IPhO2015 理論第 1 問（T1）　【解答】　太陽からの粒子[1]

A　太陽からの放射

A1　ステファン・ボルツマンの法則より，

$$L_\odot = (4\pi R_\odot^2)(\sigma T_s^4)$$

$$T_s = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 5.76 \times 10^3 \mathrm{K}$$

A2

$$P_{\mathrm{in}} = \int_0^\infty u(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_s}\right) \mathrm{d}\nu$$

ここで，$x = \frac{h\nu}{k_B T_s}$ とすると，$\nu = \frac{k_B T_s}{h} x$ より，$\mathrm{d}\nu = \frac{k_B T_s}{h} dx$

$$P_{\mathrm{in}} = \frac{2\pi h A R_\odot^2}{c^2 d_\odot^2} \frac{(k_B T_s)^4}{h^4} \int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx = \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_s^4 A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \cdot 6 = \frac{12\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_s^4 A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}$$

A3　光子は一個で $h\nu$ のエネルギーを持つから，

$$n_\gamma(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu} = A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_s}\right)$$

A4　$E \geq E_{\mathrm{g}}$ なるエネルギーを持つ光子のみが電子を励起し，それらの光子は全て $E_{\mathrm{g}} = h\nu_{\mathrm{g}}$ のエネルギーを太陽電池に与えるから，

$$P_{\mathrm{out}} = h\nu_{\mathrm{g}} \int_{\nu_{\mathrm{g}}}^\infty n_\gamma(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

$$= h\nu_{\mathrm{g}} A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi}{c^2} \int_{\nu_{\mathrm{g}}}^\infty \nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T_s}\right) \mathrm{d}\nu$$

$$= k_B T_s x_{\mathrm{g}} A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi}{c^2} \left(\frac{k_B T_s}{h}\right)^3 \int_{x_{\mathrm{g}}}^\infty x^2 e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} T_s^4 A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} x_{\mathrm{g}} \left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right) e^{-x_{\mathrm{g}}}$$

A5　効率は入射するエネルギーと出力の比であるから，

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{out}}}{P_{\mathrm{in}}} = \frac{x_{\mathrm{g}}}{6} \left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right) e^{-x_{\mathrm{g}}}$$

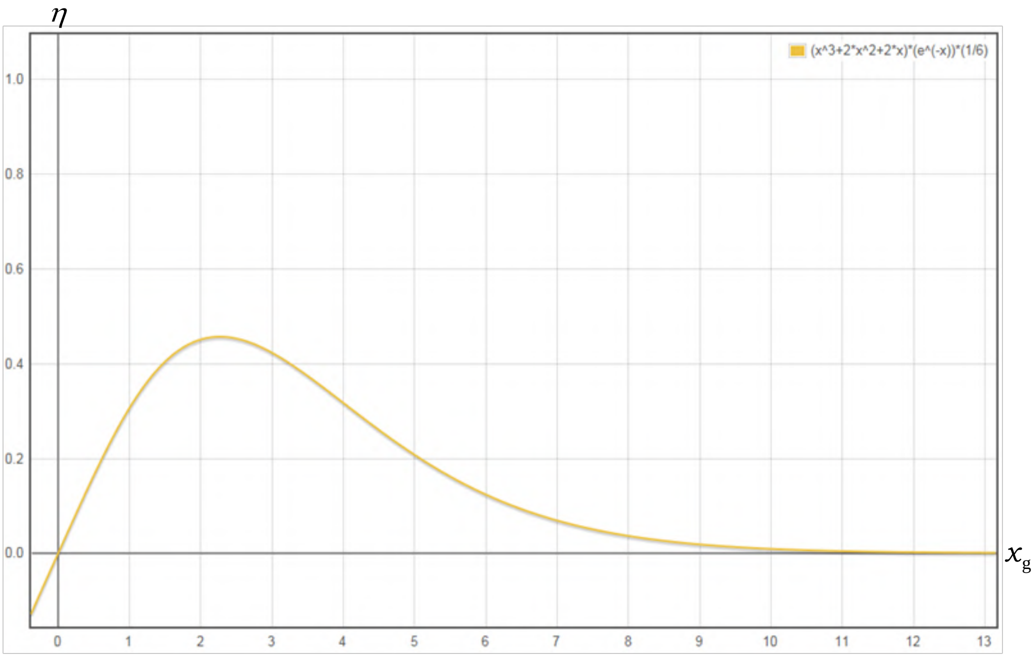
A6　$\eta(x_{\mathrm{g}}) = \frac{1}{6}\left(x_{\mathrm{g}}^3 + 2x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}}\right) e^{-x_{\mathrm{g}}}$

[1] Amol Dighe（TIFR），Anwesh Mazumdar（HBCSE-TIFR）および Vijay A. Singh（前国立科学オリンピック・コーディネーター）が，この問題の責任著者であった。アカデミック委員会，アカデミック発展グループおよび国際役員に大変感謝する。

まず，明らかに $\eta(0)=0$，$\eta(\infty)=0$
また，多項式部分の係数は全て正であるから多項式部分は単調に増加する。
さらに，指数関数部分は単調に減少する。
したがって，ηはただ一つの最大値をとる。

$$\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}}=\frac{1}{6}(-x_{\mathrm{g}}{}^{3}+x_{\mathrm{g}}{}^{2}+2x_{\mathrm{g}}+2)e^{-x_{\mathrm{g}}}$$

$$\left.\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}=0}=\frac{1}{3} \qquad \left.\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}\to\infty}=0$$



A7　最大値は $\frac{d\eta}{dx_{\mathrm{g}}}=\frac{1}{6}(-x_{\mathrm{g}}{}^{3}+x_{\mathrm{g}}{}^{2}+2x_{\mathrm{g}}+2)e^{-x_{\mathrm{g}}}$=0 となるときに与えられる。すなわち、

$$p(x_{\mathrm{g}})\equiv x_{\mathrm{g}}{}^{3}-x_{\mathrm{g}}{}^{2}-2x_{\mathrm{g}}-2=0$$

をみたす x_{g} が x_0 である。

<u>２等分法による数値計算</u>

$$\begin{array}{lllll}
p(0) & = & -2 & & \\
p(1) & = & -4 & & \\
p(2) & = & -2 & & \\
p(3) & = & 10 & \Rightarrow & 2<x_0<3 \\
p(2.5) & = & 2.375 & \Rightarrow & 2<x_0<2.5 \\
p(2.25) & = & -0.171 & \Rightarrow & 2.25<x_0<2.5
\end{array}$$

η の最大値を与える x_0 の近似解は，x_0＝2.27
同様の結果を導く他の解法は全て受諾しうる。

$$\eta(2.27)=0.457$$

A8
$$x_{\mathrm{g}}=\frac{1.11\times1.60\times10^{-19}}{1.38\times10^{-23}\times5763}=2.23$$

$$\eta_{\mathrm{Si}}=\frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\left({x_{\mathrm{g}}}^2+2x_{\mathrm{g}}+2\right)e^{-x_{\mathrm{g}}}=0.457$$

A9　中心から半径 $r\sim r+dr$ の球殻の重力の位置エネルギーを考える。この部分が受ける重力は，内側の半径 r の球によるもののみであり，外側の球殻から重力を受けない。（一般に密度と厚さが一定の球殻内部の任意の点において，球殻から重力は働かない。球殻内部の点について，ある微小面積 dS を見込んだとき，その見込み角の反対側の面積部分 dS' との面積比は距離の２乗の比，すなわち，$r^2:r'^2$ となるが，万有引力は距離の２乗に反比例し，考える部分の体積（いまは厚さ一定なので面積）に比例するので，dS と dS' の部分からの万有引力はつり合う。あとは，すべての部分について積分すればよい。）

微小厚さ dr の球殻の質量 dm は，密度を ρ として，
$$dm=4\pi r^2\rho\mathrm{d}\mathrm{r}$$
微小厚さ dr の球殻が持つ重力の位置エネルギー $d\Omega$ は，
$$d\Omega=-\frac{G(\rho\frac{4}{3}\pi r^3)dm}{r}$$
以上より，$\rho=\frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}$ を用いて，
$$\Omega=-\int_0^{R_\odot}G\left(\rho\frac{4}{3}\pi r^3\right)(4\pi r^2\rho)\frac{dr}{r}=-\frac{16\pi^2G\rho^2}{3}\frac{R_\odot^5}{5}=-\frac{3}{5}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}$$

A10　重力の位置エネルギーが放射エネルギーに変わっていく。
$$\tau_{\mathrm{KH}}=\frac{-\Omega}{L_\odot}=\frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot}=1.88\times10^7\mathrm{years}$$

B　太陽からやってくるニュートリノ

B1　ΔE のエネルギーで２個のニュートリノが放出されるので，
$$\Phi_\nu=\frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2\Delta E}\times2=\frac{3.85\times10^{26}}{4\pi\times(1.50\times10^{11})^2\times4.0\times10^{-12}}\times2=6.8\times10^{14}\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$$

B2　ν_{e} の検出効率を ε，元々のニュートリノの数を N_0，N_2 のうち ν_{e} を観測した数を N_{e}，ν_{x} を観測した数を N_{x} とすると，条件より，
$$N_1=\varepsilon N_0$$
$$N_{\mathrm{e}}=\varepsilon N_0(1-f)$$
$$N_{\mathrm{x}}=\frac{\varepsilon}{6}N_0f$$
$$N_2=N_{\mathrm{e}}+N_{\mathrm{x}}$$

これより，

$$f=\frac{6}{5}\left(1-\frac{N_2}{N_1}\right)$$

注）以下の式から導出しても良い。

$$(1-f)N_1+\frac{f}{6}N_1=N_2$$

B3 電子がチェレンコフ放射をしなくなるのは，そのスピードが $v_{\mathrm{stop}}=\frac{c}{n}$ となったとき。

その時点での全エネルギーは，

$$E_{\mathrm{stop}}=\frac{m_{\mathrm{e}}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_{\mathrm{stop}}^2}{c^2}}}=\frac{nm_{\mathrm{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}$$

叩き出されたときの電子のエネルギーは，

$$E_{\mathrm{start}}=\alpha\Delta t+E_{\mathrm{stop}}=\alpha\Delta t+\frac{nm_{\mathrm{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}$$

ニュートリノと衝突する前，電子のもつエネルギーは$m_{\mathrm{e}}c^2$，したがって，ニュートリノから与えられるエネルギーは，

$$E_{\mathrm{imparted}}=E_{\mathrm{start}}-m_{\mathrm{e}}c^2=\alpha\Delta t+\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}-1\right)m_{\mathrm{e}}c^2$$

B4 Be 原子核の動きはニュートリノのドップラー効果を引き起こす。エネルギーの揺らぎによる変化は十分小さいので($\Delta E_{\mathrm{rms}}/E_\nu \sim 10^{-4}$)，ドップラー効果は非相対論的極限で考えても良い（相対論的に考えてもほぼ同じ答えとなる）。z軸にそって考えると，

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{rms}}}{E_\nu}=\frac{v_{\mathrm{z,rms}}}{c}=3.85\times10^{-4}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{V_{\mathrm{Be}}}{c}$$

$$V_{\mathrm{Be}}=\sqrt{3}\times3.85\times10^{-4}\times3.00\times10^{8}\mathrm{ms^{-1}}=2.01\times10^{5}\mathrm{ms^{-1}}$$

気体分子の平均運動エネルギーは，$\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}$ であるから，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{Be}}V_{\mathrm{Be}}^2=\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}$$

$$T_{\mathrm{c}}=1.13\times10^{7}\ \mathrm{K}$$

となる[2]

[2] （訳注）理科年表平成２７年度版によると，中心温度は15.7×10^{6}K であるからだいたい正しいといえる。

IPhO2015 理論第２問（T-2）　【解答】　極値の原理[1]

(A1)　力学的エネルギーの保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0 \qquad \therefore \quad v_2 = \left(v_1^2 - \frac{2V_0}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(A2)　境界線上では dV/dx に比例する撃力が $-x$ 軸方向に働く。ここから速度の x 成分 v_{1x} のみが変化を受ける。速度の y 成分は変化しないから，$v_{1y} = v_{2y}$。したがって，

$$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2 \qquad \therefore \quad v_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} v_1$$

(A3)　点 O から点 P までの軌道に対する $A(\alpha)$ の定義は，

$$A(\alpha) = mv_1\sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}$$

$A(\alpha)$ を α に関して微分し，その導関数を 0 とおくと，

$$\frac{v_1\alpha}{\left(x_1^2 + \alpha^2\right)^{1/2}} - \frac{v_2(y_0 - \alpha)}{\left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2\right]^{1/2}} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - \alpha)\left(x_1^2 + \alpha^2\right)^{1/2}}{\alpha\left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2\right]^{1/2}}$$

これは，A2 の結果，すなわち，$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$ と同等であることに注意せよ。

(B1)　領域 I における光速は c/n_1 であり，領域 II における光速は c/n_2 である。ここで c は真空中の光速である。２つの領域を直線 $y = y_1$ で分けると、光が原点 $(0, 0)$ から点 (x_0, y_0) まで進むのにかかる時間 $T(\alpha)$ は,

$$T(\alpha) = \frac{n_1\sqrt{y_1^2 + \alpha^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{c}$$

$T(\alpha)$ を α に関して微分し，その導関数を 0 とおくと，

$$\frac{n_1\alpha}{\left(y_1^2 + \alpha^2\right)^{1/2}} - \frac{n_2(x_0 - \alpha)}{\left[(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - y_1)^2\right]^{1/2}} = 0 \qquad \therefore \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

[注意：導出過程は A3 と似ている。これがスネルの法則である。]

[1] Manoj Harbola（IIT-Kanpur）と Vijay A. Singh（前国立科学オリンピック・コーディネーター）が，この問題の責任著者であった。アカデミック委員会，アカデミック発展グループおよび国際役員に大変感謝する。

(B2)　スネルの法則，$n_0 \sin i_0 = n(y)\sin i$，に，$\dfrac{dy}{dx} = -\cot i$ を用いると，

$$n_0 \sin i_0 = \frac{n(y)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0 \sin i_0}\right)^2 - 1}$$

(B3)　$\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\dfrac{n_0 - ky}{n_0 \sin i_0}\right)^2 - 1}} = -\int dx$　において，$i_0 = 90°$ のとき $\sin i_0 = 1$ であることに注意する。

方法 I　$\xi = \dfrac{n_0 - ky}{n_0}$ と置換すると，

$$\int \frac{d\xi\left(-\dfrac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = -\int dx$$

ここで，$\xi = \sec\theta$ とおくと，与えられた積分公式を用いて，

$$\frac{n_0}{k}\ln(\sec\theta + \tan\theta) = x + c$$

方法 II　$\xi = \dfrac{n_0 - ky}{n_0}$ と置換すると，

$$\int \frac{d\xi\left(-\dfrac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = -\int dx$$

ここで，もう１つの与えられた積分公式を用いて，

$$-\frac{n_0}{k}\ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right) = -x + c$$

さて, 境界条件($x = 0, y = 0$)より, $c = 0$ を得る。こうして次の軌跡の方程式が求まる。

$$x = \frac{n_0}{k}\ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right)$$

(B4)　$y_0 = 10.0$cm，$n_0 = 1.50$，$k = 0.050\text{cm}^{-1}$ が与えられている。(B3)より,

$$x = \frac{n_0}{k}\ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right)$$

$y = -y_0$ とおいて，

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \ln\left[\frac{(n_0 + ky_0)}{n_0} + \left(\frac{(n_0 + ky_0)^2}{n_0^2} - 1\right)^{1/2}\right]$$

$$= 30 \ln\left[\frac{2}{1.5} + \left(\left(\frac{2}{1.5}\right)^2 - 1\right)^{1/2}\right]$$

$$= 30 \ln\left[\frac{4}{3} + \left(\frac{7}{9}\right)^{1/2}\right]$$

$$= 30 \ln\left[\frac{4}{3} + 0.88\right]$$

$$= 24.0 \text{ cm}$$

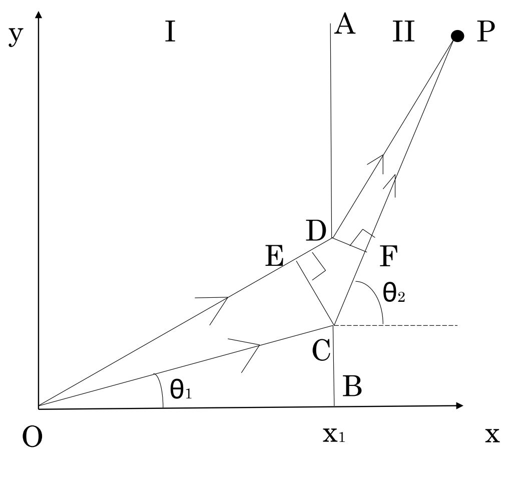
(C1)　ド・ブロイの仮説より，

$$\lambda \to \lambda_{dB} = \frac{h}{mv}$$

λをド・ブロイ波長として，通常の波動と同じように計算をすると，

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{h} mv\Delta s = \frac{2\pi \Delta A}{h}$$

(C2)



問題 A で導いた古典的経路 OCP と経路 ODP を考える。幾何学的な経路の差は領域 I の ED と領域 II の CF の差である。したがって（$d << (x_0 - x_1), d << x_1$ に注意せよ），

$$\Delta\phi_{CD} = \frac{2\pi d \sin\theta_1}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin\theta_2}{\lambda_2}$$

$$= \frac{2\pi m v_1 d \sin\theta_1}{h} - \frac{2\pi m v_2 d \sin\theta_2}{h}$$

$$= 2\pi \frac{md}{h}\left(v_1 \sin\theta_1 - v_2 \sin\theta_2\right)$$

$= 0$　　（A2 ないしは B1 の結果より）

こうして，古典的経路の近傍ではつねに物質波は強め合うことがわかる。

（D1）　$qU_1 = \frac{1}{2} m v^2$

$$= \frac{9.11\times10^{-31}\times4\times10^{14}}{2}\ \mathrm{J} = 2\times9.11\times10^{-17}\ \mathrm{J}$$

$$= \frac{2\times9.11\times10^{-17}}{1.6\times10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 1.139\times10^{3}\ \mathrm{eV}\quad(\cong 1100\,\mathrm{eV})$$

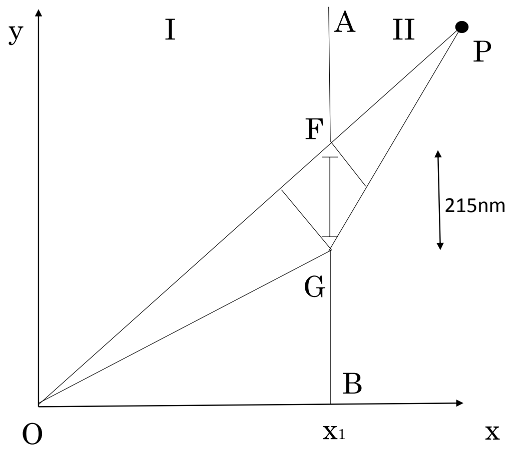
$$\therefore\quad U_1 = 1.139\times10^{3}\ \mathrm{V}$$

（D2）　点 P における位相差は，

$$\Delta\phi_P = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda_1} - \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda_2} = 2\pi(v_1 - v_2)\frac{md}{h}\sin10^\circ = 2\pi\beta$$

これより，　$\beta = 5.13$

（D3）



電子の検出数が 0 になる点のうち点 P に最も近い点と F を結ぶ直線が FP となす角を $\Delta\theta$ とする。波が打ち消しあう条件は位相差が $2\pi\times(\text{整数}+1/2)$ で表せることであり，$\beta = 5.13$ であることから，位相差が $\Delta\phi = 2\pi\times5.5$ となる点を考えればよいことが分かる。

$$m v_1 \frac{d\sin\theta}{h} - \frac{m v_2 d \sin(\theta+\Delta\theta)}{h} = 5.5$$

$$\sin(\theta+\varDelta\theta)=\frac{\dfrac{mv_1 d\sin\theta}{h}-5.5}{\dfrac{mv_2 d}{h}}=\frac{v_1}{v_2}\sin\theta-\frac{h}{m}\frac{5.5}{v_2 d}$$

$$=\frac{2}{1.99}\sin 10^\circ-\frac{5.5}{1374.78\times1.99\times10^{7}\times2.15\times10^{-7}}=0.174521-0.000935$$

これより，$\Delta\theta=-0.0036^\circ$を得る。したがって，

$$\varDelta y=(x_0-x_1)(\tan(\theta+\varDelta\theta)-\tan\theta)=250(\tan 9.9964-\tan 10)$$
$$=-0.0162\,\mathrm{mm}=-16.2\ \mu\mathrm{m}$$

負号は電子の検出数が 0 になる点のうち点 P に最も近い点は P の下にあるということを意味する。

$\varDelta\theta$と$\varDelta y$の近似的な求め方

近似式$\sin(\theta+\varDelta\theta)\cong\sin\theta+\varDelta\theta\cdot\cos\theta$を利用する。

位相差$\Delta\phi=2\pi\times5.5$から，

$$mv_1\frac{d\sin 10^\circ}{h}-mv_2\frac{d(\sin 10^\circ+\varDelta\theta\cdot\cos 10^\circ)}{h}=5.5$$

また，(D2)の結果より，

$$mv_1\frac{d\sin 10^\circ}{h}-mv_2\frac{d\sin 10^\circ}{h}=5.13$$

したがって，

$$-mv_2\frac{d\varDelta\theta\cos 10^\circ}{h}=0.3700$$

ここから，$\varDelta\theta=-6.39\times10^{-5}\ \mathrm{rad}=-0.0036^\circ$を得る。前と同様にして$\varDelta y=-16.2\ \mu\mathrm{m}$が求められる。

(D4)　電子の速度と単位体積当たりの平均の電子数から強度は定まる。よって，

$$N=1=(\text{強度})\times(\text{断面積})\times(\text{装置の長さ})/(\text{電子の速度})$$
$$=I_{\min}\times0.25\times10^{-12}\times2/(2\times10^{7})$$

これより，　$I_{\min}=4\times10^{19}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$　を得る。

IPhO2015 理論第３問（T-3）　【解答】　原子炉の設計[1]

A. 燃料ピン

A1

解答：$\Delta E = 208.684\ \mathrm{MeV}$

解説：変換の間に放出されるエネルギーは，

$$\Delta E = [m(^{235}\mathrm{U}) + m(^{1}\mathrm{n}) - m(^{94}\mathrm{Zr}) - m(^{140}\mathrm{Ce}) - 2m(^{1}\mathrm{n})]c^2$$

データは原子質量単位(u)で与えられているので，

$$\Delta E = [m(^{235}\mathrm{U}) - m(^{94}\mathrm{Zr}) - m(^{140}\mathrm{Ce}) - m(^{1}\mathrm{n})]c^2$$
$$= 208.684\ \mathrm{MeV}\ [\text{許容範囲}(\mathbf{208.000{\sim}209.000})]$$

A2.

解答：$N = 1.702 \times 10^{26}\ \mathrm{m^{-3}}$

解説：この燃料$1\mathrm{m}^3$ あたりの$\mathrm{UO_2}$分子の数N_1は、燃料の密度ρ，アボガドロ定数N_A，平均分子量M_wを用いて，

$$N_1 = \frac{\rho N_A}{M_w}$$
$$= \frac{10600 \times 6.022 \times 10^{23}}{0.270} = 2.364 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$$

それぞれの$\mathrm{UO_2}$分子には，ウラン原子が一つずつ含まれている。それらのうち0.72%のみが$^{235}\mathrm{U}$ なので，

$$N = 0.0072 \times N_1$$
$$= 1.702 \times 10^{26}\ \mathrm{m^{-3}}\ [\text{許容範囲}(\mathbf{1.650{\sim}1.750})]$$

A3

解答：$Q = 4.917 \times 10^{8}\ \mathrm{W/m^3}$

解説：核分裂で放出されるエネルギーのうち80%が熱として利用可能であるから，一回の核分裂で得られる熱エネルギーE_fは、A1.から、

$$E_f = 0.8 \times 208.7\ \mathrm{MeV}$$
$$= 166.96\mathrm{MeV}$$
$$= 2.675 \times 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

単位体積当たりの全断面積は，$N \times \sigma_f$である。したがって，単位体積当たり，単位時間当たりに放出される熱Qは，

$$Q = N \times \sigma_f \times \phi \times E_f$$
$$= (1.702 \times 10^{26}) \times (5.4 \times 10^{-26}) \times (2 \times 10^{18}) \times (2.675 \times 10^{-11})\ \mathrm{W/m^3}$$

[1] Joseph Amal Nathan （BARC）と Vijay A. Singh（前国立科学オリンピック・コーディネーター）が，この問題の責任著者であった。アカデミック委員会，アカデミック発展グループおよび国際役員に大変感謝する。

$= 4.917 \times 10^8\ \mathrm{W/m^3}$ [**許容範囲**($\mathbf{4.800 \sim 5.000}$)]

A4

解答：$T_c - T_s = Qa^2/4\lambda$

<u>**解説**</u>：$T_c - T_s$の次元は温度である。このことを$T_c - T_s = [\mathrm{K}]$と書き表す。同様にQ, a, λの次元も書き下せて，温度をQ, a, λのべき乗の積に等しいとすることで，次の次元の方程式が得られる：

$$K = Q^{\alpha} a^{\beta} \lambda^{\gamma}$$
$$= [\mathrm{ML^{-1}T^{-3}}]^{\alpha}[\mathrm{L}]^{\beta}[\mathrm{MLT^{-3}K^{-1}}]^{\gamma}$$

これにより，温度の次元から，　$\gamma = -1$

質量と時間の次元から，　$\alpha + \gamma = 0$

よって，　$\alpha = 1$

次に長さの次元より，　$-\alpha + \beta + \gamma = 0$

これらより，　$\beta = 2$

したがって，　$T_c - T_s = Qa^2/4\lambda$

ここで，問題に示されているように、無次元係数 1/4 をつけた。**もし 1/4 が書かれていなくても減点しない。**

注：別の方法で α, β, γ を求めていても同じ評価をする。

A5

解答：$a_u = 8.267 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$

<u>**解説**</u>：UO_2の融点は3138 Kで，冷却材の最高温度は577 Kである。これにより、「メルトダウン」しないような $T_c - T_s$ の最大値は，$3138 - 577 = 2561\ \mathrm{K}$ である。したがって $T_c - T_s$ の最大値は $T_c - T_s = 2561\ \mathrm{K}$ としてよい。$\lambda = 3.28\ \mathrm{W/(mK)}$ であることに注意して，

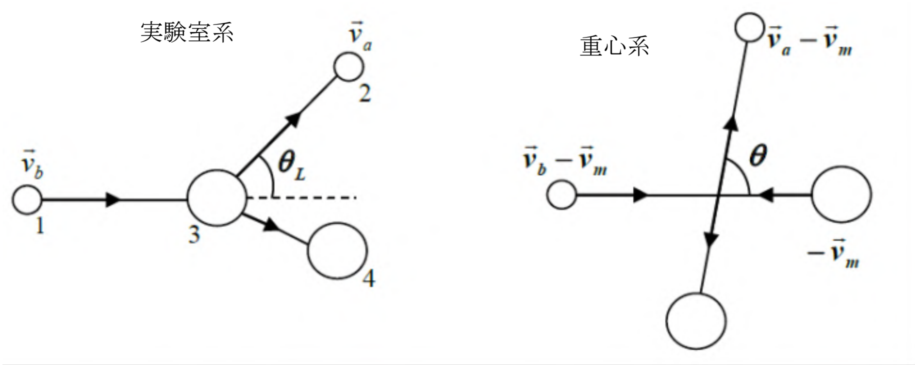
$$a_u^2 = \frac{2561 \times 4 \times 3.28}{4.917 \times 10^8}$$

ここで，A3 で求めたQの値をつかった。これにより，$a_u \simeq 8.267 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$。よって，$a_u = 8.267 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$が燃料ピンの半径の上限値である。

注：インド西部にあるタラプール原子力発電所の第 3、第 4 原子炉には，半径$6.090 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$の燃料ピンがある。

B. 減速剤

B1



B2

解答：**解説**：衝突前，重心系での中性子と減速剤の速さは，それぞれ $v_b - v_m$ と v_m である。重心系での運動量保存則より，$v_b - v_m = Av_m$ よって $v_m = v_b/(A+1)$である。衝突後，重心系での中性子と減速剤の速さをそれぞれ v と V とする。保存則より，

$$v = AV \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{2}(v_b - v_m)^2 + \frac{1}{2}Av_m^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}AV^2 \ (\rightarrow [0.2 + 0.2])$$

これを解くと，

$$v = \frac{Av_b}{A+1}, \quad V = \frac{v_b}{A+1}$$

（**別解**）重心系の定義より，$v_m = v_b/(A+1)$。衝突前，重心系では中性子と減速剤の速さは$v_b - v_m = Av_b/(A+1)$とv_mであり、弾性衝突なら重心系でみると 2 粒子は逆向きに散乱されるので，速さは衝突前と同じに保たれ，

$$v = \frac{Av_b}{A+1}, \quad V = \frac{v_b}{A+1} \ (\rightarrow [0.2 + 0.1])$$

注：別の解答でも，解き切っていれば適切な点を与える。

B3

解答：

$$G(\alpha, \theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2} = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta]$$

解説： $\overrightarrow{v_a} = \vec{v} + \overrightarrow{v_m}$より、$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2vv_m\cos\theta$ $(\rightarrow [0.3])$である。v，v_mの式を代入して，

$$v_a^2 = \frac{A^2v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{2Av_b^2}{(A+1)^2}\cos\theta \ (\rightarrow [0.2])$$

ゆえに，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$\therefore \quad G(\alpha,\theta) = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta]$$

別の表現：

$$= 1 - \frac{(1-\alpha)(1-\cos\theta)}{2}$$

注：別の解答でも，解き切っていれば適切な点を与える。

B4

解答：$f_l = 0.181$

解説：正面衝突するとき，エネルギー損失は最大，つまり，E_aは $\theta = \pi$ のとき最小になる。

したがって，　$E_a = E_{min} = \alpha E_b$

D_2Oに対して，$\alpha = 0.819$であるから，失うエネルギーの比率の最大値$\left(\frac{E_b - E_{\min}}{E_b}\right)$は，

$$1 - \alpha = 0.181\ [\text{許容範囲}(\mathbf{0.170}\sim\mathbf{0.190})]$$

C. **原子炉**

C1

解答：$R = 3.175$ m，$H = 5.866$ m.

解説：体積は，$V = \pi R^2 H$ で一定なので，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right] = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left[\frac{2.405^2\pi H}{V} + \frac{\pi^2}{H^2}\right] = \frac{2.405^2\pi}{V} - 2\frac{\pi^2}{H^3} = 0$$

よって

$$\left(\frac{2.405}{R}\right)^2 = 2\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

定常状態なので，

$$1.021 \times 10^{-2}\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]\Psi = 8.787 \times 10^{-3}\Psi$$

よって，

$$H = 5.866\ \mathrm{m}\ \left[\text{許容範囲}(\mathbf{5.850}\sim\mathbf{5.890})\right]$$
$$R = 3.175\ \mathrm{m}\ \left[\text{許容範囲}(\mathbf{3.170}\sim\mathbf{3.180})\right].$$

$V=\pi R^2 H$が一定の時，$\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$を最小にするような最適化を行うための，微分を使わない方法：

R^2 を V, H で書き換えることで，$\frac{2.405^2\pi H}{V}+\frac{\pi^2}{H^2}$ が得られ，これは，

$$\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{\pi^2}{H^2}$$

と書きかえられる。すべての項が正なので，相加平均，相乗平均の間に成り立つ不等式から，

$$\frac{\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{2.405^2\pi H}{2V}+\frac{\pi^2}{H^2}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{2.405^2\pi H}{2V}\times\frac{2.405^2\pi H}{2V}\times\frac{\pi^2}{H^2}}=\sqrt[3]{\frac{2.405^4\pi^4}{4V^2}}$$

右辺は定数であり，左辺の最小値が右辺であるということを示している。等号成立は，全項がすべて等しいときで，

$$\frac{2.405^2\pi H}{2V}=\frac{\pi^2}{H^2}\Rightarrow\left(\frac{2.405}{R}\right)^2=2\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

定常状態なので，

$$1.021\times10^{-2}\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]\Psi=8.787\times10^{-3}\Psi$$

よって，

$$H=5.866\ \mathrm{m}\ [\text{許容範囲}(\mathbf{5.850}\sim\mathbf{5.890})]$$
$$R=3.175\ \mathrm{m}\ [\text{許容範囲}(\mathbf{3.170}\sim\mathbf{3.180})].$$

注：右辺に得られた条件を代入することで，最小値がπ^2/H^2であるとわかる。つまり，条件より

$$\frac{\pi^3}{H^3}=\frac{2.405^2\pi^2}{2V}\Rightarrow\frac{\pi^2}{H^2}=\sqrt[3]{\frac{2.405^4\pi^4}{4V^2}}$$

注：西インドにあるタラプール原子力発電所の第 3，第 4 原子炉の半径と高さは，それぞれ 3.192 m と 5.940 m である。

C2

解答：$F_n=387$ m, $M=9.892\times10^4$ kg

<u>**解説**</u>：燃料チャンネルは，0.286 m間隔の正方格子状に並んでいるので，単位チャンネルあたりの実効的な面積は，$0.286^2\ \mathrm{m}^2$ である。円柱の断面積は，$\pi R^2=3.142\times(3.175)^2=31.67\ \mathrm{m}^2$ なので，円柱内に収容できるチャンネルの数の最大数は，31.67/0.0818 の整数部分，つまり387である。

$$(\text{燃料の質量})=387\times(\text{棒の体積})\times(\text{密度})$$

$= 387 \times (\pi \times 0.03617^2 \times 5.866) \times 10600 = 9.892 \times 10^4$ kg.

$F_n = 387$[許容範囲(380~394)]

$M = 9.892 \times 10^4$ kg [許容範囲(9.000~10.00)]

注 1：（採点対象外）燃料の総体積は，$387 \times (\pi \times 0.03617^2 \times 5.866) = 9.332\ \mathrm{m^3}$。もし原子炉が12.5%の効率で動くなら，A3 の結果を使って原子炉の出力は，$9.332 \times 4.917 \times 10^8 \times 0.125 = 573$ MWである。

注 2：タラプール原子力発電所の第 3,第 4 原子炉には，392 本のチャンネルがあり，燃料の質量は 10.15×10^4 kgである。出力は540 MWである。

小問 B2, B3 の別解：実験室系での減速剤の散乱角をσとする。この角は、衝突前の中性子の進行方向から時計回りにとる。衝突後の減速剤の実験室系での速さをUとする。実験室系での運動量、エネルギー保存則より、

$$v_b = v_a \cos\theta_L + AU\cos\sigma \quad (1)$$

$$0 = v_a \sin\theta_L - AU\sin\sigma \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}v_b^2 = \frac{1}{2}AU^2 + \frac{1}{2}v_a^2 \quad (3)$$

(1)と(2)の辺々を二乗して足すことでσを消去し，それと(3)を使うことで，

$$A^2U^2 = v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b \cos\theta_L$$

$$A^2U^2 = Av_b^2 - Av_a^2 \quad (4)$$

したがって，

$$2v_a v_b \cos\theta_L = (A+1)v_a^2 - (A-1)v_b^2 \quad (5)$$

(ii)　重心系で，衝突後の中性子の速さを v とする。重心の定義から，$v_m = v_b/(A+1)$。実験室系において，衝突前の中性子の運動方向と垂直，平行方向に v_a を分解すると，それぞれ $v_a \sin\theta_L$，$v_a \cos\theta_L$ である。これらを重心系での値に変換すると，v の垂直成分，平行成分はそれぞれ$v_a \sin\theta_L, v_a\cos\theta_L - v_m$である。

$$v = \sqrt{v_a^2 \sin^2\theta_L + v_a^2\cos^2\theta_L + v_m^2 - 2v_a v_m \cos\theta_L}$$

において，v_m，$2v_a v_b \cos\theta_L$ を（(5)式を使うなどして）置き換えて整理すると，$v = Av_b/(A+1)$ が得られる。v の成分を２乗して θ_L を消去して，

$$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2vv_m\cos\theta$$

v，v_m を代入して整理すると，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$G(\alpha,\theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta]$$

（もう１つの別解）

(iii)　重心の定義から，$v_m = v_b/(A+1)$。　衝突後，重心系での中性子と減速剤の速さをそ

れぞれvとVとする。保存則より,

$$v = AV\ , \qquad \frac{1}{2}(v_b - v_m)^2 + \frac{1}{2}Av_m^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}AV^2$$

これを解くと,

$$v = \frac{Av_b}{A+1}\ , V = \frac{v_b}{A+1}$$

また，$v\cos\theta = v_a\cos\theta_L - v_m$もわかっているので，$v_m$を $v_b/(A+1)$ でおきかえ，(5)式を用いて $v_a\cos\theta_L$ を書き換えて整理すると，

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$G(\alpha,\theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta$$

（さらにもう１つの別解）

(iv)　重心の定義から、$v_m = v_b/(A+1)$。 衝突後，重心系での中性子と減速剤の速さをそれぞれvとVとする。保存則より,

$$v = AV\ , \qquad \frac{1}{2}(v_b - v_m)^2 + \frac{1}{2}Av_m^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}AV^2$$

これを解くと,

$$v = \frac{Av_b}{A+1}\ , V = \frac{v_b}{A+1}$$

衝突前の中性子の運動方向と垂直，平行方向にUを分解すると，それぞれ$U\sin\sigma, U\cos\sigma$となる。これらを重心系での値に変換すると，Vの垂直成分，平行成分はそれぞれ $U\sin\sigma$， $-U\cos\sigma + v_m$ である。よって，

$$U^2 = V^2\sin^2\theta + V^2\cos^2\theta + v_m^2 - 2Vv_m\cos\theta$$

ここで，$V = v_m$ なので,

$$U^2 = 2v_m^2(1-\cos\theta)$$

Uを(4)式によって置き換えて整理すると,

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}$$

$$G(\alpha,\theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\theta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta]$$

注：$v_a = \left(\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}\right)v_b/(A+1)$ が分かる。$v\cos\theta = v_a\cos\theta_L - v_m$ において，v_a, v, v_m を置き換えて整理すると，次のような θ_L, θ の間の関係を得る：

$$\cos\theta_L = \frac{A\cos\theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\theta + 1}}$$

この式を$\cos\theta$の二次方程式とみなすと,

$$\cos\theta = \frac{-\sin^2\theta_L \pm \cos\theta_L\sqrt{A^2-\sin^2\theta_L}}{A}$$

$\theta_L = 0^{\mathrm{o}}$のとき，負号だと$\theta = 180^{\mathrm{o}}$となって不適，よって，

$$\cos\theta = \frac{-\sin^2\theta_L + \cos\theta_L\sqrt{A^2-\sin^2\theta_L}}{A}.$$

$\frac{v_a^2}{v_b^2}$の式で、$\cos\theta$を上式に置き換えると、$\cos\theta_L$によって表せる。

$$\frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2\cos\theta_L\sqrt{A^2-\sin^2\theta_L} + \cos 2\theta_L}{(A+1)^2}$$