エネルギー$\frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2$と位置エネルギー$-bMg\cos\varphi$を用いる。全エネルギーは保存するのでその時間微分が運動方程式を与える。
2. トルクから回転運動方程式を立てる。 $\tau = I_S\ddot{\varphi} = -Mgb\sin\varphi$

正しい表式（エネルギー保存則でも回転運動方程式でもよい） **0.3**
最終的な解

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_S}{Mgb}} \Rightarrow I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$ **0.1**

（導出）

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgb}{I_S}\sin\varphi \approx -\frac{Mgb}{I_S}\varphi$$

だから

$$\omega^2 = \frac{Mgb}{I_S}$$

A3 (0.4 点) 中心軸の位置dを、bと(1)で示された量で表せ。この結果にr_2と h_2を変数として含んでいてもよい。（これらは**問題 A.5** で求める）

A3 の解答: **[0.4]**

次のような重心の表式

$$b = \frac{dM_2}{M_1 + M_2}$$ **0.2**

正しい答え：$M_1 + M_2 = M,\ M_2 = \pi h_2 r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)$ から

$$d = \frac{bM}{\pi h_2 r_2^2(\rho_2 - \rho_1)}$$ **0.2**

A4（0.7 点） 慣性モーメントI_Sをbおよび(1)の量で表せ。解答には、r_2とh_2を変数として含んでいてもよい。（これらは**問題 A.5** で求める）

A4 の解答： **[0.7]**

均質な円盤の慣性モーメントの正しい表式

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4$$ **0.2**

質量の誤り **−0.1**

円盤の慣性モーメントの表式中で係数 1/2 の誤り **−0.1**

‘余分な’円盤の慣性モーメントの正しい表式

$$I_2 = \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4$$ **0.2**

Steiner の定理（平行軸の定理）を用いて

$$I_S = I_1 + I_2 + \pi d^2 r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$ **0.1**

正しい答え：

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \pi\left(\frac{bM}{\pi h_2 r_2^2(\rho_2 - \rho_1)}\right)^2 r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \frac{b^2M^2}{\pi r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)}$$ **0.2**

---

b ではなくdを用いて結果を書いた場合、最終的な答えに 0.2 点ではなく 0.1 点を与える。 **0.1**

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \pi d^2 r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$

（訳注）

解答中のI_1、I_2とはそれぞれの円盤の中心軸周りの慣性モーメントのことである。
また、’余分な’円盤とは、問題文の図 1 の状況を、密度ρ_1の円柱と密度$(\rho_2 - \rho_1)$の円盤が組み合わさってできたものと考えたときの、後者である。

A5 (1.1 点) これまでに求めたすべての結果を用いて、h_2とr_2をb, Tおよび(1)の量を用いて表せ。h_2をr_2の関数として表してもよい。

A5 の解答: [1.1]

生徒がこの一連の方程式をどれほど正しく解こうとしたかを測るのは難しい。次の式を用いることが考えられる。

$$M = \pi r_1^2 h_1 \rho_1 + \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1)$$ **0.3**

I_Sの表式を解いてr_2^2を求める

$$r_2^2 = \frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\left(I_S - \frac{1}{2} M r_1^2 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\right)$$ **0.4**

I_SをTで書き換える

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$ **0.1**

正しく解いてr_2を求める

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\left(\frac{MgbT^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2} M r_1^2 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\right)}$$ **0.1**

$M = \pi r_1^2 h_1 \rho_1 + \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1)$を用いて$h_2$を求める表式を書き下すと

$$h_2 = \frac{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}{\pi r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}$$ **0.2**

Part B. 回転する宇宙ステーション (6.5 点)

B1 (0.5 点) 宇宙飛行士が地球上の重力加速度g_Eと同じ加速度を感じるとき、宇宙ステーションの角速度ω_{ss}を求めよ。

B1 の解答: [0.5]

次のような中心力の表式

$$F_{ce} = m\omega^2 r$$ **0.1**

力の釣り合いから、正しい表式は

$$g_E = \omega_{ss}^2 R$$ **0.2**

正しい答えは

$$\omega_{ss} = \sqrt{\frac{g_E}{R}}$$ **0.2**

B2（0.2 点） 地球表面における重力は一定であるとして、その加速度をg_Eとするとき、地球上にいる人が測定する振動の角振動数ω_Eを求めよ。

B2 の解答: **[0.2]**

結果がg_Eによらないことに気づくこと **0.1**

正しい結果

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ **0.1**

B3（0.6 点） 宇宙ステーションの中で、アリスが測定した場合の振動の角振動数ωを求めよ。

B3 の解答: **[0.6]**

次のような力の正しい表式

$$F = -kx \pm m\omega_{ss}^2 x$$ **0.2**

正しい符号を取る

$$F = -kx + m\omega_{ss}^2 x$$ **0.2**

正しい微分方程式を立てる

$$m\ddot{x} + (k - m\omega_{ss}^2)x = 0$$ **0.1**

正しい結果を得る

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_{ss}^2}$$ **0.1**

ω_{ss}^2の代わりにg_E/Rを用いてもよい。

B4 (0.8 点) 地球表面から小さな高さhにおける重力加速度$g_E(h)$の表式を求めて、振動する物体の角速度$\widetilde{\omega}_E$を求めよ(線形近似で十分である)。地球の半径をR_Eとする。地球の自転は無視せよ。

B4 の解答: **[0.8]**

$$g_E(h) = -\frac{GM}{(R_E+h)^2}$$ **0.1**

重力を線形近似すると

$$g_E(h) = -\frac{GM}{R_E^2} + 2h\frac{GM}{R_E^3} + \cdots$$ **0.2**

$g_E = GM/R_E$であることを用いると

$$g_E(h) = -g_E + \frac{2hg_E}{R_E} + \cdots$$ **0.1**

どちらの項も逆符号であるならば、逆符号でもよい。
このことが力に対して真に及ぼす影響、すなわち定数項は平衡点(基準点)をずらすことにより消去できることに気づくと

$$F = -kx + 2xmg_E/R_E$$ **0.2**

正しい微分方程式を立てる

$$m\ddot{x} + \left(k - \frac{2mg_E}{R_E}\right)x = 0$$ **0.1**

正しい結果

$$\widetilde{\omega}_E = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2g_E}{R_E}}$$ **0.1**

B5 (0.3 点) 地球における角振動数$\widetilde{\omega}_E$と等しい角振動数ωでばね振り子が振動するときの、宇宙ステーションの半径Rを求めよ。地球の半径R_Eを用いて表せ。

B5 の解答: **[0.3]**

次の式を書き下す

$$\omega_{ss}{}^2 = 2g_E/R_E$$ **0.1**

解くと

$$R = \frac{R_E}{2}$$ **0.2**

g_EではなくGM/R_E^2が用いられていたら、0.1 点のみを与える。

B6 (1.1 点) 物体が床にぶつかったときの、(塔の真下を基準として塔とは垂直な向きの)物体の水平方向の速さv_xと物体の水平方向の変位d_xを求めよ。ただし、塔の高さHは小さく、物体が落下している間は加速度は一定であるとみなしてよい。また、$d_x \ll H$であるとしてよい。

B6 の解答: **[1.1]**

可能な解法がいくつかある。

解法 1 — コリオリ力を用いる

- 速度v_x

  正しい速度を用いてコリオリ力の式を書くと

  $$F_C(t) = 2m\omega_{ss}^2 Rt\omega_{ss} = 2m\omega_{ss}^3 Rt$$ **0.1**

  これを積分するか、速度について等加速度運動のようになることを用いると、

  $$v_x(t) = \omega_{ss}^3 Rt^2$$ **0.2**

  ここで

  $$t = \sqrt{2H/\omega_{ss}^2 R}$$ **0.2**

  を代入すると正しい結果が得られる。

  $$v_x = 2H\omega_{ss}$$ **0.1**

- 変位d_x

  $v_x(t)$を積分すると

  $$d_x = \frac{1}{3}R\omega_{ss}^3 t^3$$ **0.3**

  積分する代わりに単に最終速度の 1/2 をとって’平均’すると 1/3 のかわりに 1/2 という係数になる。*この場合 0.1 点を引く。* **−0.1**

  tに代入すると

$$d_x = \frac{1}{3} R\omega_{ss}^3 \left(\frac{2H}{\omega_{ss}^2 R}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} 2^{3/2} H^{3/2} R^{-1/2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8H^3}{R}}$$ **0.2**

解法 2 ― 慣性系を用いる

この解法は B7 の解法に似ているが、解法 1 よりも複雑な近似が必要である。

- v_x

  ここでϕは物体の掃く角度で、αは物体が床に着くまでに宇宙飛行士(と塔)が回転した角度である。(図 1 を見よ。)

  慣性系において物体の初速度は$v_x = \omega_{ss}(R-H)$である。 **0.1**

  物体が着地するまでに、x方向(水平方向)は角度ϕだけ回転しているので、新しい水平に沿った速度は

  $$\omega_{ss}(R-H)\cos\phi$$ **0.1**

  ($d_x \ll H$であるから$\cos\phi$のかわりに$\cos\alpha$と書いてもよい)

  $$\cos\phi = \frac{R-H}{R} = 1 - \frac{H}{R}$$ **0.1**

  回転座標系に変換するときは、$\omega_{ss}R$を引かなければならない。 **0.1**

  最終的に(物体が床に着地した時点で)飛行士の静止系から見ると

  $$v_x = \omega_{ss}R\left(1-\frac{H}{R}\right)^2 - \omega_{ss}R \approx \omega_{ss}R\left(1-\frac{2H}{R}\right) - \omega_{ss}R = -2H\omega_{ss}$$ **0.2**

  速度の正負は座標系の取り方に依存するので、正の符号でもよい。

- d_x

  v_xを計算したときの記号を用いて

  $$d_x = (\alpha - \phi)R$$ **0.1**

  $$\phi = \arccos\left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

  $$\alpha = \omega_{ss}t$$

  ここでtは物体が落下するのにかかる時間で、

  $$t = \frac{\sqrt{R^2 - (R-H)^2}}{\omega_{ss}(R-H)}$$ **0.1**

  (B7 の解答を参照せよ)

  $\xi \equiv H/R$とすると

  $$d_x = \left[\frac{\sqrt{1-(1-\xi)^2}}{1-\xi} - \arccos(1-\xi)\right]R$$ **0.3**

  となり、これがこの問題に対する正確な解である。必要ではないが、小さなξに対して近似をすることが可能である。

$$\arccos(1-\xi) \approx \sqrt{2\xi}\left(1+\frac{\xi}{12}\right)$$

小さなξに対する近似を行い$\xi = H/R$を代入すると解法 1 と同じ解が出てくる。

$$d_x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

係数 2/3 が欠けていたら 0.1 点引く。 $-\mathbf{0.1}$

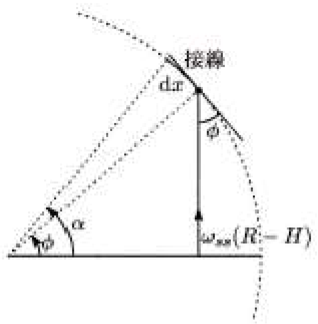


図 1: 解法 2 で用いる記号の定義

解法 3 — 慣性系で考え、幾何学の技法を用いる

これはd_xを得る別解である。

物体の移動距離はlで、落ちる間に宇宙ステーションは角度αだけ回転するとする。図 2 を参照せよ。方冪の定理により

$$l^2 = H(2R-H)$$ $\mathbf{0.1}$

回転角は $\alpha = \omega_{SS} t$で

$$t = \frac{l}{\omega_{SS}(R-H)}$$ $\mathbf{0.1}$

は落下するのにかかる時間である。ゆえに

$$\alpha = \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H}$$ $\mathbf{0.1}$

$$\frac{d_x}{R} = \alpha - \arcsin\frac{l}{R} = \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H} - \arcsin\sqrt{\xi(2-\xi)}$$ $\mathbf{0.1}$

$\xi \equiv \frac{H}{R}, y \equiv \sqrt{\xi(2-\xi)}$とすると

$$\arcsin y \approx y + \frac{y^3}{6}$$

であるから

$$\frac{d_x}{R} \approx y(1+\xi) - y - \frac{y^3}{6} = y\left(\xi - \frac{y^2}{6}\right) \approx \frac{2\xi y}{3} \approx \frac{2\xi\sqrt{2\xi}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R^3}}$$

より，最終的な解は,

$$d_x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$ **0.1**

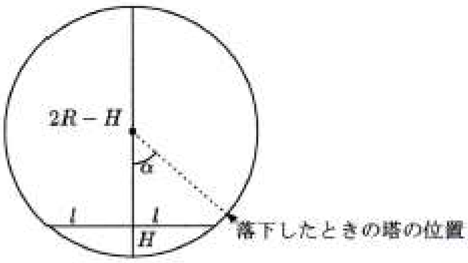


図 2: 解法 3 で用いる記号の定義

(訳注) arcsin，arccos の近似式を用いなくても sin，cos の近似だけで正解を得る。

この d_x を ϕ で表すと

$$d_x = \left[\frac{\sin\phi}{\cos\phi} - \phi\right]R \approx [\frac{\phi - \frac{1}{6}\phi^3}{1 - \frac{1}{2}\phi^2}]R \approx \frac{\phi^3}{3}R$$

これから $\phi = \sqrt{2\xi}$ を代入すれば

$$d_x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

と正しい結論が導かれる

B7（1.3 点） $d_x = 0$となるような塔の高さの下限を求めよ。

B7 の解答: **[1.3]**

問題を解く鍵は回転しない座標系を用いることである。中心に十分近いところで物体が放されると，その速度は十分小さいので地面にぶつかる前に宇宙ステーションが2π以

上回転することができるだろう。

速度は次の式で与えられる。

$$v = \omega_{ss}(R - H)$$ **0.1**

宇宙ステーションにぶつかるまでに物体が移動する距離dは

$$d^2 = R^2 - (R - H)^2$$ **0.1**

回転しない座標系で考えて衝突までにかかる時間tを得る。

$$t = \frac{d}{v} = \frac{\sqrt{R^2 - (R - H)^2}}{\omega_{ss}(R - H)}$$ **0.1**

そしてHと宇宙ステーションの回転角ϕの関係式を導出する方法はいくつかある。

解法 1

$$t = \frac{R \sin \phi}{\omega_{ss} R \cos \phi}$$ **0.2**

この結果と$t = \phi/\omega_{ss}$という結果により次の式を得る。

$$\phi = \tan \phi$$ **0.2**

無限個の解が存在することに気付くこと **0.2**

この式は自明な解$\phi = 0$をもつ。次の解は$3\pi/2$より少しだけ小さく$H > R$となり、これは正しくない。3 番目の解がHの下限を与える。

$$\phi \approx 5\pi/2$$

$\phi = \tan \phi$という式はグラフ的にも数値的にも解くことができ、おおよその解$\phi = 7.725\ \mathrm{rad}$を得る。このとき

$$\frac{H}{R} = (1 - \cos \phi) \approx 0.871$$

方法が正しいならば得られたH/Rの値によって下記の点数を与える。 **0.4**

$0.85 \leq H/R \leq 0.88$　0.4 点

$0.5 \leq H/R < 0.85$　0.3 点

$0 < H/R < 0.5$ または$H/R > 0.88$　0.2 点

$H = 0$ または 方法が誤っている場合　0 点

解法 2

Hと回転角ϕの関係式

$$\frac{R - H}{R} = \cos \phi$$ **0.2**

により次の式を得る。

$$\frac{H}{R} = 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{1-(1-H/R)^2}}{1-H/R}\right)$$ **0.2**

図 3 に$f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{1-(1-x)^2}}{1-x}\right)$のグラフを与える。 2 番目の交点の近似値を求めよう。

最初の交点は捨てる。なぜならば$\cos\phi = \cos(-\phi)$であるがために交点になってしまったのであり、$H > R$となるからだ。

無限個の解が存在することに気づくこと **0.2**

- 新たに変数$x \coloneqq 1 - H/R$を定義すると、与式は次のようになる。

$$x = \cos\left(\sqrt{1-x^2}/x\right) =: g(x)$$

- $g(x)$は最初の解にいたるまで（最初の解よりもxの大きいところでは）xよりも小さい。特にある領域では負となる（図 4）。3 番目のゼロ点が解の下限を与える。

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 5\pi/2$$

- 下限を与える。

$$x = 1/\sqrt{25\pi^2/4+1} \Rightarrow H = R\left(1 - 1/\sqrt{25\pi^2/4+1}\right) \approx 0.874R$$

注意：厳密な解は$H/R = 0.871\ldots$である。

答えの数値については解法 1 で述べたのと同様の点数を与える。 **0.4**

gでなくfをプロットして$f(x) = x$の解を見つけたならば上の解と等価である。同様の点数を与える。

$\cos\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$を用いても良い。

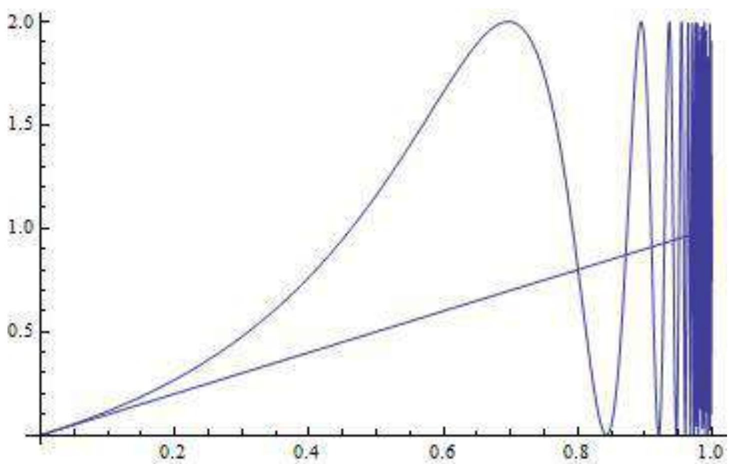


図 3: $f(H/R)$とH/Rのグラフ

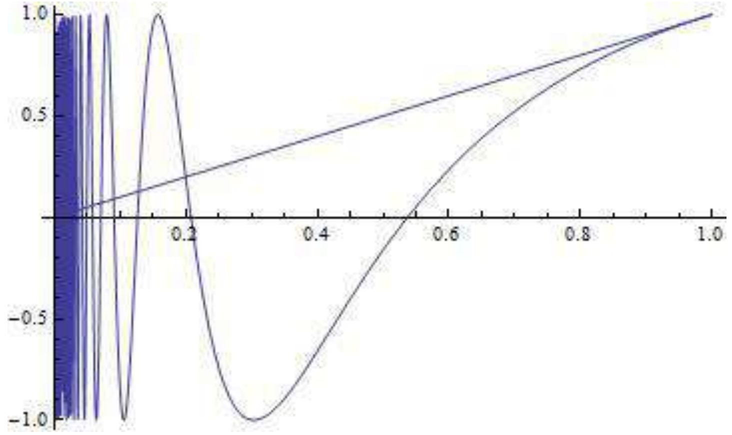


図 4: $g(x)$とxのグラフ

B8（1.7 点） 平衡位置$x=0, y=0$から、アリスは物体を距離dだけ引き下げて、ばねを離した（図 5 を見よ）。

- $x(t)$と$y(t)$の表式を求めよ。$\omega_{ss}d$は小さいとしてよい。また、y方向の運動についてはコリオリ力を無視してよい。
- 軌跡$\left(x(t), y(t)\right)$をスケッチせよ（概略図を描け）。振幅のような、軌跡の重要な特徴はすべて記載すること。

B8 の解答: **[1.7]**

注意: コリオリ力の符号については言及してこなかった。逆符号を用いていても同じ点数を与えるが、整合性がなければならない！整合性のない場合、各々*0.1 点*を引く。 **−0.1**

ωを用いて全ての式を表しても良く、$\sqrt{k/m-\omega_{ss}^2}$とあらわに書く必要はない。しかしωのかわりにk/mを用いていたら 0.1 点を引く。 **−0.1**

$y(t)$は調和振動であることに気づく。

$$y(t) = A\cos\omega t + B$$ **0.1**

初期条件を用いて定数を正しく与える。

$$y(t) = -d\cos\omega t$$ **0.2**

$v_y(t)$の正しい表現

$$v_y(t) = d\omega\sin\omega t$$ **0.1**

x方向のコリオリ力

$$F_x(t) = 2m\omega_{ss}v_y(t) = 2m\omega_{ss}d\omega\sin\omega t$$ **0.2**

このことにより$x(t)$もまた調和振動であることに気づくこと **0.1**

しかし、等速度運動する項vtがあることに気づくこと **0.1**

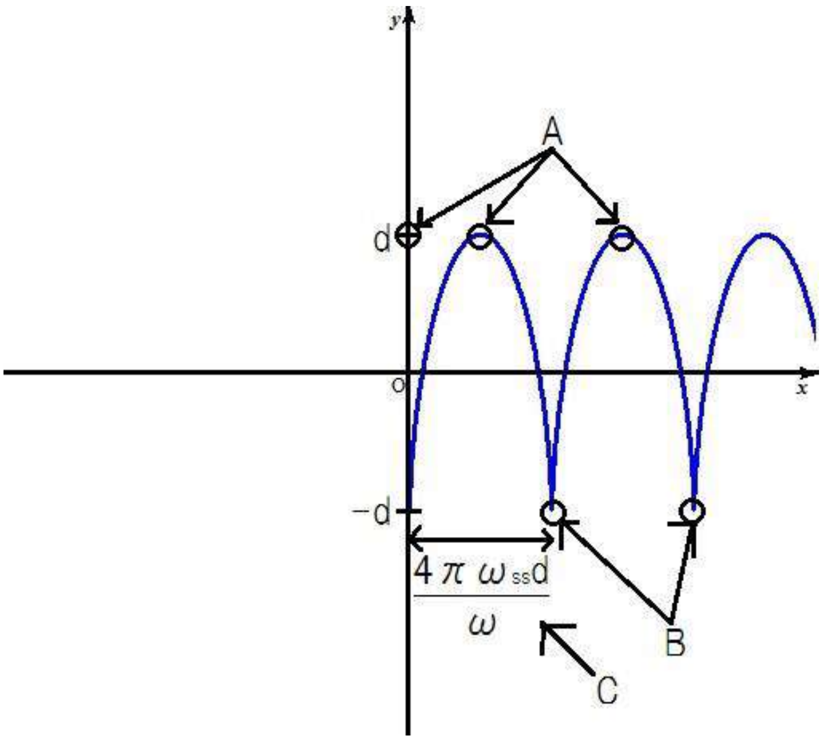
正しい振幅を得る

$$A=\frac{2\omega_{ss}d}{\omega}$$ **0.1**

正しい初期条件のもとでの正しい解

$$x(t)=-\frac{2\omega_{ss}d}{\omega}\sin\omega t+2\omega_{ss}dt$$ **0.2**

概略図：



定性的評価：

周期運動 **0.1**

周期運動に加えて等速度運動をしていること **0.1**

B)： 突出点(cusp) **0.1**

定量的評価：

A)+B)： 極大点と突出点が$y=\pm d$にあること **0.1**

C)： 突出点(cusp)同士の距離が$\Delta x=\frac{4\pi\omega_{ss}d}{\omega}$であること **0.2**

問題２：電気回路における非線形ダイナミクス　解答

PartA　定常状態と不安定性

A1 [計 0.4 点]

I-Vグラフを見て、以下を得る。

$$R_{off} = 10.0\,\Omega \quad (0.1)$$

$$R_{on} = 1.00\,\Omega \quad (0.1)$$

$$R_{int} = 2.00\,\Omega \quad (0.1)$$

$$I_0 = 6.00\mathrm{A} \quad (0.1)$$

注意：この問いでは有効数字の桁数は考慮しない。

A2 [計 1.0 点]

この回路にキルヒホッフの法則を用いる。Uを双安定な素子の電圧として、

$$\mathcal{E} = IR + U \quad (0.1)$$

したがって

$$I = \frac{\mathcal{E} - U}{R} \quad (0.1)$$

よって、回路の定常状態は素子XのI-Vグラフと上の方程式の交点である。(0.2)

R=3.00 Ω のとき、常にちょうど1個の交点がある。(0.2)

R=1.00 Ω のとき、Eの値によって1,2,3個の交点が得られる。(0.4)

注意：以下の表により部分点を与える。

答	1個	2個	3個	1,3個	1,2個	2,3個	1,2,3個
点数	0	0	0.2	0.3	0	0.2	0.4

A3 [計0.6点]

定常状態は中間の部分上にある。(0.2)

したがって対応する式は

$$I_{\text{stationary}} = \frac{\mathcal{E} - R_{\text{int}} I_0}{R - R_{\text{int}}} \quad (0.1)$$

$$= 3.00\mathrm{A} \quad (0.1)$$

$$U_{\text{stationary}} = R_{\text{int}}\,(I_0 - I) \quad (0.1)$$

$$= 6.00\mathrm{V} \quad (0.1)$$

注意：上側直線または下側直線上の（非物理的な）定常状態に対しては、0.2点の減点。

A4 [計1.0点]

正しいモデル化ならばすべて以下のようになるであろう。

この回路にキルヒホッフの法則を用いて

$$\mathcal{E} = IR + U_X + L\frac{dI}{dt} = IR + (I_0 - I)R_{\text{int}} + L\frac{dI}{dt}$$

よって

$$L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - I_0 R_{\rm int} - (R - R_{\rm int})I$$

(0.5)

重要な２つの場合への分離はdI/dt の符号によって決まる。

$I > I_{\rm stationary}$ のとき、$dI/dt < 0$となりI は減少する。(0.2)

$I < I_{\rm stationary}$ のとき、$dI/dt > 0$となりI は増加する。(0.2)

注意：時間微分を式に含んでいることは本質的ではないので、正しければほかの解答ももちろん許容する。

したがって定常状態はstableであるといえる。(0.1)

注意：stableにチェックされていれば、たとえ理由が書かれていなかったとしても0.1点を与える。逆にunstableにチェックされていれば、たとえそれまでがどれほど正確な理由だったとしてもこの0.1点は与えない。

PartB　物理学のなかの双安定非線形素子：無線送信機

B1 [計1.8点]

正確にサイクルが書けていれば1.2点を与える。以下はその分配である。

・上側直線がサイクルのなかに含まれている。(0.2)

・下側直線がサイクルのなかに含まれている。(0.2)

・ジャンプが直角である（U 一定である）。(0.2)

・ジャンプが$U_{\rm h}$と$U_{\rm th}$で起きている。(0.2)

・上側直線を左向きに移動している。(0.2)

・下側直線を右向きに移動している。(0.2)

考察について以下を１つ述べているごとにさらに0.2点を与える。ただし、0.6点を超えることはない。

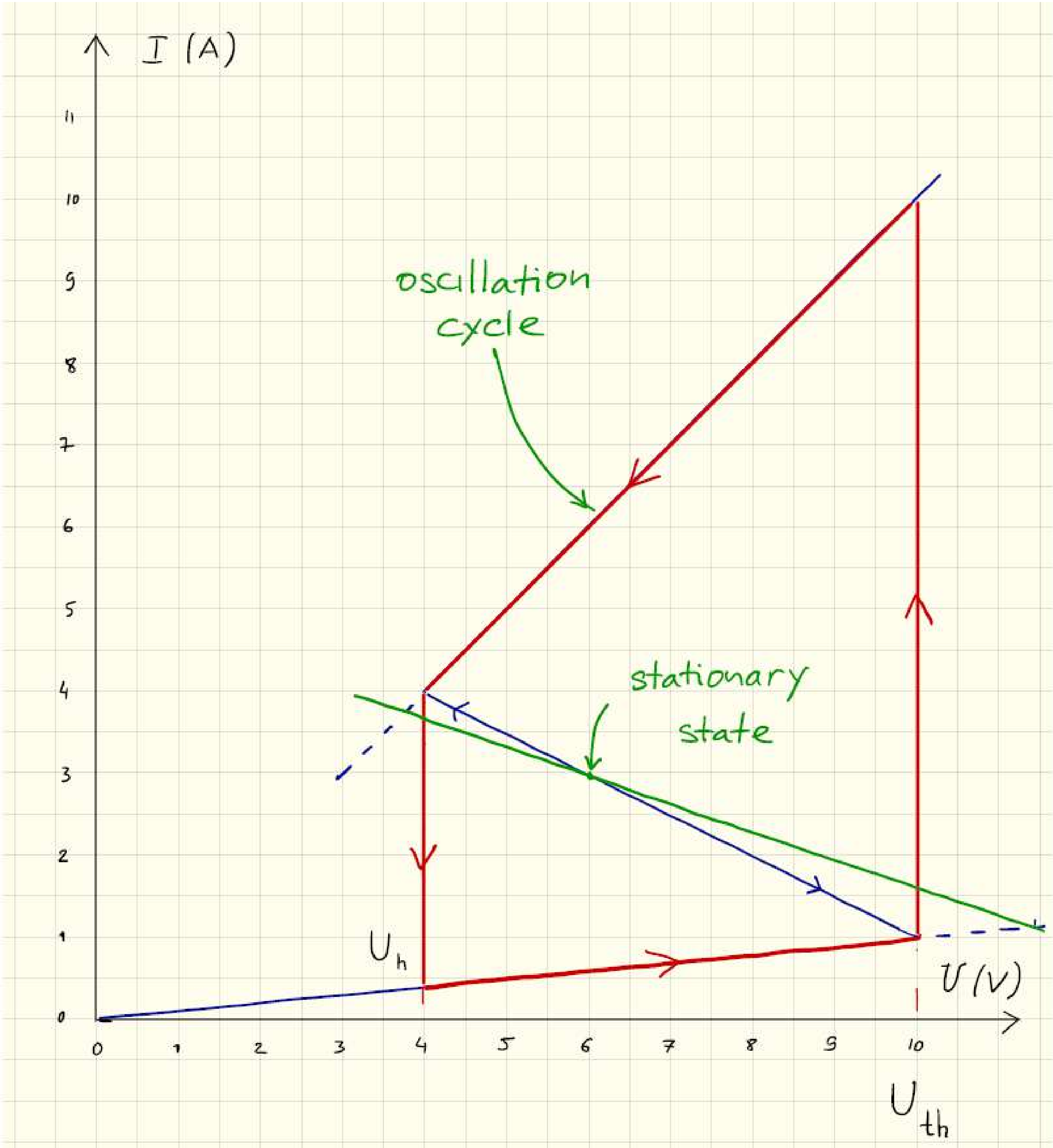
・ジャンプの間Uが一定になるのは、コンデンサの電荷が直ちに変わることはないからである。(0.2)

・中間部分では定常状態になるのでサイクルの一部分とはならない。(0.2)

・ジャンプが角で起こるのはそこからどこにも行けないからである。(0.2)

・上側直線上で左向きに動くのは、安定な定常状態が（グラフの外ではあるが）上側直線の左側にあるからである。これはキルヒホッフの法則を用いた議論によっても同様に示される。(0.2)

・下側直線上で右向きに動くのは、安定な定常状態が（グラフの外ではあるが）下側直線の右側にあるからである。これはキルヒホッフの法則を用いた議論によっても同様に示される。(0.2)



B2 [計1.9点]

非線形素子は上側直線と下側直線の間を振動しているので

$$U_X = R_{on/off} I_X$$

と書き表すことが出来る。片側の直線に限って考えると、回路は基本的なRC回路のようにふるまう。ただし、電気容量はC で抵抗は合成抵抗$R_{on/off}R/(R_{on/off} + R)$である。（素子Xと抵抗が並列に接続されていることに注意）したがって、この回路の時定数は

$$\frac{R_{on/off}R}{R_{on/off} + R}C$$

となる。

訳者補足：時定数とは簡単に言うと、RC回路などで微分方程式を解いた時にでる指数部分の肩に着目して書くと、$C \cdot \exp(-\alpha t)$とかけるが、このαの逆数のことである。

この問題での直線部分を仮想的に伸ばした時、十分長い時間が経った後、この回路は定常状態へと移行する。定常状態での電圧は

$$U_{\mathrm{on/off}} = \frac{R_{\mathrm{on/off}}}{R_{\mathrm{on/off}} + R}\mathcal{E}$$

とかける。定常状態との差が指数的に減少することを考えて、$U_{\mathrm{X}}(t)$の表式は

$$U_{\mathrm{X}}(t) = \frac{R_{\mathrm{on/off}}}{R_{\mathrm{on/off}} + R}\mathcal{E} + \left(U_{\mathrm{X}}(t=0) - \frac{R_{\mathrm{on/off}}}{R_{\mathrm{on/off}} + R}\mathcal{E}\right)e^{-\frac{R_{\mathrm{on/off}}+R}{R_{\mathrm{on/off}}RC}t}$$

注意：0.5点を次のように配分する。

・指数部分が正しい。(0.2)

・$t\to\infty$で正しい定常状態となる。(0.1)

・指数の前の部分が正しい。(0.1)

・$U_{\mathrm{X}}(t)$の表式が正しい。(0.1)

上側直線でかかる時間は

$$t_{\mathrm{on}} = \frac{R_{\mathrm{on}}R}{R_{\mathrm{on}} + R}C\log\left(\frac{U_{\mathrm{th}} - U_{\mathrm{on}}}{U_{\mathrm{h}} - U_{\mathrm{on}}}\right) = 2.41 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}\ (0.4)$$

下側直線でかかる時間は

$$t_{\mathrm{off}} = \frac{R_{\mathrm{off}}R}{R_{\mathrm{off}} + R}C\log\left(\frac{U_{\mathrm{off}} - U_{\mathrm{h}}}{U_{\mathrm{off}} - U_{\mathrm{th}}}\right) = 3.67 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}\ (0.4)$$

したがって振動の周期は

$$T = t_{\mathrm{on}} + t_{\mathrm{off}} = 6.08 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}\ (0.1)$$

注意：最終的な答えがあっていれば満点を与える。また、部分的な答案に対しても部分点を与える。

訳者補足：解答は時定数を用いたeleganceな導出をしているが、キルヒホッフの法則から微分方程式を定積分しても同様な答えが求まる。部分点の範囲は広いが、文字式でなく数値で議論してしまうと部分点をもらえないことがあるので注意すること。

B3 [計0.7点]

下側直線で消費されるエネルギーは無視する。１サイクルの間に上側直線で消費されるエネルギーはだいたい以下のように見積もることが出来る。

$$E = \frac{1}{R_{\mathrm{on}}}\left(\frac{U_{\mathrm{h}} + U_{\mathrm{th}}}{2}\right)^2 t_{\mathrm{on}} = 1.18 \cdot 10^{-4}\mathrm{J}\ (0.4)$$

電力は以下の通り。

$$P \sim \frac{E}{T} = 19.3\mathrm{W}\ (0.3)$$

注意：公式が書けており、答えが$5\mathrm{W} \le P \le 50\mathrm{W}$の範囲内ならば満点を与える。

公式が書けており、上の範囲外だが$1\mathrm{W} \le P \le 100\mathrm{W}$の範囲内ならば0.5点を与える。

値は範囲外だが、公式を書けているならば0.4点を与える。

上で与えた式はあくまで１つの例であり、他のどんな妥当な評価も許容される。

B4 [計0.6点]

ラジオ波の波長は$\lambda = cT = 1.82\times10^3\ \mathrm{m}$で与えられる。(0.2)

アンテナのありうる長さは$\lambda/4$（もしくは$3\lambda/4, 5\lambda/4$など…）。(0.3)

1kmを下回るただ１つの答えは　$s = \lambda/4 = 459\mathrm{m}$である。(0.1)

注意：正しい答である$\lambda/4$には満点が、$\lambda/2$とした間違いには0.4点を与えられる。

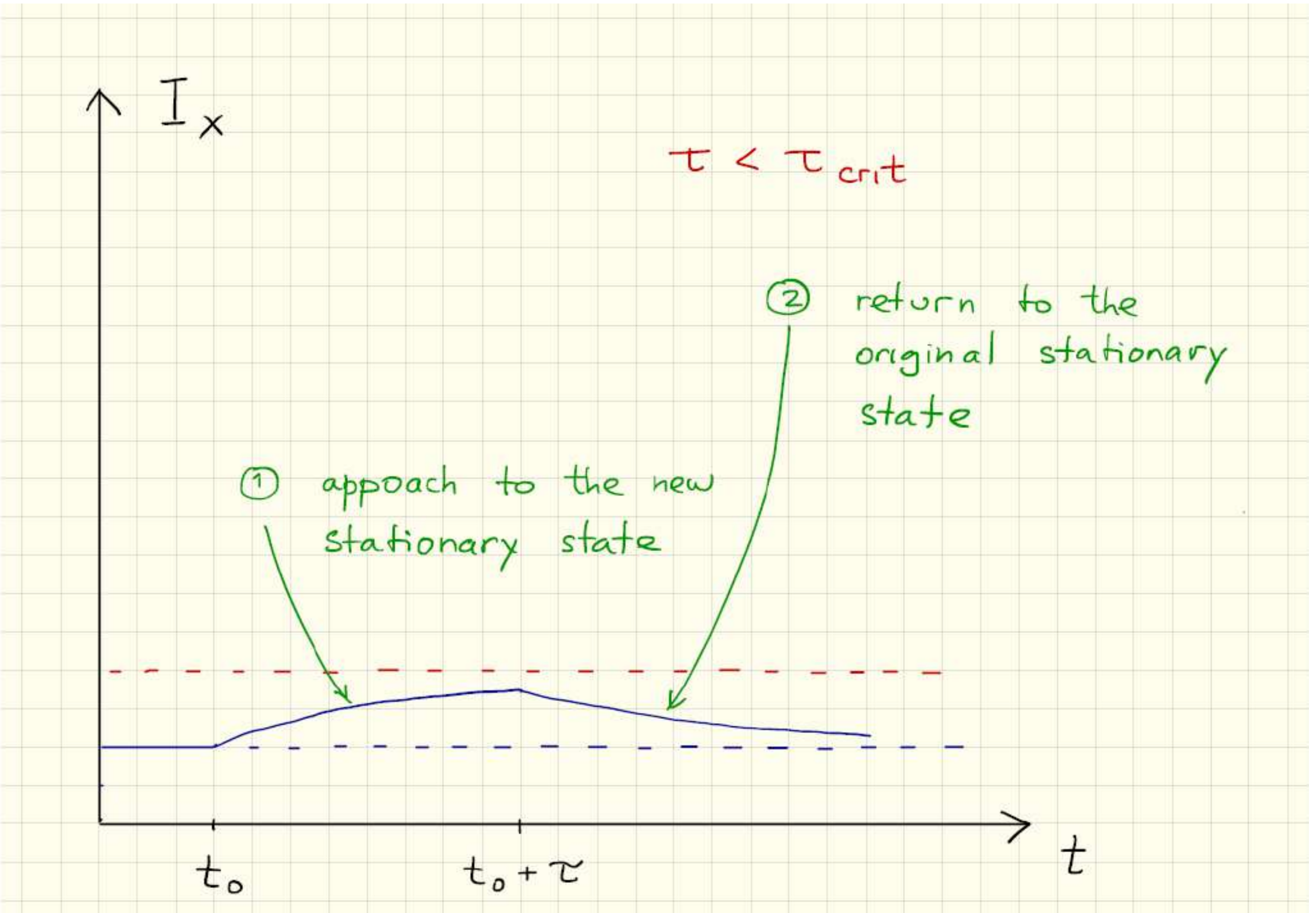
PartC　生物学のなかの双安定非線形素子：ニューリスタ

C1 [計1.2点]

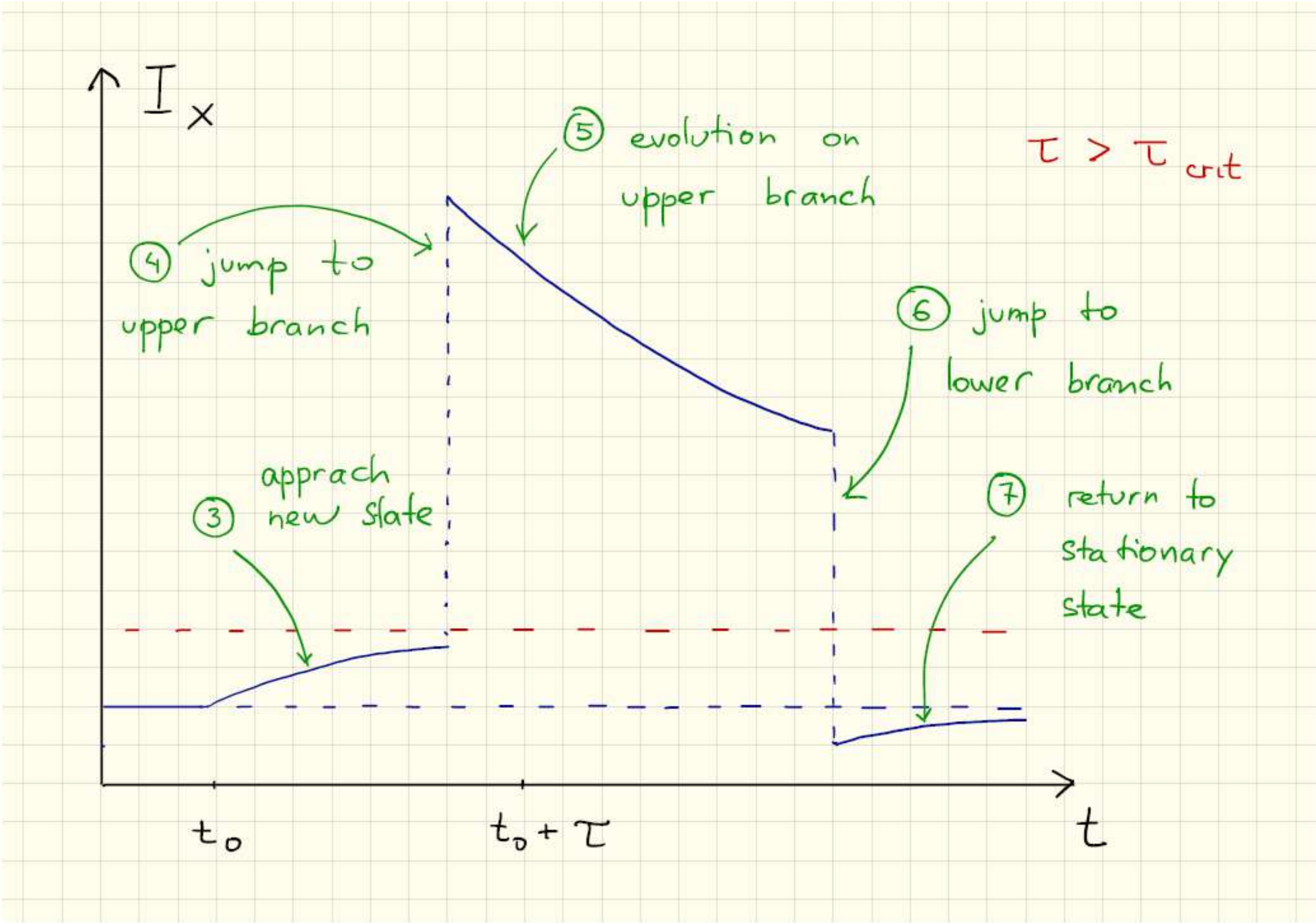
$\tilde{\mathcal{E}} = 12.0\mathrm{V}$のとき、定常状態は下側直線上にある。

$$\tilde{U} = \frac{R_{\mathrm{off}}}{R_{\mathrm{off}} + R}\tilde{\mathcal{E}} = 9.23\mathrm{V}$$

$\tilde{\mathcal{E}} = 15.0\mathrm{V}$まで電圧をあげたとき、PartBと同様に下側直線を右向きに動く。
もし右端に至る前に元の電圧まで下げると、単純に基底状態まで戻ってくるだろう。
しかし、右端に至ってしまうと、上側直線までジャンプし、（$\tau < T$なので）１回の周期を行ってから元の基底状態に戻ってくるだろう。



１．新しい状態への近づき方　(0.2)
２．下の基底状態へ戻る様子　(0.2)



3． 新しい状態への近づき方　(0.1)

4． $t_0 + \tau$までに上側直線にジャンプしている　(0.2)

5． 上側直線での進展　(0.2)

6． 下側直線へのジャンプ　(0.1)

7． もとの基底状態への戻りかた　(0.2)

C2 [計0.6点]

下側直線の右端までにかかる時間を計算すればよい。

$$\tau_{crit} = \frac{R_{off}R}{R_{off}+R}C\log\left(\frac{U_{off}-\widetilde{U}}{U_{off}-U_{th}}\right) = 9.36 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

注意：この式はB2のt_{off}の式でU_hを$\widetilde{U}$に置き換えただけである。

・正しい時定数　(0.2)

・正しい電圧の選択　(0.2)

・正しい表式　(0.1)

・正しい数値　(0.1)

正しい解答には満点を与える。上のスキームによって部分点を与える。

C3 [計0.2点]

$\tau > \tau_{crit}$のとき、この系は１回の振動を行う。これがニューリスタである。

注意：ほかの問の出来に関わらず、Yesにのみ0.2点を与える。

第３問：大型ハドロン衝突型加速器 解答/採点基準 (10points)

Part A. LHC 加速器 (6points)

A.1 (0.7 pt) 加速後の陽子の速度v の正確な表式を、加速電圧V および物理定数を用いて求めよ。

解答 A1: [0.7pt]

エネルギー保存則より

$$m_p \cdot c^2 + V \cdot e = m_p \cdot c^2 \cdot \gamma = \frac{m_p \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

0.5pt

全エネルギーが間違っている，またはかかれていない場合 -0.3pt

静止質量エネルギーがかかれていない場合 -0.2pt

速度の値は上式を解いて

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2}$$

0.2pt

陽子の静止質量エネルギーがかかれていない場合: [0.5pt]

$$V \cdot e \simeq m_p \cdot c^2 \cdot \gamma = \frac{m_p \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

0.3pt

速度の値は上式を解いて

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{V \cdot e}\right)^2}$$

0.2pt

相対論を用いなかった古典的な値: [0.2pt]

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V}{m_p}}$$

0.2pt

A2 (0.8pt) 質量の小さい粒子が高エネルギーに加速された場合、その粒子の速度vの光速との相対的なずれ $\Delta = (c - v)/c$ は非常に小さい。電子について、1 次近似での Δ の表式を、加速電圧V と物理定数を用いて求めよ。また、60.0 GeV のエネルギーでの Δ の値を計算せよ。

解答 A2: [0.8pt]

(前問より)速度は

$$v = c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m_e\cdot c^2}{m_e\cdot c^2+V\cdot e}\right)^2} \quad \text{or} \quad c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m_e\cdot c^2}{V\cdot e}\right)^2}$$

0.1pt

相対的なずれ Δ は

$$\Delta = \frac{c-v}{c} = 1-\frac{v}{c}$$

0.1pt

よって

$$\Delta \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{m_e\cdot c^2}{m_e\cdot c^2+V\cdot e}\right)^2 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{m_e\cdot c^2}{V\cdot e}\right)^2$$

0.4pt

以上より相対的なずれの値は

$$\Delta = 3.63\times10^{-11}$$

0.2pt

相対論を用いなかった古典的な解法には点を与えない。 0.0pt

A3 (1.0pt) 陽子ビームを円軌道に保つために必要な一様な磁束密度B を、陽子のエネルギーE、リングの周長L、基礎物理定数と数字のみで表せ。近似による効果が有効数字の最後の桁に比べて小さければ、適宜近似を用いてよい。陽子のエネルギーがE = 7.00 TeV の場合に、磁束密度B を計算せよ。陽子同士の相互作用は無視してよい。

解答 A3： [1.0pt]

力のつりあいより

$$\frac{\gamma \cdot m_p \cdot v^2}{r} = \frac{m_p \cdot v^2}{r \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e \cdot v \cdot B$$

0.3pt

間違っていた場合、途中までの式に部分点を（最大 0.2pt まで）与えることができる。

例えば

ローレンツ力の式があっていた場合 0.1pt

$\frac{\gamma \cdot m_p \cdot v^2}{r}$があっていた場合 0.1pt

エネルギーは

$$E = (\gamma - 1) \cdot m_p \cdot c^2 \simeq \gamma \cdot m_p \cdot c^2 \to \gamma = \frac{E}{m_p c^2}$$

これより

$$\frac{E \cdot v}{c^2 \cdot r} = e \cdot B$$

0.3pt

また、

$$v \simeq c \quad \text{and} \quad r = \frac{L}{2\pi}$$

より、Bは

$$B = \frac{2\pi \cdot E}{e \cdot c \cdot L}$$

0.2pt

以上より、Bの値は

B=5.50 T 0.2pt

もしBの有効数字を２桁以下または４桁以上としていた場合 −0.1pt

近似計算をしなかった場合以下の式が正しいが、この式には最大0.5 点しか与えない。

$$B = \frac{2\pi \cdot m_p \cdot c}{e \cdot L} \cdot \sqrt{\left(\frac{E}{m_p \cdot c^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2}$$

0.5pt

計算におけるミスはそれぞれ 0.1 点減点する。 −0.1pt

相対論を用いなかった古典的な解法では値が全く異なるので上限を0.3pt とする。 [0.3pt]

$$\frac{m_p \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$$

0.1pt

$$B = \frac{2\pi}{L \cdot e}\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E}$$

0.1pt

B=0.0901 T 0.1pt

もしBの有効数字を２桁以下または４桁以上としていた場合 −0.1pt

A4 (1.0pt) 次元解析を用いることで、放射パワーP_{rad}の表式を求めよ。

解答 A4: ［1.0pt］

$$P_{rad} = a^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot \epsilon_0^{\delta}$$ 0.2pt

これらの次元は次の通りである。

$$[a] = \mathrm{ms^{-2}},\ [q] = \mathrm{C} = \mathrm{As},\ [c] = \mathrm{ms^{-1}},$$

$$[\epsilon_0] = \mathrm{As(Vm)^{-1}} = \mathrm{A^2s^2(Nm^2)^{-1}} = \mathrm{A^2s^4(kgm^3)^{-1}}$$

すべての次元が正しい場合 0.3pt
（３つの次元が正しい場合） (0.2pt)
（２つの次元が正しい場合） (0.1pt)

次元に N と C を用いて$[\varepsilon_0] = \mathrm{C^2(Nm^2)^{-1}}$とした場合

$$\frac{\mathrm{m}^{\alpha}}{\mathrm{s}^{2\alpha}} \cdot \mathrm{C}^{\beta} \cdot \frac{\mathrm{m}^{\gamma}}{\mathrm{s}^{\gamma}} \cdot \frac{\mathrm{C}^{2\delta}}{\mathrm{N}^{\delta} \cdot \mathrm{m}^{2\delta}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

0.1pt

これを用いて

$$\mathrm{N} :\rightarrow \delta = -1, \quad \mathrm{C} :\rightarrow \beta + 2 \cdot \delta = 0,$$
$$\mathrm{m} :\rightarrow \alpha + \gamma - 2\delta = 1, \quad \mathrm{s} :\rightarrow 2 \cdot \alpha + \gamma = 1$$

0.2pt

(2 つの等式が正しい場合) (0.1pt)

以上より

α =2, β =2, γ =−3, δ =−1 0.1pt

次元に N と A を用いて $[\varepsilon_0] = \mathrm{A^2 s^2 (Nm^2)^{-1}}$とした場合

$$\frac{\mathrm{m}^\alpha}{\mathrm{s}^{2\alpha}}\cdot\mathrm{A}^\beta\cdot\mathrm{s}^\beta\cdot\frac{\mathrm{m}^\gamma}{\mathrm{s}^\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}^{2\delta}\cdot\mathrm{s}^{2\delta}}{\mathrm{N}^\delta\cdot\mathrm{m}^{2\delta}}=\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

0.1pt

これを用いて

$$N:\to\delta=-1,\quad \mathrm{A}:\to\beta+2\cdot\delta=0,$$
$$\mathrm{m}:\to\alpha+\gamma-2\delta=1,\quad \mathrm{s}:\to-2\cdot\alpha+\beta-\gamma+2\delta=-1$$

0.2pt

(2 つの等式が正しい場合) (0.1pt)

以上より

$\alpha=2,\ \beta=2,\ \gamma=-3,\ \delta=-1$ 0.1pt

次元に kg と A を用いて$[\varepsilon_0] = \mathrm{A^2 s^4 (kg\cdot m^3)^{-1}}$とした場合

$$\frac{\mathrm{m}^\alpha}{\mathrm{s}^{2\alpha}}\cdot\mathrm{A}^\beta\cdot\mathrm{s}^\beta\cdot\frac{\mathrm{m}^\gamma}{\mathrm{s}^\gamma}\cdot\frac{\mathrm{A}^{2\delta}\cdot\mathrm{s}^{4\delta}}{\mathrm{kg}^\delta\cdot\mathrm{m}^{3\delta}}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$$

0.1pt

これを用いて

$$\mathrm{kg}:\to\delta=-1,\quad \mathrm{A}:\to\beta+2\cdot\delta=0,$$
$$\mathrm{m}:\to\alpha+\gamma-3\delta=2,\quad \mathrm{s}:\to-2\cdot\alpha+\beta-\gamma+4\delta=-3$$

0.2pt

(2 つの等式が正しい場合) (0.1pt)

以上より

$\alpha=2,\ \beta=2,\ \gamma=-3,\ \delta=-1$ 0.1pt

よって放射パワーは

$$P_{rad}\propto\frac{a^2\cdot q^2}{c^3\cdot\epsilon_0}$$

0.1pt

これらとは異なる単位を用いた解法も可能であり、それで解いても良い。答えを出せなかったものの電荷の単位が消えることから $\beta=-2\delta$ であることに気付いた場合 0.2pt を与える。 0.2pt

A5 (1.0pt) LHC を回るすべての陽子について、放射パワーの合計 P_{tot} を計算せよ。陽子 1 つのエネルギーはE = 7.00 TeV とする（表 1）。適切な近似を用いてもよい。

解答 A5: ［1.0pt］

放射パワーの式は

$$P_{rad} = \frac{\gamma^4 \cdot a^2 \cdot e^2}{6\pi \cdot c^3 \cdot \epsilon_0}$$ 0.1pt

エネルギーの式は

$$E = (\gamma - 1)m_p \cdot c^2 \text{ or equally valid } E \simeq \gamma \cdot m_p \cdot c^2$$ 0.2pt

加速度の式は

$$a \simeq \frac{c^2}{r} \text{ with } r = \frac{L}{2\pi}$$ 0.2pt

これより放射パワーは

$$P_{rad} = (\frac{E}{m_p c^2} + 1)^4 \cdot \frac{e^2 \cdot c}{6\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \text{ or } (\frac{E}{m_p c^2})^4 \cdot \frac{e^2 \cdot c}{6\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$ 0.3pt

以上より放射パワーの合計は

$$P_{tot} = 2 \cdot 2808 \cdot 1.15 \cdot 10^{11} \cdot P_{rad} = 5.13\text{kW}$$ 0.2pt

---

ビームが２つあるため２倍する必要があったが、それを忘れた場合は−0.1pt とする。 −0.1pt

表１から読みとれる 2808 や1.15×10^{11}を忘れた場合も−0.1pt とする。 −0.1pt

A6 (1.5pt) 陽子がこの電場を通過するのにかかる時間T を決定せよ。

解答　A6： [1.5pt]

ニュートンの第２法則より

$$F=\frac{dp}{dt}$$ 0.2pt

$$\frac{V\cdot e}{d}=\frac{p_f-p_i}{T}\text{ with }p_i=0$$ 0.3pt

エネルギー保存則より

$$E_{tot}=m\cdot c^2+e\cdot V$$ 0.2pt

よって、以上より

$$E_{tot}^2=(m\cdot c^2)^2+(p_f\cdot c)^2$$ 0.2pt

$$p_f=\frac{1}{c}\cdot\sqrt{(m\cdot c^2+e\cdot V)^2-(m\cdot c^2)^2}=\sqrt{2e\cdot m\cdot V+\left(\frac{e\cdot V}{c}\right)^2}$$ 0.2pt

$$T=\frac{d\cdot p_f}{V\cdot e}=\frac{d}{V\cdot e}\sqrt{2e\cdot m_p\cdot V+\left(\frac{e\cdot V}{c}\right)^2}$$ 0.3pt

T=218ns 0.1pt

別解 [1.5pt]

ニュートンの第２法則より

$$F=\frac{dp}{dt}$$ 0.2pt

$$\frac{V\cdot e}{d}=\frac{p_f-p_i}{T}\text{ with }p_i=0$$ 0.3pt

A1 で求めた速度の式またはエネルギー保存則より

$$v=c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m_p\cdot c^2}{m_p\cdot c^2+V\cdot e}\right)^2}$$ 0.2pt

これより γ が次のように変形できるので

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1+\frac{e\cdot V}{m_p\cdot c^2}$$ 0.2pt

$$p_f = \gamma\cdot m_p\cdot v = \left(1+\frac{e\cdot V}{m_p\cdot c^2}\right)\cdot m_p\cdot c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m_p\cdot c^2}{m_p\cdot c^2+V\cdot e}\right)^2}$$ 0.2pt

$$T = \frac{d\cdot p_f}{V\cdot e} = \frac{d\cdot m_p\cdot c}{V\cdot e}\cdot\sqrt{\left(\frac{m_p\cdot c^2+e\cdot V}{m_p\cdot c^2}\right)^2-1}$$

$$= \frac{d}{V\cdot e}\sqrt{2e\cdot m_p\cdot V+\left(\frac{e\cdot V}{c}\right)^2}$$ 0.3pt

T=218ns 0.1pt

別解:時間を積分する方法 [1.5pt]

エネルギーは距離 x に比例して大きくなるので

$$E(x) = \frac{e\cdot V\cdot x}{d}$$ 0.2pt

$$t = \int dt = \int_0^d \frac{dx}{v(x)}$$ 0.2pt

$$v(x) = c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m_p\cdot c^2}{m_p\cdot c^2+\frac{e\cdot V\cdot x}{d}}\right)^2}$$

$$= c\cdot\frac{\sqrt{\left(m_p\cdot c^2+\frac{e\cdot V\cdot x}{d}\right)^2-\left(m_p\cdot c^2\right)^2}}{m_p\cdot c^2+\frac{e\cdot V\cdot x}{d}} = c\cdot\frac{\sqrt{\left(1+\frac{e\cdot V\cdot x}{d\cdot m_p\cdot c^2}\right)^2-1}}{1+\frac{e\cdot V\cdot x}{d\cdot m_p\cdot c^2}}$$ 0.2pt

ξ を $\xi=\dfrac{e\cdot V\cdot x}{d\cdot m_p\cdot c^2}$ と定義して

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{e\cdot V}{d\cdot m_p\cdot c^2}$$ 0.2pt

$$t = \frac{1}{c}\int_0^b \frac{1+\xi}{\sqrt{(1+\xi)^2-1}}\frac{d\cdot m_p\cdot c^2}{e\cdot V}d\xi \qquad b = \frac{e\cdot V}{m_p\cdot c^2}$$ 0.2pt

$$1+\xi := \cosh(s) \qquad \frac{d\xi}{ds} = \sinh(s)$$ 0.1pt

$$t=\frac{m_p\cdot c\cdot d}{e\cdot V}\int\frac{\cosh(s)\cdot\sinh(s)ds}{\sqrt{\cosh^2(s)-1}}=\frac{m_p\cdot c\cdot d}{e\cdot V}[\sinh(s)]_{b_1}^{b_2}$$ 0.2pt

また、

$$b_1=\cosh^{-1}(1),\quad b_2=\cosh^{-1}\left(1+\frac{e\cdot V}{m_p\cdot c^2}\right)$$ 0.1pt

以上より、 T=218ns 0.1pt

別解:移動距離に着目する方法 [1.5pt]

$$F=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$ 0.2pt

$$\frac{V\cdot e}{d}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m\cdot a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+m\cdot a\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\gamma^3\cdot m\cdot a$$ 0.4pt

$$a=\ddot{s}=\frac{V\cdot e}{d\cdot m}\left(1-\frac{\dot{s}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$ 0.3pt

ここで $s(t)$ のとりうる解は、$s(t)$ が $s(t)=\sqrt{i^2\cdot t^2+k}-l$ （i,k,l は適当な定数）のように予想される。また、条件 $s(0)$=0, $\dot{s}(0)=v(0)=0$ より 0.1pt

$$s(t)=\frac{c}{V\cdot e}\left(\sqrt{e^2\cdot V^2\cdot t^2+c^2\cdot m^2\cdot d^2}-c\cdot m\cdot d\right)$$ 0.2pt

$$s=d\rightarrow T=\frac{d}{V\cdot e}\sqrt{\left(\frac{V\cdot e}{c}\right)^2+2V\cdot e\cdot m}$$ 0.2pt

以上より、 T=218ns 0.1pt

相対論を用いない古典的な解法には最大で 0.4pt を与える。 [0.4pt]

$$F=\frac{V\cdot e}{d}$$

より加速度 a は

$$a=\frac{F}{m_p}=\frac{V\cdot e}{m_p\cdot d}$$ 0.1pt

$$d=\frac{1}{2}\cdot a\cdot T^2\rightarrow T=\sqrt{\frac{2d}{a}}$$ 0.1pt

以上より T は

$$T=d\cdot\sqrt{\frac{2\cdot m_p}{V\cdot e}}$$ 0.1pt

T=194ns 0.1pt

Part B. 粒子の識別 (4points)

B1 (0.8pt) 粒子の質量mを、運動量p、飛行距離l、飛行時間t を用いて表せ。ただし、粒子は素電荷eを持ち、光速cに近い速さを持つとする。また、飛跡は直線状で、2 つの飛行時間検出器の面を垂直に通過するとする(図 2 を見ること)。

解答 B1: [0.8pt]

速度は次のように表せる。

$$v = \frac{l}{t}$$ 0.1pt

相対論的な運動量の表式は

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ 0.2pt

以上より

$$p = \frac{m \cdot l}{t \cdot \sqrt{1 - \frac{l^2}{t^2 \cdot c^2}}}$$ 0.2pt

よって質量は

$$m = \frac{p \cdot t}{l} \cdot \sqrt{1 - \frac{l^2}{t^2 \cdot c^2}} = \frac{p}{l \cdot c} \cdot \sqrt{t^2 \cdot c^2 - l^2}$$ 0.3pt

---

別解 [0.8pt]

飛行距離を用いて t は次のように表せる。

$$t = \frac{l}{(c \cdot \beta)}$$ 0.1pt

相対論的な運動量の表式は

$$p = \frac{m \cdot \beta \cdot c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

よって速度は、

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + p^2}}$$ 0.2pt

以上より t は

$$t = l\frac{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + p^2}}{c \cdot p}$$

0.2pt

よって質量は

$$m = \sqrt{\left(\frac{p \cdot t}{l}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2} = \frac{p}{l \cdot c}\sqrt{(t \cdot c)^2 - (l)^2}$$

0.3pt

相対論を用いなかった場合: [0.0pt]

飛行時間は $t=l/v$ で表されるので、速度は

$$v = \frac{p}{m} \to t = \frac{l \cdot m}{p}$$

よって、

$$m = \frac{p \cdot t}{l}$$

となるが、この解法には点を与えない。 0.0pt

B2 (0.7pt) 運動量がともに 1.00 GeV/c の荷電π中間子と荷電 K 中間子を十分良く識別するために最低限必要となる飛行時間検出器の長さlを計算せよ。十分良い識別のためには、飛行時間の差が検出器の時間分解能の 3 倍以上であることが必要である。飛行時間検出器の典型的な時間分解能は 150 ps（1 ps = 10^{-12}s）である。

解答 B2: [0.7pt]

苛電 π 中間子と荷電 K 中間子の飛行時間の差は

$$\Delta t = 450\mathrm{ps} = 450 \cdot 10^{-12}\mathrm{s}$$ 0.1pt

また、この飛行時間の差は次のようにも表せるので

$$\Delta t = \frac{l}{cp}\left(\sqrt{m_\pi^2 \cdot c^2 + p^2} - \sqrt{m_K^2 \cdot c^2 + p^2}\right) = 450\mathrm{ps} = 450 \cdot 10^{-12}\mathrm{s}$$ 0.2pt

$$l = \frac{\Delta t \cdot p}{\sqrt{m_K^2 + p^2/c^2} - \sqrt{m_\pi^2 + p^2/c^2}}$$ 0.2pt

$$\sqrt{m_K^2 + p^2/c^2} = 1.115\ \mathrm{GeV}/c^2 \mathrm{and} \sqrt{m_\pi^2 + p^2/c^2} = 1.010\ \mathrm{GeV}/c^2$$

$$l = 450 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1}{1.115 - 1.010}\mathrm{s\ GeV}c^2/(\mathrm{GeV}c)$$ 0.1pt

$$l = 4285.710^{-12}\mathrm{s} \cdot c = 4285.7 \cdot 10^{-12} \cdot 2.998 \cdot 10^8\mathrm{m} = 1.28\mathrm{m}$$ 0.1pt

（ただし、有効数字を２桁以下または４桁以上にした場合は 0.1pt 減点する。） −0.1pt

相対論を用いなかった場合の解法: [0.3pt]

荷電 π 中間子と荷電 K 中間子の飛行時間の差は

$$\Delta t = \frac{l}{p}(m_K - m_\pi) = 450ps = 450 \cdot 10^{-12}\mathrm{s}$$ 0.1pt

よって長さは

$$l = \frac{\Delta tp}{m_K - m_\Pi} = \frac{450 \cdot 10^{-12}\mathrm{s} \cdot 1\mathrm{GeV}/c}{(0.498 - 0.135)\mathrm{GeV}/c^2}$$ 0.1pt

$$l = 450 \cdot 10^{-12}/0.363 \cdot cs = 450 \cdot 10^{-12}/0.363 \cdot 2.998 \cdot 10^8\mathrm{m}$$

$$l = 3716 \cdot 10^{-4}\mathrm{m} = 0.372\mathrm{m}$$ 0.1pt

（ただし、有効数字を２桁以下または４桁以上にした場合は 0.1pt 減点する。） −0.1pt

B3 (1.7pt) 粒子の質量を、磁束密度B、飛行時間検出器の円筒の半径R、物理定数、測定量（飛跡の半径r と飛行時間t）を用いて表せ。

解答 B3： ［1.7pt］

粒子はビームラインと垂直に飛行するので飛行距離は円弧の長さから与えられる。
磁場と同じ方向の運動量を持たないことから、ローレンツ力は粒子の持つ運動量に比例し、B1 で求めた質量に関する式を使うことが出来る。
粒子の飛行距離は、半径を用いて

$$l = 2 \cdot r \cdot \mathrm{asin} \frac{R}{2 \cdot r}$$ 0.5pt

$l = R$とした場合は 0.4pt 減点する -0.4pt

以上の過程において部分点を最大 0.4pt 与える。

ローレンツ力は

$$\frac{\gamma \cdot m \cdot v_t^2}{r} = e \cdot v_t \cdot B \rightarrow p_T = r \cdot e \cdot B$$ 0.4pt

以上の過程において部分点を最大 0.3pt 与える。

このとき磁場と同じ方向の運動量はゼロであることから$p = p_T$となる。 0.1pt

運動量は

$$p = e \cdot r \cdot B$$ 0.1pt

よって、質量は

$$m = \sqrt{\left(\frac{p \cdot t}{l}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2} = e \cdot r \cdot B \cdot \sqrt{\left(\frac{t}{2r \cdot \mathrm{asin}\frac{R}{2r}}\right)^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2}$$ 0.6pt

以上の過程において部分点を最大 0.5pt 与える。

相対論を用いなかった場合の解答:　[0.9pt]

粒子の飛行距離は円弧の長さなので、

$$l = 2 \cdot r \cdot \mathrm{asin}\frac{R}{2 \cdot r}$$ 0.5pt

$l = R$ とした場合は 0.4pt 減点する　-0.4pt

以上の過程において部分点を最大 0.4pt 与える。

よって、質量は

$$m = \frac{p \cdot t}{l} = \frac{e \cdot r \cdot B \cdot t}{2r \cdot \mathrm{asin}\frac{R}{2r}} = \frac{e \cdot B \cdot t}{2 \cdot \mathrm{asin}\frac{R}{2r}}$$ 0.4pt

以上の過程において部分点を最大 0.3 点与える。

B4 (0.8pt) これらの粒子の質量を計算することによって、粒子の種類をそれぞれ同定せよ。

Particle	Radius r [m]	Time of flight [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.32	25

解答　B4：　[0.8pt]

Particle	arc [m]	p $[\frac{MeV}{c}]$	p $[\frac{mkg}{s}]$ 10^{-19}	pt/l $[\frac{MeVs}{cm}]$ 10^{-6}	pt/l $[\frac{MeV}{c^2}]$	pt/l [kg] 10^{-27}	Mass $[\frac{MeV}{c^2}]$	Mass [kg] 10^{-27}
A	3.786	764.47	4.0855	4.038	1210.6	2.158	938.65	1.673
B	4.002	440.69	2.3552	1.542	462.2	0.824	139.32	0.248
C	3.760	908.37	4.8546	4.349	1303.7	2.324	935.10	1.667
D	4.283	347.76	1.8585	2.030	608.6	1.085	499.44	0.890

以上より、粒子 A と C は陽子であり、粒子 B は荷電 π 中間子、粒子 D は荷電 K 中間子である。

それぞれの粒子について質量を正しく与え、正しく同定出来ていた場合　各 0.2pt
正しく質量を出せていたが、同定を 1 つまたは 2 つの粒子で間違えていた場合　-0.1pt
正しく質量を出せていたが、同定を 3 つまたは 4 つの粒子で間違えていた場合　-0.2pt
質量は間違えていたが運動量は合っていた場合　各 0.1pt
運動量を間違えたが、飛行距離は合っていたものが 3 つまたは 4 つあった場合　0.2pt
運動量を間違えたが、飛行距離は合っていたものが 1 つまたは 2 つあった場合　0.1pt

相対論を用いなかった場合:　[0.4pt]
$m = pt/l$ となり、粒子を同定することは不可能である。

Particle	arc [m]	p $[\frac{MeV}{c}]$	p $[\frac{mkg}{s}]$ 10^{-19}	$m = p \cdot t/l$ $[\frac{MeV\,s}{cm}]$ 10^{-6}	$m = p \cdot t/l$ $[\frac{MeV}{c^2}]$	$m = p \cdot t/l$ [kg] 10^{-27}
A	3.786	764.47	4.0855	4.038	1210.6	2.158
B	4.010	440.69	2.3552	1.542	462.2	0.824
C	3.760	908.37	4.8546	4.349	1303.7	2.324
D	4.283	347.76	1.8585	2.030	608.6	1.085

質量または運動量を正しく求められていた場合　各 0.1pt
運動量を間違えたが、飛行距離は合っていたものが 3 つまたは 4 つあった場合　0.2pt
運動量を間違えたが、飛行距離は合っていたものが 1 つまたは 2 つあった場合　0.1pt